МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

$ab \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ $\Rightarrow (abc)^2 \vdots 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \Rightarrow abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

$ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

при делении показателя степени на 2 приходится округлять вверх т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ и ~~нец~~ степеней с не натуральным показателем быть не может

Тогда 21; 21; 27 – минимальные степени, проверим, что их возможно получить

$x = 2^{m_x} \cdot 3^{n_x} \cdot 5^{k_x}$ (введем m, n и k)

при $m_a = 7$, $m_b = 2$ и $m_c = 12$ $\sum\limits_{i=1}^{3} m_i = 21$, $m_a + m_b = 9 \geq 9$, $m_b + m_c = 14 \geq 14$ и $m_a + m_c = 19 \geq 19$

также можно подобрать и $n_a = 8$, $n_b = 2$, $n_c = 11$

с k будут проблемы, т.к. $\min(k_a + k_b + k_c) = 27$, а $k_a + k_c \geq 30$

минимальное $k_a + k_c = 30$, надо подобрать их так, чтобы $k_b = 0$,

например $k_a = k_c = 15$

итого $abc_{min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

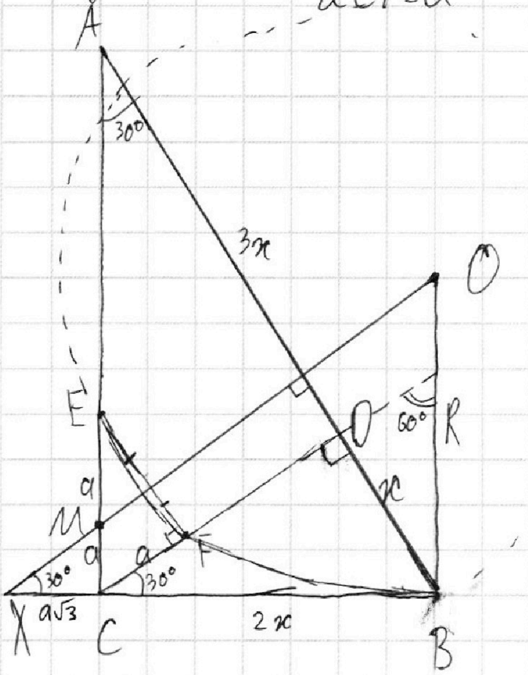
Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 пусть $BD = x$
и $CF = a$



в пр Δ-ке $CD^2 = BD \cdot AD = 3x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle A = 30° \Rightarrow \angle DCB = 30° = \angle CEF$
(ABИEF)

OX - сер перпендикуляр к EF $\Rightarrow$ O - центр окружн, где $OB \perp BC$, т.к. окружн кас BC

$CE = 2a$
$OX \parallel CF$ $\Big| \Rightarrow$ M - середина CE, $CM = a \Rightarrow$
$\Rightarrow CX = a\sqrt{3}$ ($\angle OXB = \angle DCB$)

$R = \frac{a\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}} = a + \frac{2x}{\sqrt{3}}$

$OE^2 = R^2$
$OE^2 = (R - CE)^2 + BC^2$ $\Bigg) R^2 = R^2 - 4aR + 4a^2 + 4x^2$

$4a^2 - 4aR + 4x^2 = 0$
$4a^2 - 4a^2 - \frac{8ax}{\sqrt{3}} + 4x^2 = 0$

$4x^2 = \frac{8ax}{\sqrt{3}}$
$a = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$S_\Delta ABC = x\sqrt{3} \cdot 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x^2\sqrt{3}$
$S_\Delta CFE = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\frac{S_\Delta ABC}{S_\Delta CEF} = 4\frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \left(\frac{2x \cdot 2}{x\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$

