



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

при делении показателей степени на 2 приходится округлять вверх т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ и степень с ~~натуральным~~ не натуральным показателем быть не может

Погда 21, 21, 27 — минимальные степени, проверим, что их возможно получить

$$x = 2^{m_x} \cdot 3^{n_x} \cdot 5^{k_x} \text{ (введем } m, n \text{ и } k)$$

$$\text{при } \underline{m_a=7, m_b=2 \text{ и } m_c=12} \quad \sum_{i=1}^3 m_i = 21, \quad m_a+m_b=9 \geq 9, \quad m_b+m_c=14 \geq 14$$

$\text{и } m_a+m_c=19 \geq 19$

также можно подобрать и $\underline{n_a=8, n_b=2, n_c=11}$

с k будут проблемы, т.к. $\min(k_a+k_b+k_c)=27$, а $k_a+k_c \geq 30$

минимальное $k_a+k_c=30$, надо подобрать их так, чтобы $\underline{k_b=0}$,

например $\underline{k_a=k_c=15}$

$$\text{итого } abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

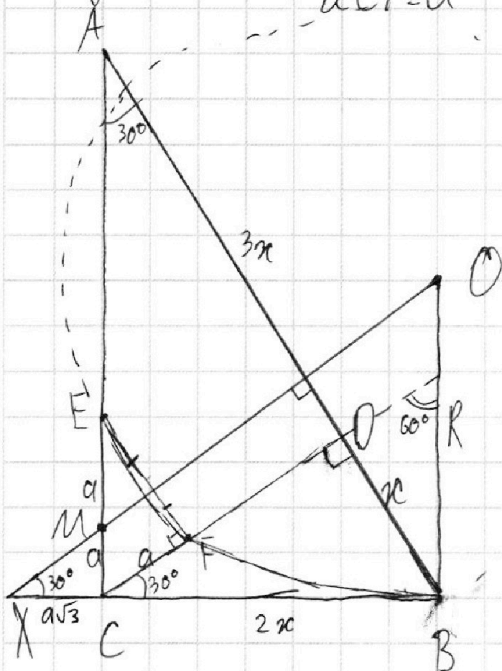
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

пусть $BD = x$
и $CF = a$



в пр. Δ -ке $CD^2 = BD \cdot AD = 3x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ = \angle CEF$
 (ABDEF)

O - сер. перпендикуляр к $EF \Rightarrow O$ - центр окружности
 , где $OB \perp BC$, т.к. окружность кас BC

$CE = 2a$
 $O \perp CF \Rightarrow M$ - середина CE , $CM = a \Rightarrow$
 $\Rightarrow CX = a\sqrt{3}$ ($\angle OXB = \angle DCB$)

$$R = \frac{a\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}} = a + \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$OE^2 = R^2$$

$$OE^2 = (R - CE)^2 + BC^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 4aR + 4a^2 + 4x^2$$

$$4a^2 - 4aR + 4x^2 = 0$$

$$4a^2 - 4a^2 - \frac{8ax}{\sqrt{3}} + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 = \frac{8ax}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = x\sqrt{3} \cdot 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x^2\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta CFE} = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CFE}} = \frac{4x^2}{a^2} = \left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \left(\frac{2x \cdot 2}{x\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

