



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \Rightarrow (abc)^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ при делении показателей степеней на 2 происходит округление вверх т.к. $a, b, c \in N$ и степень с ~~натуральными~~ не натуральными показателями быть не может

Числа $21; 21; 27$ -минимальные степени, проверки, что их возможно получить

$$x = 2^{m_a} \cdot 3^{n_b} \cdot 5^{k_c} \text{ (берем } m, n, k)$$

$$\text{при } m_a = 7, m_b = 2 \text{ и } m_c = 12 \quad \sum_{i=1}^3 m_i = 21, m_a + m_b = 9 \geq 9, m_b + m_c = 14 \geq 14 \text{ и } m_a + m_c = 19 \geq 19$$

также можно подобрать и $n_a = 8, n_b = 2, n_c = 11$

с к будут проблемы, т.к. $\min(k_a + k_b + k_c) = 27$, а $k_a + k_c \geq 30$

минимальное $k_a + k_c = 30$, надо подобрать их так, чтобы $k_b = 0$,

например $k_a = k_c = 15$

$$\text{Число } abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



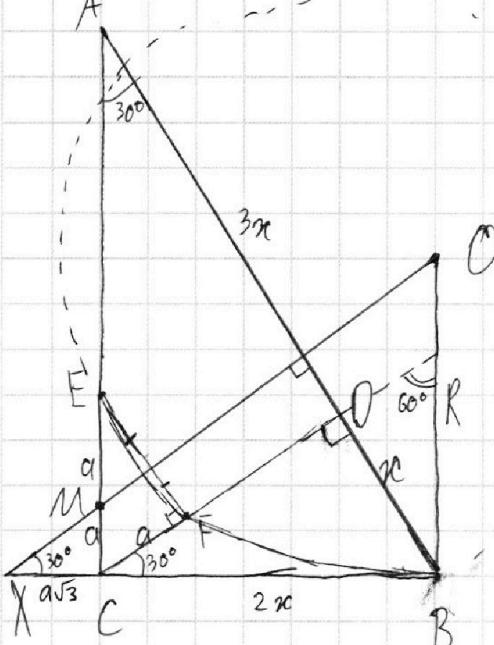
- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 пусть $BD = x$

и $CF = a$



б) из \triangle -ке $CD = BD \cdot AD = 3x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ = \angle CEF$
 $(AB \parallel EF)$

OX -сер. перпендикуляр к $EF \Rightarrow O$ -центр окружн
 где $OB \perp BC$, т.к. окружн кас BC

$CE = 2a$ $OX \parallel CF \Rightarrow M$ -середина CE , $CM = a \Rightarrow$
 $\Rightarrow CX = a\sqrt{3}$ ($\angle OXB = \angle DCB$)

$$R = \frac{a\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}} = a + \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} OE^2 &= R^2 \\ OE^2 &= (R - CE)^2 + BC^2 \end{aligned} \quad R^2 = R^2 - 4aR + 4a^2 + 4x^2$$

$$4a^2 - 4aR + 4x^2 = 0$$

$$4a^2 - 4a^2 - \frac{8ax}{\sqrt{3}} + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 = \frac{8ax}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2x\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = x\sqrt{3} \cdot 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x^2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle CFE} = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = 4 \frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \left(\frac{2x \cdot 2}{x\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