Ответ: 16/3

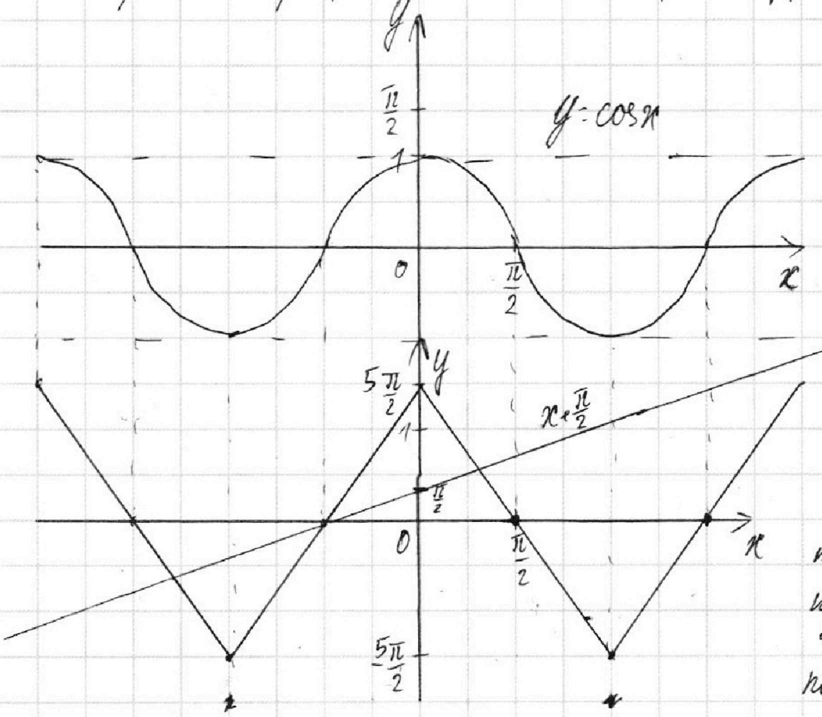
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Построим графики обеих сторон ур-ия



графиком

$y=\arcsin(\cos x)=\arcsin(\sin(x+\frac{\pi}{2}))$

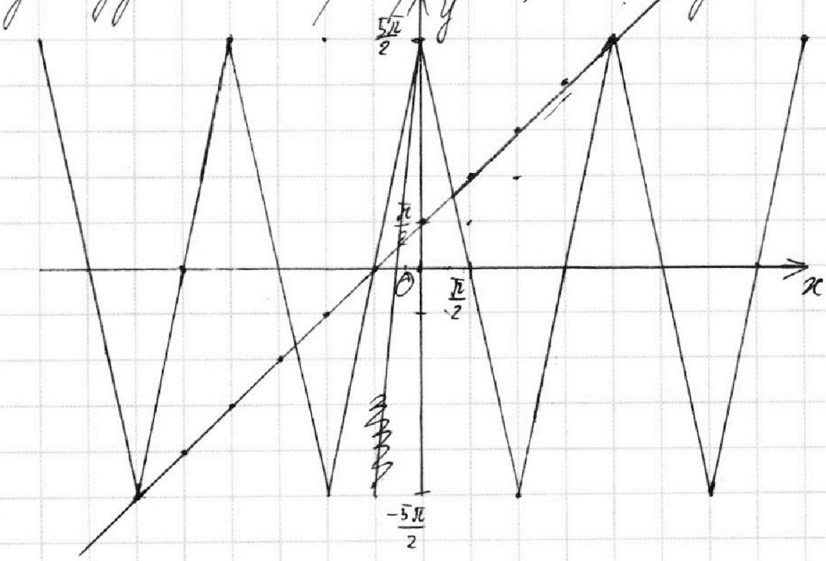
будет множество отрезков от $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$, параллельных

$y=x+\frac{\pi}{2}$ и $y=-x+\frac{\pi}{2}$

для упрощения жизни из $y=\arcsin(\cos x)$ получим $y=\arcsin(\cos x)\cdot 5$, изменив масштаб в 5 раз

теперь построим $x+\frac{\pi}{2}$

для удобства перечертим, чтобы одна клетка по y была $\frac{\pi}{2}$



Точки $x=2\pi;-\frac{\pi}{2}$ и -3π очевидны по графику. Найдём ещё две, решив:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{2}=-5x+\frac{5\pi}{2} \\ x+\frac{\pi}{2}=-5x-\frac{15\pi}{2} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3} \\ x=-\frac{4\pi}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $-3\pi;-\frac{4\pi}{3};-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