Ответ: $16/3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

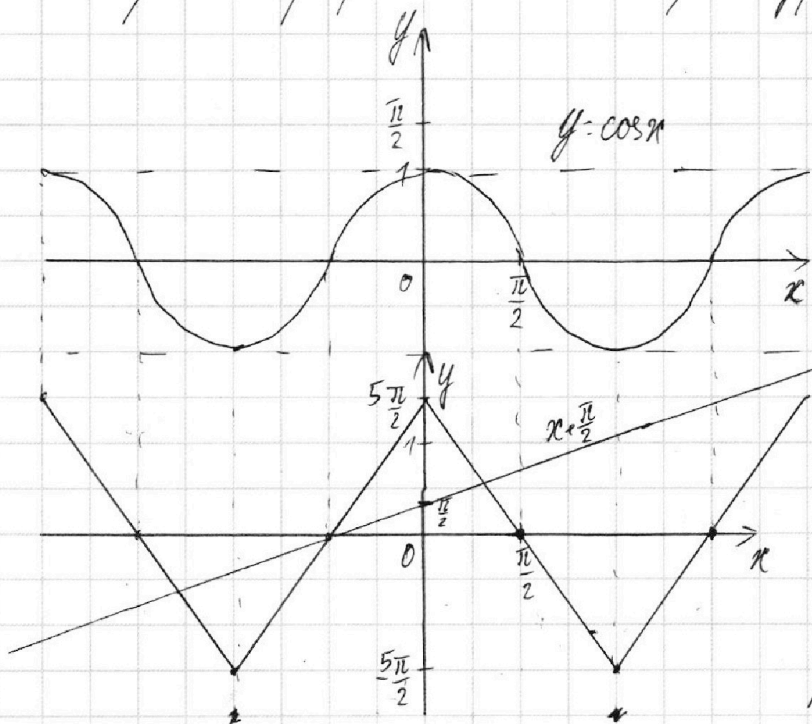
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Построим графики обеих сторон уравнения



графиками

$$y = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))$$

будет множество отрезков
от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, параллельных

$$y = x + \frac{\pi}{2} \text{ и } y = -x + \frac{\pi}{2}$$

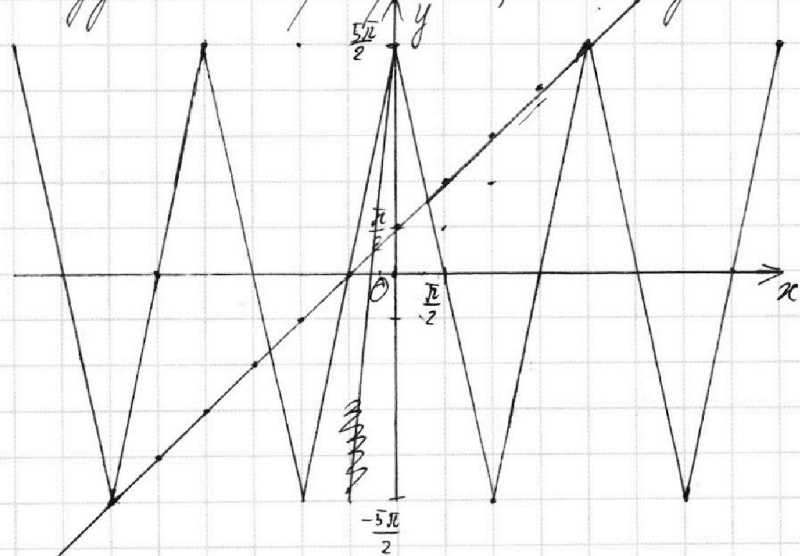
для упрощения задачи

$$\text{и } y = \arcsin(\cos x)$$

периодом $y = \arcsin(\cos x) \cdot 5$,
изменив максимум в 5 раз

теперь построим $x + \frac{\pi}{2}$

для удобства перенерчим, чтобы одна клетка по y была $\frac{\pi}{2}$



Точки $x = 2\pi, -\frac{\pi}{2}$ и -3π
отметим на графике
Найдём ещё две, решив:

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = -5x + \frac{5\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{2} = -5x - \frac{15\pi}{2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} \end{array} \right.$$

