

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ



ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

$$\frac{13+21+25}{2} \geq 30$$

$$\|AB\|_2 = 26$$

$$\|a\|_2 + \|b\|_2 \geq 6$$

$$\|c\|_2 + \|d\|_2 \geq 14$$

$$\|a\|_2 + \|c\|_2 \geq 16$$

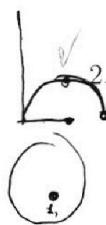
$$42$$

$$22$$

- ✓ [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{63}3^{13}5^{11}$, bc делится на $2^{14}3^{21}5^{13}$, ac делится на $2^{16}3^{25}5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

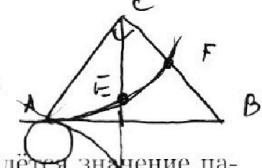
$$abc \leq \text{НОД}(ab, bc, ac) =$$

$$abc \leq 3^{15} \cdot 5^{28} \cdot 2^{16}$$



2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

$$\frac{CE \cdot EF}{AD \cdot CD} \sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$



3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$6a = 0$$

$$5x - b = 0$$

$$5x = b$$

$$x = \frac{b}{5}$$

0,9
3,9

$$x^a = y$$

$$\log_x y = a \quad \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

$$\arccos(\sin x) = (x^3) =$$

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

$$\begin{array}{c} 0,0 \\ P, 90 \\ Q, 90 \\ R, 0 \end{array}$$

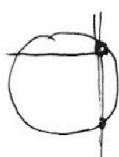
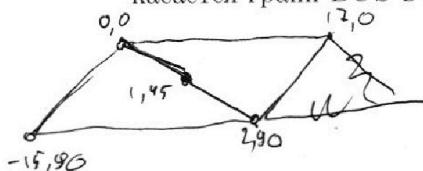
$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

7. [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n 1

$$abc \rightarrow \text{НОК}(ab, bc, ac), \text{ т.к. } \begin{cases} abc : ab \\ abc : ac \\ abc : bc \end{cases}$$

1) Обозначим за $\|x\|_p$ степень вхождения x в p .

$$2) \text{Тогда } \begin{cases} ab : 2^6 3^{13} 5^1 \\ bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac : 2^6 3^{25} 5^{28} \end{cases} \Rightarrow abc : 2^2 3^6 5^9 \cdot 5^{28}$$

$$\text{Тогда } abc : 2^2 3^6 5^9 \cdot 5^{28} \quad abc : 3^{30} \quad (\text{т.к. } \text{имеет } \|abc\|_3 \leq 29 \Rightarrow \| (abc)^2 \|_3 \leq 58)$$

$$3) \|ab\|_5 = \|a\|_5 + \|b\|_5 \geq 11$$

$$\|ac\|_5 = \|a\|_5 + \|c\|_5 \geq 28$$

$$\|bc\|_5 = \|b\|_5 + \|c\|_5 \geq 13$$

$$\text{Тогда } \|abc\|_5 \geq \|ac\|_5 = 28$$

$$\|abc\|_5 \geq 28$$

$$4) \|abc\|_2 = \frac{\cancel{\|abc\|_2} + \|a^2 b^2 c^2\|_2}{2} = \frac{\|ab\|_2 + \|bc\|_2 + \|ac\|_2}{2} \geq$$

$$\geq \frac{6 + 14 + 16}{2} = 18$$

$$\text{Тогда } abc : 2^{18}$$

5) Но $2, 3, 4$ нумерации:

$$\begin{cases} abc : 2^{18} \\ abc : 3^{30} \\ abc : 5^{28} \end{cases}$$

$$\text{Тогда } abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

(т.к. $abc \neq 0$)

ПРИМЕР:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^11$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

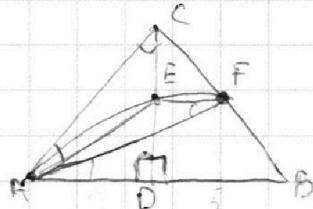
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



в 2

1) $\angle CAE = \angle EFA$ по теореме об углове между
хордой и касательной

2) $\angle EFA = \angle FAB$ как накрест лежащие при $EF \parallel AB$

3) $\triangle AED \sim \triangle ACF$

1) $\angle EAD = \angle CAF$ по ② и ①

2) $\angle ACF = \angle EDA = 90^\circ$

$\triangle AED \sim \triangle ACF$ по 2-й улье

$$\text{Тогда } \frac{AC}{AD} = \frac{CF}{DE}$$

4) $\triangle CFE \sim \triangle CBD$

1) $\angle CFE = \angle CBD$ ~~так как $CF \parallel BD$~~

2) $\angle CEF = \angle CBD$ ~~по 90°~~

как
соответствующие
при $EF \parallel BD$

Тогда $\triangle CFE \sim \triangle CBD$ по 2-й улье

$$\text{Тогда } \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = \frac{CF}{CB} = k \Rightarrow \frac{DE}{CD} = 1 - k$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$$