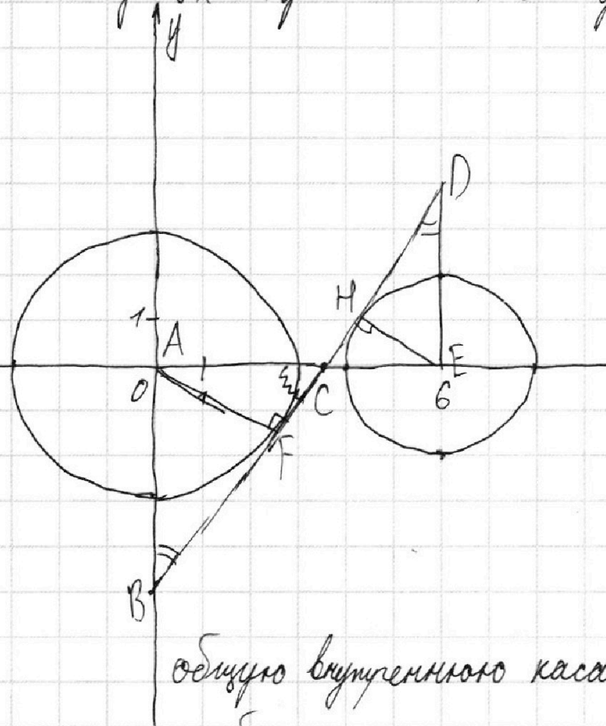
МФТИ

Задача 4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & \text{— множество прямых} \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & \text{— две окружности} \end{cases}$$

$x^2+y^2=9$ центр $(0;0)$, радиус 3

и $(x-6)^2+y^2=4$ центр $(6;0)$, радиус 2



обычно крайние случаи для пересечения прямой и окружности – касательны

При отклонении общей внешней касательной на некоторый угол проблем с нахождением b не возникает (из-за того, что центры окружностей на горизонтальной прямой) Но если рассмотреть общую внутреннюю касательную, станет понятно, что при приближении графика $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$ к прямой $x=const$ теряется возможность найти b. Найдем коэффициент наклона одной такой касательной, у второй он $-k$

BD-общ. внут. кас.

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$ (по двум углам), $\frac{AF}{EH}=\frac{3}{2}$ $\Big|$ $AE=AC+CE$, $AC=1{,}5CE$ $\quad AE=2{,}5CE$ $\Big|$ $CE=\frac{12}{5}$, $AC=\frac{18}{5}$

$FC=\sqrt{AC^2-AF^2}=\frac{1}{5}\sqrt{18^2-15^2}=\frac{1}{5}\sqrt{3\cdot 33}=\frac{3}{5}\sqrt{11}$

$\triangle ABC \sim \triangle FAC$ (по двум углам) $\Rightarrow AB=AF\cdot\frac{AC}{FC}=3\cdot\frac{18}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{18}{\sqrt{11}}$

$B(0;-\frac{18}{\sqrt{11}})$ и $C(\frac{18}{5};0)$

$k=\frac{18}{\sqrt{11}}\cdot\frac{5}{18}=\frac{5}{\sqrt{11}}$

при $k\in[5/\sqrt{11};+\infty)\cup(-\infty;-\frac{5}{\sqrt{11}}]$ b не найдется

$k=-\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}\in(-\frac{5}{\sqrt{11}};\frac{5}{\sqrt{11}})$ чтобы b было

Ответ: $a\in(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 $x>0;\ \neq 1,\ y>0;\ \neq \frac{1}{5}$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$ $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8$

$f(x) = \log_3^4 x + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0$ $g(5y) = \log_3^4(5y) - 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0$

разница между двумя $f(x)$ и $g(5y)$ ур-иями только в минусе. Устраним его, заменив $5y$ на $\frac{1}{x}$ без потери ОДЗ, т.к. $x\neq 0$

получим: $g(\frac{1}{x}) = \log_3^4(1/x) - 3{,}5\log_{x^{-1}} 3 + 8 = 0$

$g(\frac{1}{x}) = \log_3^4(x) + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0$

таким образом, $f(x)$ функционально равно $f(\frac{1}{x})$ $(g=f)$, тогда каждому решению $5y_0$ в пару можно поставить $\frac{1}{x_0}$

~~$x_0 = \frac{1}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow 5y_0 = \frac{1}{t_0} = x_0$, то есть в $g(5y)$ $5y$ можно заменить на x~~

~~$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 7\log_x 3 = 0$~~

если $5y_0 = \frac{1}{x_0}$, то $y_0 = \frac{1}{5x_0}$ и $y_0 \cdot x_0 = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$
$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$
$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$a^2b^2c^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