Ответ: $16/3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

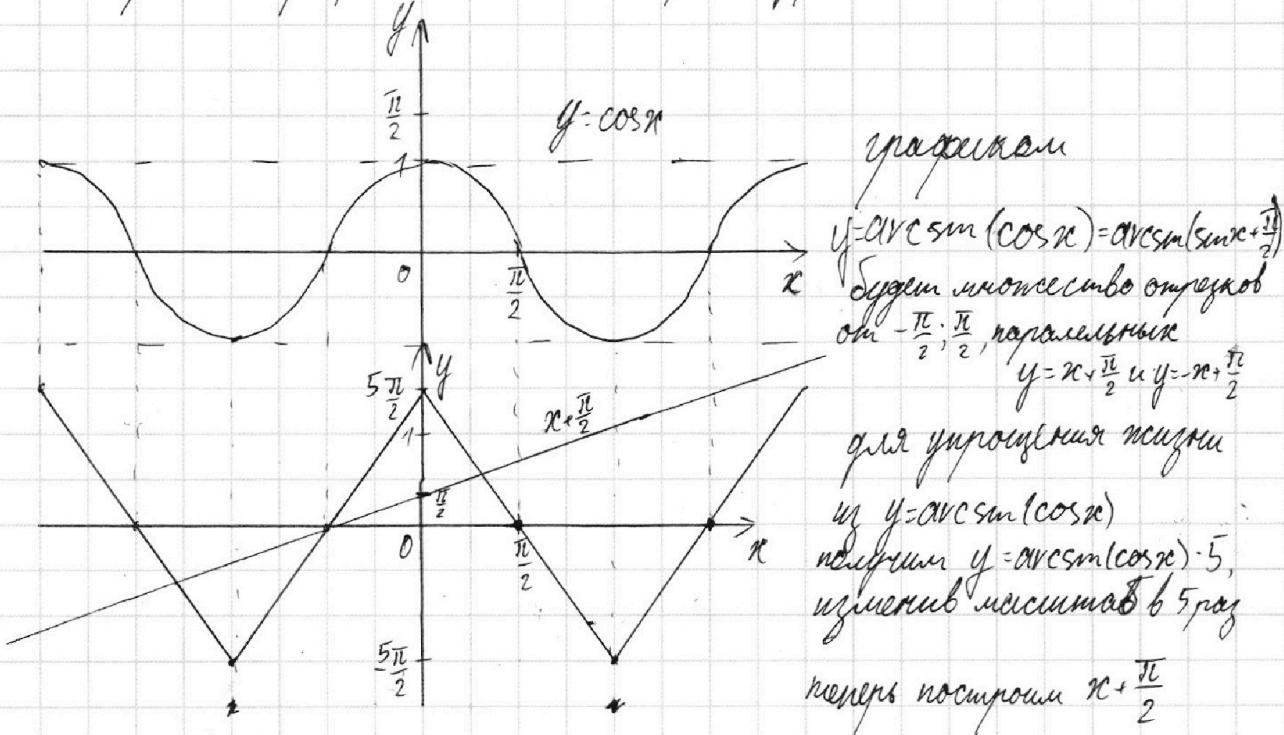
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

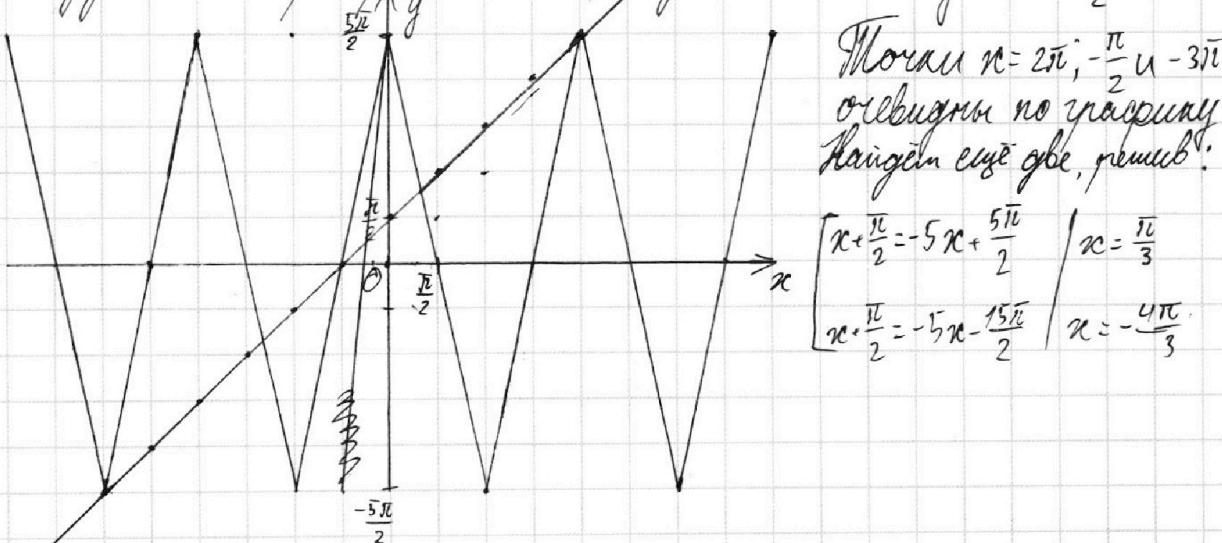
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Построим график и обеих сторон ур-ия