Ответ: $-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

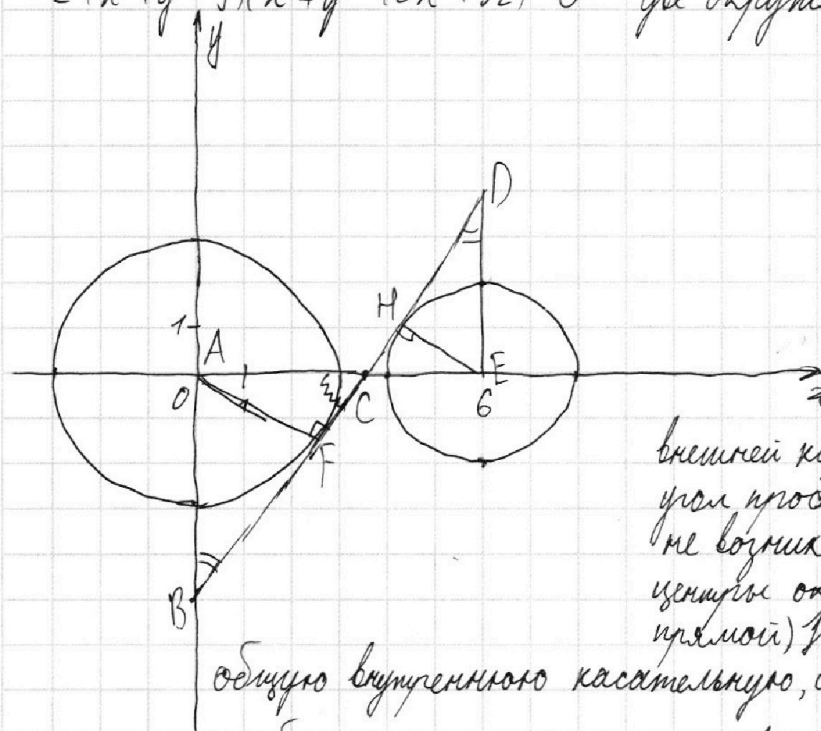
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & \text{— множество прямых} \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & \text{— две окружности} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x^2+y^2=9 \\ & \text{центр } (0;0), \text{ радиус } 3 \\ & (x-6)^2+y^2=4 \\ & \text{центр } (6;0), \text{ радиус } 2 \end{aligned}$$

обычно крайние случаи для пересечения прямой и окружности — касательные



При отклонении в общей внешней касательной на некоторый угол проблем с касанием в не возникает (из-за того, что центры окружностей на горизонтальной прямой). Но если рассмотреть

общую внутреннюю касательную, становится понятно, что при

приближении графика $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ к прямой $x = \text{const}$ теряется возможность найти b . Найдем координаты наклонной такой касательной, у которой $\text{on} = -k$

BD — общ. внут. кас.

$$\triangle ABC \sim \triangle EDC \text{ (по двум углам)}, \frac{AF}{EH} = \frac{3}{2} \left| \begin{array}{l} AE = AC + CE \\ AC = 15CE \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} AE = 2,5CE \\ AC = \frac{18}{5} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} CE = \frac{12}{5} \\ AC = \frac{18}{5} \end{array} \right.$$

$$FC = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{5} \sqrt{18^2 - 15^2} = \frac{1}{5} \sqrt{3 \cdot 33} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle FAC \text{ (по двум углам)} \Rightarrow AB = AF \cdot \frac{AC}{FC} = 3 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{5}{3 \sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$B(0; -\frac{18}{\sqrt{11}}) \text{ и } C(\frac{18}{5}; 0)$$

$$k = \frac{18}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

при $k \in [5/\sqrt{11}; +\infty) \cup (-\infty; -5/\sqrt{11}]$ b не находится

$$k = -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}}) \text{ чтобы } b \text{ было}$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$x > 0; x \neq 1, y > 0; y \neq \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$f(x) = \log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g(y) = \log_3^4(5y) - 3,5 \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

разница между двумя уравнениями только в лицеве. Устраним его,

заменяя $5y$ на $\frac{1}{x}$ без потери ОДЗ, т.к. $x \neq 0$

$$\text{получим: } g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4\left(\frac{1}{x}\right) - 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4(x) + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

таким образом, $f(x)$ функционально равно $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ($g = f$), тогда

каждому решению $5y_0$ в паре можно поставить $\frac{1}{x_0}$

~~$x_0 = \frac{1}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow 5y_0 = \frac{1}{t_0} = x_0$, то есть в $g(5y)$ $5y$ можно заменить как $f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 4 \log_x 3 = 0$~~

если $5y_0 = \frac{1}{x_0}$, то $y_0 = \frac{1}{5x_0}$ и $y_0 \cdot x_0 = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$