$abc = 2^{21} 3^{21} 5^{27}$

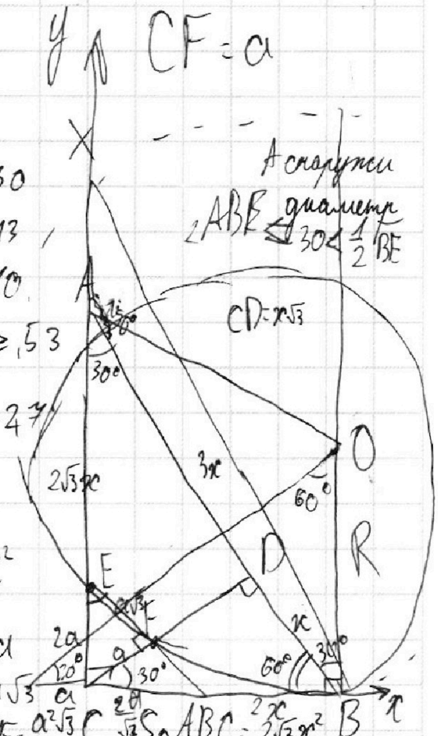
$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5$
$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5$

$a+c \geq 30$
$b+c \geq 13$
$a+b \geq 10$
$2(a+b+c) \geq 53$
$\in N$
$a+b+c \geq 27$

BD = x
CF = a

A опирается на диаметр
$\angle ABE \leq 30 < \frac{1}{2} BE$

CD = $x\sqrt{3}$



$\frac{S_\Delta ABC}{S_\Delta CEF} = 4\left(\frac{x}{a}\right)^2$

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

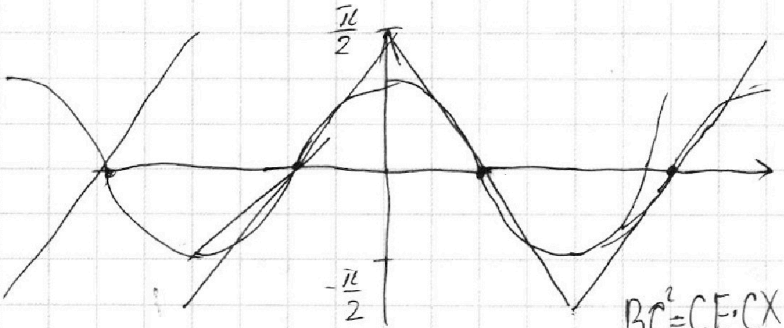
$CE \cdot CX = BC^2$

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$CF = a$
$EF = a\sqrt{3}$
$S_\Delta CEF = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
$S_\Delta ABC = 2\sqrt{3}x^2$

$CD = x\sqrt{3}$
$AD : DB = 3:1$
$BC = 2x$
$AC = 2\sqrt{3}x$

$\frac{S_\Delta ABC}{S_\Delta CEF}$?

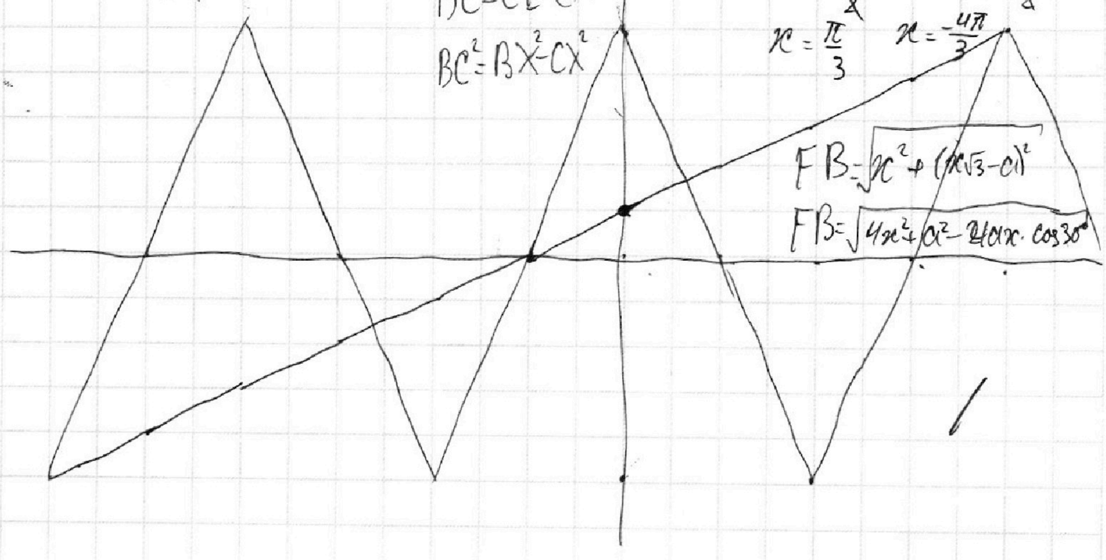


$BC^2 = CE \cdot CX$
$BC^2 = BX^2 - CX^2$

$6x = \frac{\cancel{4}3\pi}{\cancel{2}}$ $\quad 6x = -\frac{\cancel{16}8\pi}{\cancel{8}}$