для удобства перегоражим, чтобы одна касалась по y другая $\frac{\pi}{2}$



Тогда $x = 2\pi, -\frac{\pi}{2}$ и -3π
отвечают по $y = \arccos x$
Найдем еще где, решив:

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = -5x + \frac{5\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{2} = -5x - \frac{15\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Ответ: $-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

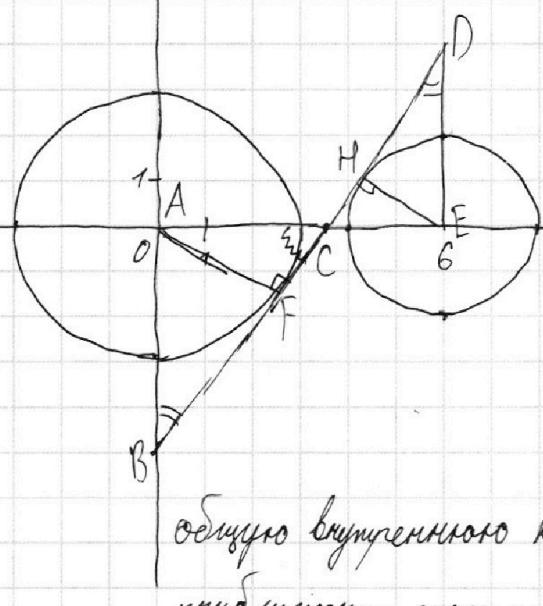
Задача 4

$\left\{ \begin{array}{l} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{array} \right.$ - множество прямых

$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$ - где окружности $x^2 + y^2 = 9$

и $(x - 6)^2 + y^2 = 4$
центр $(0; 0)$, радиус 3
центр $(6; 0)$, радиус 2

обычно крайние случаи
для пересечения прямой
и окружности - касательны



При отклонении любой
внешней касательной на некоторый
угол проблем с пересечением О
не возникает (из-за того, что
центр окружности на прямой
прямой). Но если рассмотреть
одну внутреннюю касательную, станет понятно, что при

приближении графика $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ к прямой $x = \text{const}$

переходит в окружность линии б. Найдем коэффициент
наклонности данной касательной, у которой он $-k$

BD-общ. внутр. кас.

$$\Delta ABC \sim \Delta EDC \text{ (по двум углам)}, \quad \frac{AF}{EH} = \frac{3}{2} \quad \begin{cases} AE = AC, CE \\ AC = 1,5CE \end{cases} \quad \begin{cases} CE = \frac{12}{5} \\ AE = 2,5CE \end{cases} \quad \begin{cases} AC = \frac{18}{5} \\ AE = \frac{18}{5} \end{cases}$$

$$FC = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{5} \sqrt{18^2 - 15^2} = \frac{1}{5} \sqrt{3 \cdot 33} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta FAC \text{ (по двум углам)} \Rightarrow AB = AF \cdot \frac{AC}{FC} = 3 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{5}{3} \sqrt{11} = \frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$B(0; -\frac{18}{\sqrt{11}}) \text{ и } C(\frac{18}{5}; 0)$$

$$k = \frac{18}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

при $k \in [5/\sqrt{11}; +\infty) \cup (-\infty; -5/\sqrt{11}]$ бкнайдется

$$k = -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{5}{\sqrt{11}}) \text{ чтобы б было}$$

Ответ: $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$x > 0; \pm 1, y > 0; \pm \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$f(x) = \log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g(5y) = \log_3^4(5y) - 3,5 \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

разница между двумя уравнениями только в минусе. Устраним его,

заменив $5y$ на $\frac{1}{x}$ без потери ОДЗ, т.к. $y \neq 0$

$$\text{получим: } g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4\left(\frac{1}{x}\right) - 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4\left(\frac{1}{x}\right) + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