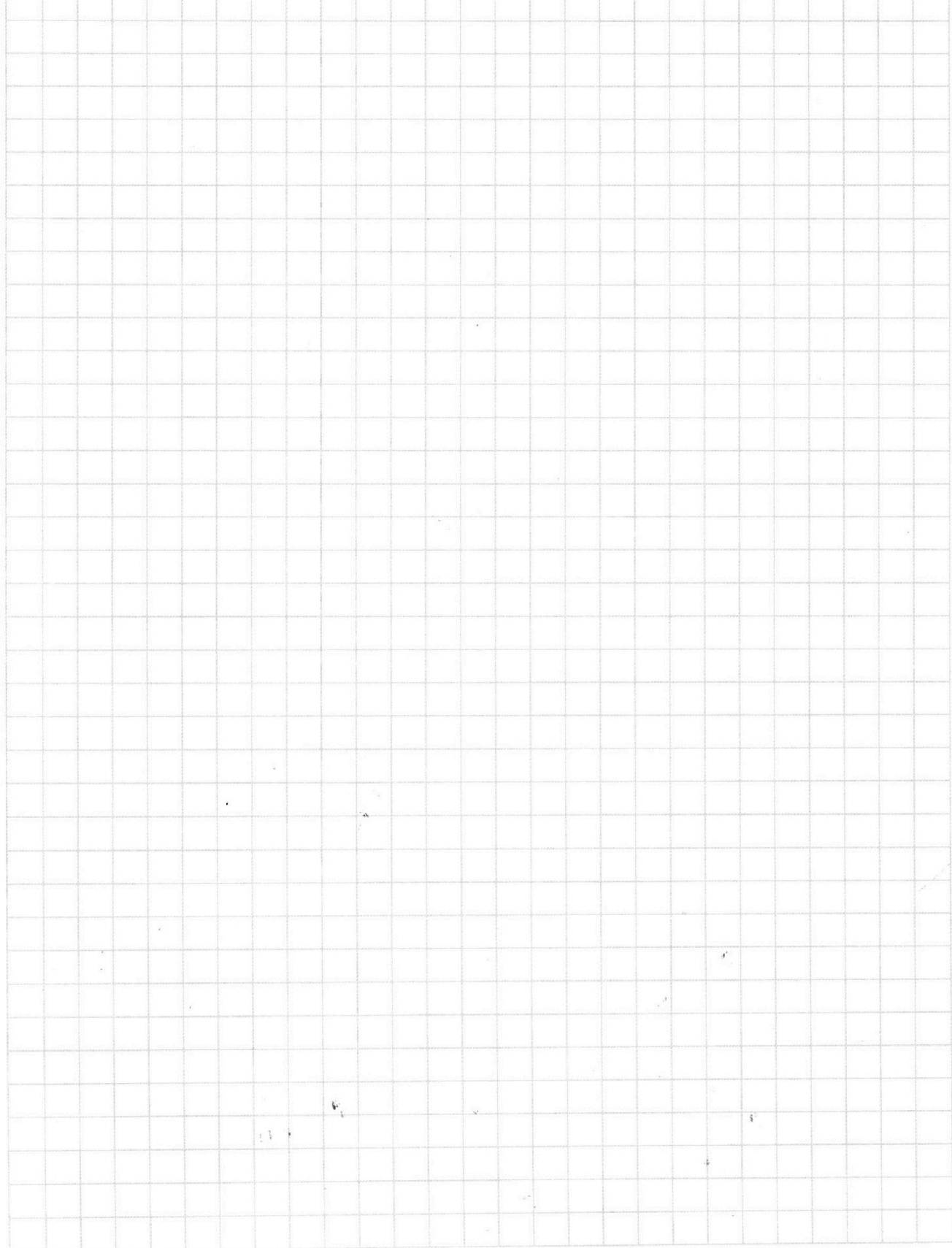
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{27}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

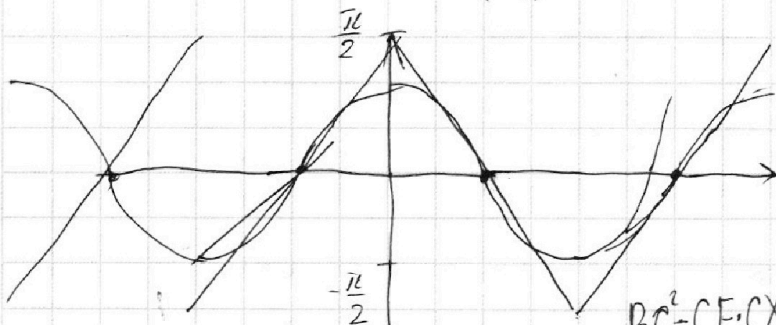
$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = 4 \left(\frac{BC}{a} \right)^2$$