$x = \frac{\pi}{3}$ $\quad x = -\frac{4\pi}{3}$

$FB = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{3} - a)^2}$
$FB = \sqrt{4x^2 + a^2 - 4ax \cdot \cos 30°}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

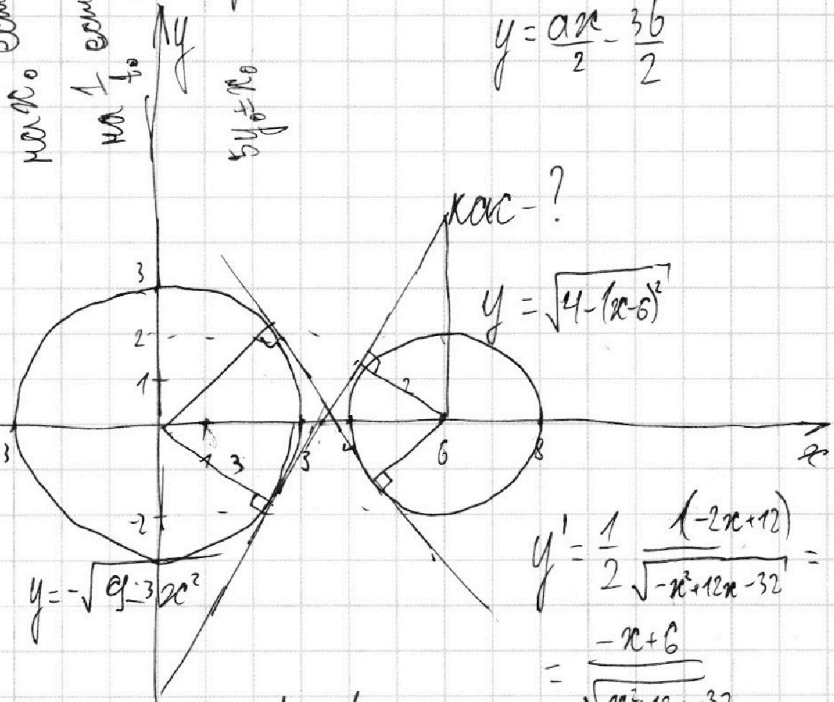
МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$x^2+y^2=9 \quad (0;0)\ R=3$