таким образом, $f(x)$ функционально равно $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ($y = f$), можем

каждому решению $f(x)$ в пару можно поставить $\frac{1}{x}$

$$x_0 = \frac{1}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow 5y_0 = \frac{1}{t_0} = x_0, \text{ то есть } \text{в } g(5y) \text{ } 5y \text{ можно заменить на } x_0$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 7 \log_x 3 = 0$$

$$\text{если } 5y_0 = \frac{1}{x_0}, \text{ то } y_0 = \frac{1}{5x_0} \text{ и } y_0 \cdot x_0 = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\begin{array}{l} ab : 2^{9} 3^{10} 5^{10} \\ bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\ ac : 2^{14} 3^{18} 5^{30} \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} a^2 b^2 c^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53} \\ abc = 2^{21} 3^{21} 5^{27} \end{array} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}b &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\a &= 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5 \\c &= 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5\end{aligned}$$

$$b = 7^2, 3^2, 5$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

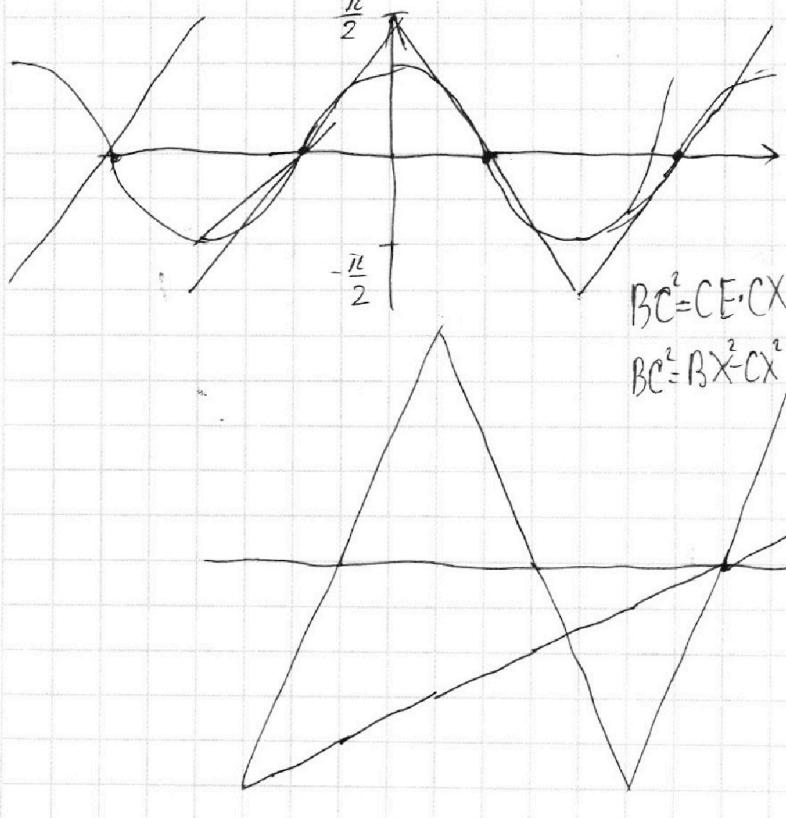
$$q = 2^7 \cdot 38 \cdot 5$$

$$C = 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^3$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = 4 \left(\frac{BC}{a}\right)^2$$

$$5 \arcsin(\cos x) = n + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$BC^2 = CE \cdot CX$$

$$BC^2 = BX^2 - CX^2$$

$$CD = 2\sqrt{3} \quad AD : DB = 3 : 1$$

$$BC = 2n$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{2x}{2\sqrt{3}x} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}}$$

$$6x = \frac{3\pi}{2} \quad 6x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad x = -\frac{4\pi}{3}$$