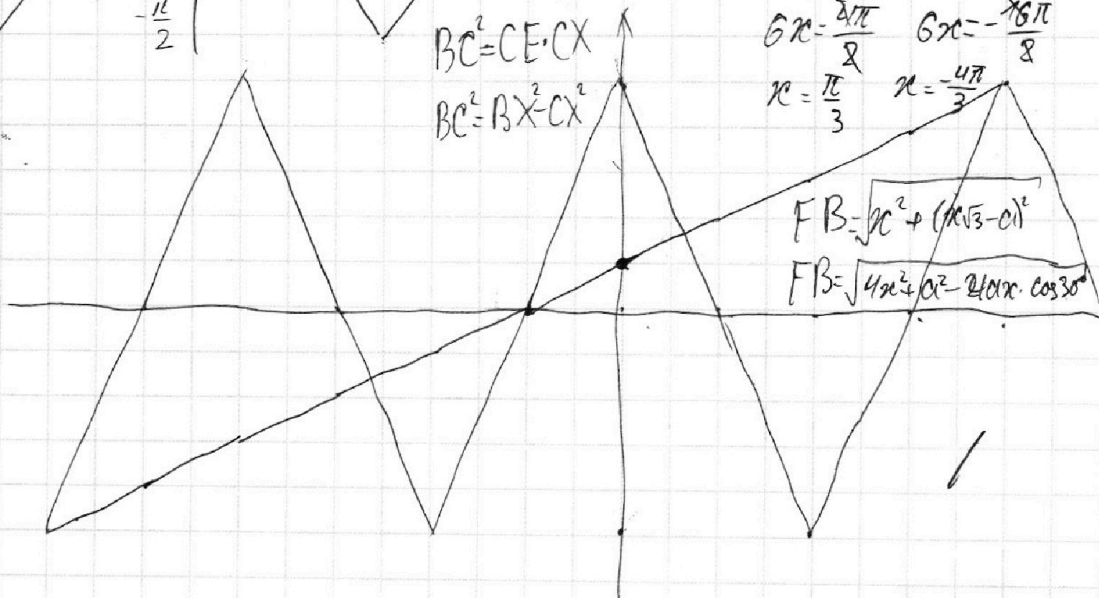
$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$



$$BC^2 = CE \cdot CX$$

$$BC^2 = BX^2 - CX^2$$



$BD = x$
 $CF = a$

$a + c \geq 30$
 $b + c \geq 13$
 $a + b \geq 10$
 $2(a + b + c) \geq 53$
 $e \in \mathbb{N}$
 $a + b + c \geq 27$

ΔABE диаметр $\Rightarrow 30^\circ \frac{1}{2} BE$

$CD = x\sqrt{3}$

$CE \cdot CX = BC^2$

$CF = a$
 $EF = a\sqrt{3}$
 $S_{\Delta CEF} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{2x}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} = \frac{2x}{\sqrt{3}} x^2$

$CD = x\sqrt{3}$ $AD:DB = 3:1$
 $BC = 2x$
 $AC = 2\sqrt{3}x$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}x^2$

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{\sqrt{3}x^2}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{2x^2}{a^2}$

$6x = \frac{2x^2}{a^2} \Rightarrow 6x = -\frac{16\pi}{8}$
 $x = \frac{\pi}{3}$ $x = -\frac{4\pi}{3}$

$FB = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{3} - a)^2}$
 $FB = \sqrt{4x^2 + a^2 - 2ax \cos 30^\circ}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x > 0; y > 1$
 $\log_3 x + 6 \log_3 y = \log_3 x^{243} - 8$
 $\log_3 x^3 + 6 \log_3 y^3 = \frac{5}{2} \log_3 x^3 - 8$
 $\frac{1}{2} + 6t = 2,5t - 8$
 $3,5t + 8t = 1$
 $t = \frac{1}{11}$
 $x_0 = \frac{1}{11}, y_0 = \frac{1}{11}$

$\log_3^4(x+2) + 2 \log_3^4 y = \frac{11}{2}$
 $\log_3^4(5y) + 2 \log_3^4 y = \frac{11}{2}$
 $5y = \frac{1}{2}$