$(x-6)^2+y^2=4 \quad (6;0)\ R=2$

$y=\frac{ax}{2}-\frac{3b}{2}$



$y'=\frac{1}{2}\frac{(-2x+12)}{\sqrt{-x^2+12x-32}}=$

$=\frac{-x+6}{\sqrt{-x^2+12x-32}}$

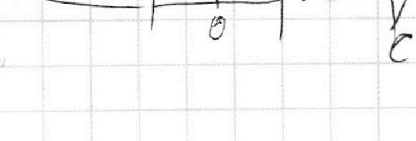
$y=kx+b$

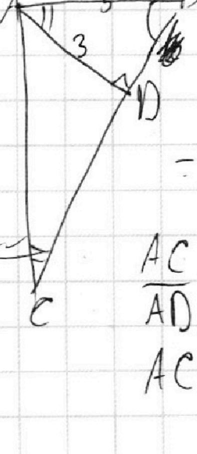
$\rho(q;y)=2$

$\frac{12}{5}$ и $\frac{18}{5}$

$(0;\frac{18}{\sqrt{11}})$ и $(\frac{18}{5};0)$

$k=\frac{18}{\sqrt{11}}\cdot\frac{5}{18}=\frac{5}{\sqrt{11}}$





$BD=\sqrt{\frac{18^2}{5^2}-\frac{15^2}{5^2}}=$

$=\frac{1}{5}\sqrt{3\cdot 33}=\frac{3}{5}\sqrt{11}$

$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{BD}$

$AC=\frac{3\cdot\frac{18}{5}}{\frac{3}{5}\sqrt{11}}=\frac{18}{\sqrt{11}}$

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8 \quad x>0;\neq 1$

$\log_x^{-4}3+6\log_x 3=\frac{5}{2}\log_x 3-8$

$\frac{1}{t^4}+6t=2{,}5t-8$

$\frac{3{,}5t^5+8t^4+1}{t^4}=0$

на x_0 есть $\frac{1}{t_0}=x_0$

на $\frac{1}{t_0}$ есть $5y_0=\frac{1}{t_0}$

$5y_0=x_0$

$\log_3^4(5y)+2\log_{5y}3-\frac{11}{2}$

при $5y=\frac{1}{x}$

$x_0=\frac{5}{t_0} \quad t_0=\frac{5}{x_0} \quad y_0=\frac{x_0}{5}$

$\log_3^4 x+3{,}5\log_x 3+8=0$

$\log_3^4(5y)-3{,}5\log_{5y}3+8=0$

$\log_3^4(\frac{1}{t})+3{,}5\log_{\frac{1}{t}}3+8=0$

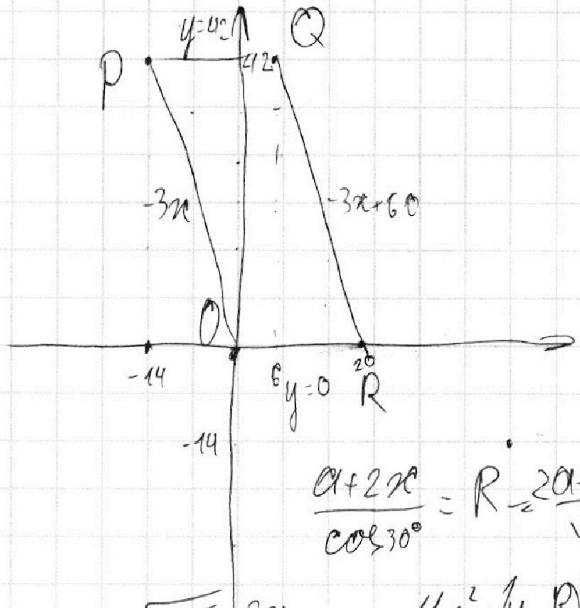
$y>0 \quad 5y=\frac{1}{t}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$

$3(x_2-x_1)=33-(y_2-y_1)$

$x_2-x_1=11-\frac{(y_2-y_1)}{3}$

$x_2-x_1=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$

$20\to 6$

$\Delta x\in[60;60]$, $\vdots 3\in\mathbb{Z}$

$\Delta y\in[0$

$\frac{23}{34}>\frac{2}{3}$ $\quad 230 : 34 = 6$, -204, 26, $10{,}6>6$

$\frac{a+2x}{\cos 30^\circ}=R=\frac{2a+4x}{\sqrt3}$

$a=\frac{\pm x\sqrt{1+2\sqrt3}-2x}{2-\sqrt3}$

$\frac{2x\pm x\sqrt{1+2\sqrt3}}{\sqrt3-2}$

$a=\frac{2\sqrt3x\pm x\sqrt{3+6\sqrt3}}{3-2\sqrt3}$

$4x^2+(y-R)^2=R^2$ $\quad 4x^2+y^2-2yR=0$

$x^2+3x^2-2\sqrt3ax+a^2$

$\cancel{4x^2+a^2-4ax\cdot\frac{\sqrt3}{2}}$ $\cancel{\varnothing}$

$a^2(3-2\sqrt3)-4ax\sqrt3+3x^2=0$

$\frac{D}{4}=12x^2-9x^2+6\sqrt3x^2=x^2(3+6\sqrt3)$

$y^2-\frac{4a+8x}{\sqrt3}y+4x^2=0$

$\frac{D}{4}=R^2-4x^2=\frac{4a^2+16ax+16x^2}{3}-\cancel{4x^2}$

$y=\frac{R\pm\sqrt{D/4}}{1}$

$4a^2+16ax+4x^2=16x^2-16ax(\sqrt3-1)+4a^2(4-2\sqrt3)$

$2a=\frac{2a+4x}{\sqrt3}-\sqrt{\frac{4D}{4}}$

$\sqrt{\frac{D}{4}}=\frac{4x-2a(\sqrt3-1)}{\sqrt3}$

$12x^2-16ax\sqrt3+4a^2(3-2\sqrt3)=0$

$\frac{2a(\sqrt3-1)+4x}{\sqrt3}=-\sqrt{\frac{D}{4}}$

$4a^2+16ax+4x^2=16x^2-16ax$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!