5) по свойству синусов: $\frac{CA}{CB}^2 = \frac{AD}{BD} = \frac{k}{1-k}$

$$6) \frac{AC}{BC} \cdot \frac{DE}{AD} = \frac{CE}{BC} = k \text{ по ④ и ③}$$

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{1}{1-k} = k \text{ по ⑤}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{CD}{AD} = K \cdot \frac{1}{(1-K)}$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{CD}{AD} = K \cdot \frac{1}{(1-K)} \text{ но } 5$$

7) по свойству высоты трап. треугольники:

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{AD} = \sqrt{\frac{BD}{AD}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$8) \quad K \cdot \frac{1}{(1-K)} = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}$$

$K^2 + (1-K)^2 = 1$
 $K = \frac{1}{2}$

$$9) \text{ тогда } \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = K = \frac{1}{2}$$

$$10) \quad \frac{S_{ACP}}{S_{ABD}} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ABD} = \left(\frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} S_{ACP} \right) \right) = \frac{5}{8} S_{ACP}$$

$$8) \frac{K}{K+1} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$9) \quad \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot CD}{\frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF} = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{CD}{CE} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BD}{FE} \cdot \frac{1}{K} =$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{K^2} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} (*) \sin 5y &= \sin 2y \cdot \cos 3y + \cos 2y \cdot \sin 3y = \\ &= 2 \cos y \cdot \sin y \cdot (4 \cos^3 y - 3 \cos y) + (\cos^2 y - \sin^2 y)(3 \sin y - 4 \sin^3 y) = \\ &= \sin y (2 \cos^2 y (4 \cos^2 y - 3) + (2 \cos^2 y - 1)(3 - 4 \sin^2 y)) = \\ &= \sin y (2(1 - \sin^2 y)(4 - 4 \sin^2 y - 3) + (1 - 2 \sin^2 y)(3 - 4 \sin^2 y)) = \\ &= \sin y (2(1 - \sin^2 y)(1 - 4 \sin^2 y) + (1 - 2 \sin^2 y)(3 - 4 \sin^2 y)) = \\ &= \sin y (2 - 10 \sin^2 y + 8 \sin^4 y + 3 - 10 \sin^2 y + 8 \sin^4 y) = \\ &= \sin y (8 \sin^4 y - 20 \sin^2 y + 5) \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) \Rightarrow \sin x = \cos y$$

$$\text{тогда } \sin x = \cos y \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 - \sin^2 y \Rightarrow \cos x = \pm \sin y$$

$$\sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot (\pm \cos y)$$

$$\sin x \cdot \sin y \neq \cos x \cdot \cos y = 0$$

$$\cos(x \pm y) = 0$$

$$x \pm y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \pm \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \frac{9\pi - 2k}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (1) \\ x - \frac{9\pi - 2k}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \quad x - \frac{x}{5} = -\frac{8\pi}{10} + \pi k \Rightarrow x = -\frac{4}{5}\pi + \pi k$$

$$\textcircled{2} \quad x + \frac{x}{5} = \frac{9}{10}\pi + \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{14}{10}\pi + \pi k = \frac{7}{5}\pi + \pi k$$

$$(1) \quad x - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \pi k = -\frac{4\pi}{10} + \pi k = -\frac{2\pi}{5} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad x + \frac{x}{5} = \frac{9}{10}\pi + \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{14}{10}\pi + \pi k = \frac{7}{5}\pi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{5} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{6}{5}x = \frac{2\pi}{5} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ответ: $\sin(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n) = \cos(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n \in \mathbb{Z})$

Проверка: $\sin(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n) = \cos(\frac{9\pi - \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi n}{10})$

$\sin(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n) = \cos(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi n)$