3

$$FB = \sqrt{x^2 + ((x\sqrt{3} - c)^2)}$$

$$FB = \sqrt{4x^2 + a^2 - 2ax \cdot c}$$

✓

\rightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4(5y) + 2\log_5 3 - \frac{11}{2} = \log_{2x} 3 = \log_{2x} 243 - 8 \quad x > 0, x \neq 1$$

$$\log_3^4 3 + 6\log_3 3 = \frac{5}{2} \log_3 3 - 8$$

$$7t + 6t = 2,5t - 8$$

$$\frac{3,5t^5 + 8t^4 + 1}{t^4} = 0$$

$$\text{на } t=0 \text{ есть } \frac{1}{t^4} = \infty$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (0; 0) \quad R = 3$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (6; 0) \quad R = 2$$

$$y = \frac{ax}{2} - \frac{3b}{2}$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_5 3 - \frac{11}{2}$$

$$\log_5 5y = \frac{1}{a}$$

$$x_0 = \frac{5}{t_0}$$

$$t_0 = \frac{5}{x_0}$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_5 3 - 8 = 0$$

$$\log_3^4(5y) - 3,5\log_5 3 + 8 = 0$$

$$k = \frac{18}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\approx$$

$$\angle CEC' = \angle CEC$$

$$\angle CEC'$$

$$\angle CEC'$$
</



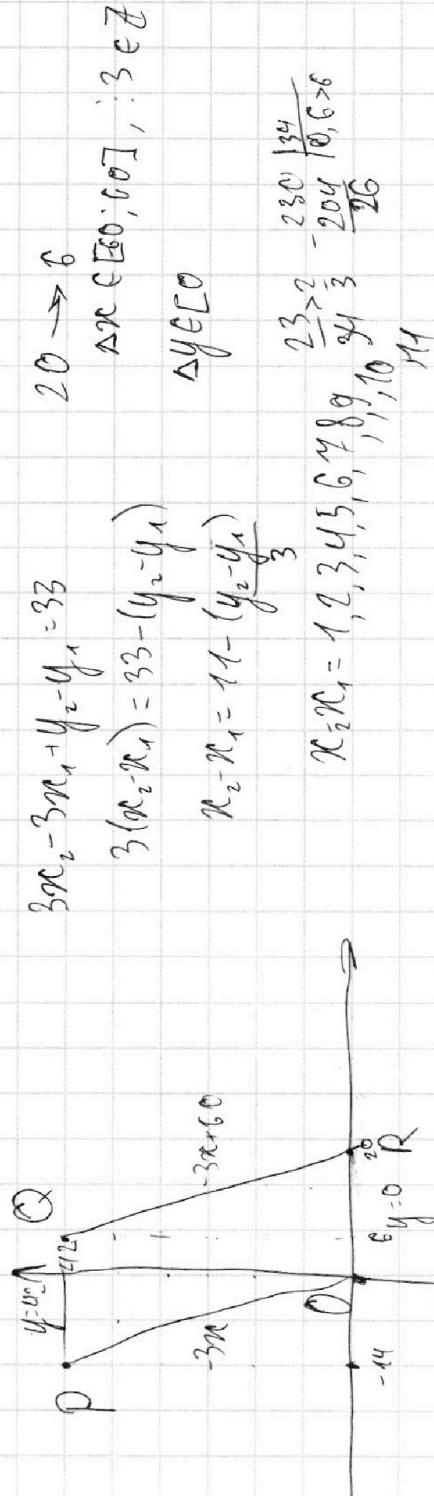
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи

решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{Ox + 2y}{\cos 30^\circ} = R = \frac{2x + 4y}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{z + \sqrt{z^2 + 3}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$S_y = R^2 - 4x^2 = \frac{4(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{3} = \frac{4}{3}(x^2 - 1)$$

$$y = \frac{R + \sqrt{D}}{2}$$

$$\frac{q^4(3-2\sqrt{3}) - 40q\sqrt{3} + 3x^2}{q^4} = 0$$

$$64\alpha^2 + 160\alpha + 44 = 16x^2 - 16x\alpha^2 - 16\alpha x(\sqrt{3}-1) + 64\alpha^2(4-2\sqrt{3})\alpha = \frac{2\alpha + 4x\alpha}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{16\alpha^2}{3}}\alpha$$

$$40x^2 + 1600x + 400 = 16x^2 - 160x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

 МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