$\log_3^4 x + 3,5 \log_3^4 x + 8 = 0$
 $\log_3^4(5y) - 3,5 \log_3^4(5y) + 8 = 0$
 $\log_3^4(\frac{1}{11}) + 3,5 \log_3^4(\frac{1}{11}) + 8 = 0$
 $5y = \frac{1}{11}$

$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$
 $x^2 + y^2 = 9 \quad (0; 0) R=3$
 $(x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (6; 0) R=2$
 $y = \frac{ax - 3b}{2}$
 $y = \sqrt{4 - (x-6)^2}$
 $y = -\sqrt{9 - 3x^2}$
 $y' = \frac{1}{2} \frac{(-2x+12)}{\sqrt{-x^2+12x-32}} = \frac{-x+6}{\sqrt{-x^2+12x-32}}$

$y = kx + b$
 $p(y; y) = 2$
 $k = \frac{18}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{\sqrt{11}}$
 $BD = \sqrt{\frac{18^2}{5^2} - \frac{15^2}{5^2}} = \frac{1}{5} \sqrt{3 \cdot 33} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$
 $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BD}$
 $AC = \frac{8 \cdot \frac{18}{5}}{\frac{3}{5} \sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

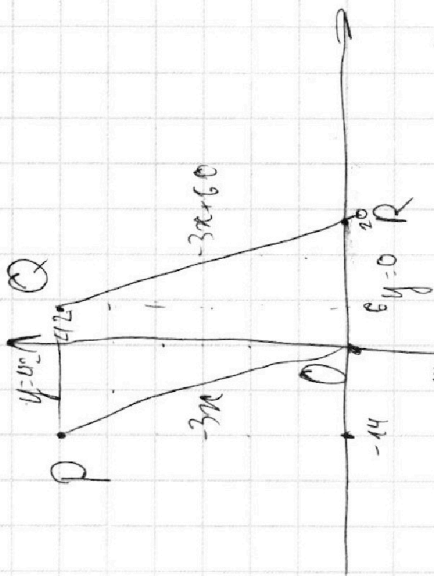
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$20 \rightarrow 6$$

$$\Delta x \in [0; 60], \Delta y \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta y \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{23}{24} > \frac{2}{3} \quad \frac{230}{24} \mid \frac{134}{26}$$

$$3x_2 - 3x_1 - y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) = 33 - (y_2 - y_1)$$

$$x_2 - x_1 = 11 - \frac{(y_2 - y_1)}{3}$$

$$x_2 - x_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

$$\frac{\alpha + 2x}{\cos 30^\circ} = R = \frac{2\alpha + 4x}{\sqrt{3}}$$

$$4x^2 + y^2 - 2yR = 0$$

$$y^2 - \frac{4\alpha + 8x}{\sqrt{3}}y + 4x^2 = 0$$

$$D_y = R^2 - 4x^2 = \frac{4\alpha^2 + 16\alpha x + 16x^2}{3} - 4x^2$$

$$y = \frac{R \pm \sqrt{D_y}}{1}$$

$$\sqrt{\frac{D_y}{4}} = \frac{4x - 2\alpha(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$$

$$4\alpha^2 + 16\alpha x + 16x^2 = 16x^2 - 16\alpha x$$

$$x = \frac{\pm 2x\sqrt{1+2\sqrt{3}} + 2x}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\frac{2x \pm 2x\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$$

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}x \pm x\sqrt{3+6\sqrt{3}}}{3-2\sqrt{3}}$$

$$\alpha^2(3-2\sqrt{3}) - 4\alpha x\sqrt{3} + 3x^2 = 0$$

$$D_y = 12x^2 - 8x^2 + 6\sqrt{3}x^2 = x^2(3+6\sqrt{3})$$

$$4\alpha^2 + 16\alpha x + 4x^2 = 16x^2 - 16\alpha x(\sqrt{3}-1) + 4\alpha^2(3-2\sqrt{3}) = 0$$

$$12x^2 - 16\alpha x\sqrt{3} + 4\alpha^2(3-2\sqrt{3}) = 0$$

$$\frac{2\alpha(\sqrt{3}-1) + 4x}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{D_y}{4}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