верно

$\sin(\frac{\pi + 5\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3})$

Ответ: $\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

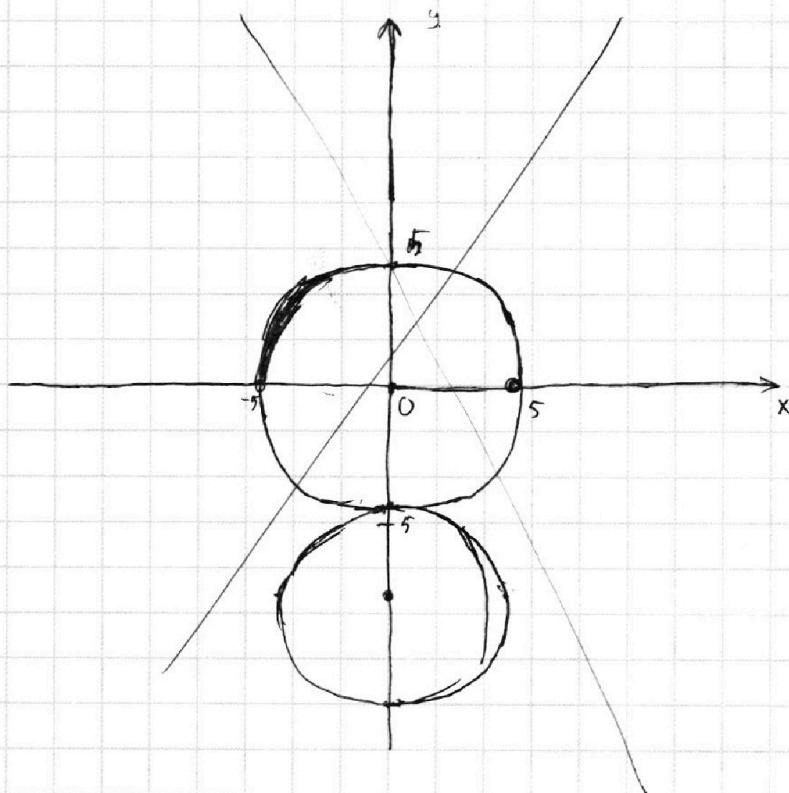
$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & \textcircled{2} \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 & \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad 6ay = -5x + 6$$

$$\begin{cases} a=0 \\ 5x=6 \\ y=-\frac{5}{6a}x+\frac{6}{6a} \end{cases} \quad x = -\frac{6}{5}a \cdot y + \frac{6}{5}$$

Решим методом графическим:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

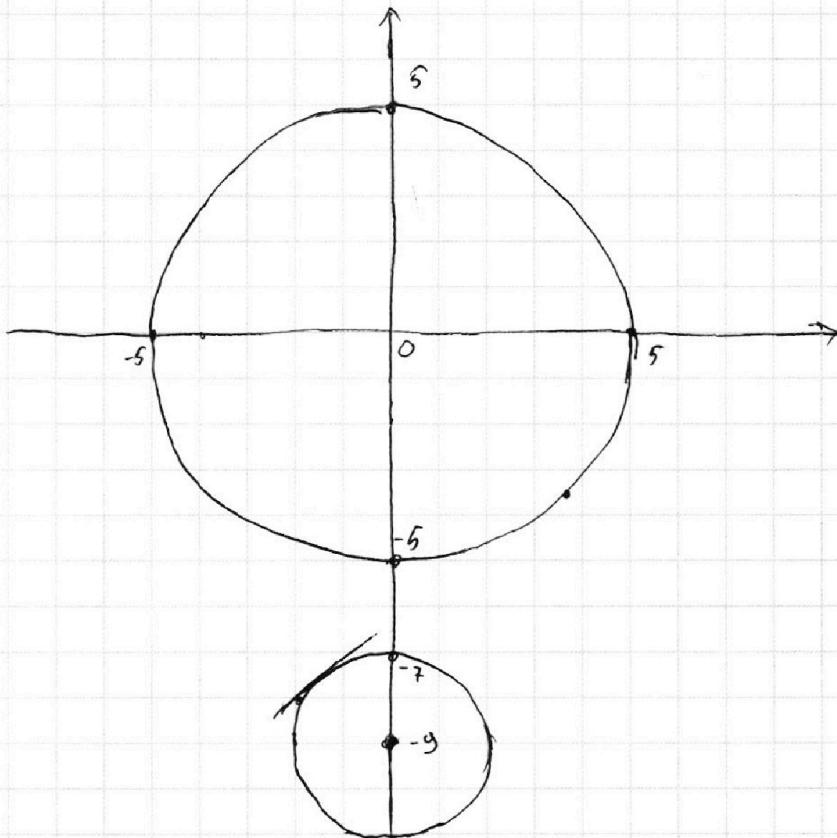
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение)



При $a=0$: тогда $B=5$ даёт 4 решения.

При $a \neq 0$: заменим $\frac{B}{a}$ макс, $\frac{B}{a}$ тка 1.

тогда $y^2 - 25 = kx + n$ имеет 2 решения

$$y^2 - 25 = (ky + n)^2 \text{ имеет 2 решения}$$

$$(y+n)^2 - 4 = (ky+n)^2 \text{ имеет 2 решения}$$

$$y^2(k^2-1) + 2nk y + n^2 + 25 = 0 \quad -\text{имеет 2 решения}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2(k^2-1) + (2nk-18)y + n^2 + 77 = 0 \quad \text{имеет 2 решения} \end{array} \right.$$

$$\frac{\Delta_1}{4} = n^2 k^2 - (n^2 + 25) \cdot (k^2 - 1) > 0$$

$$\frac{\Delta_2}{4} = (n^2 k^2 - 9)^2 - (n^2 + 77)(k^2 - 1) > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение)

$$\frac{Q_1}{4} = \lambda^2 - 25k^2 + 25 > 0$$

$$\frac{Q_2}{4} = 18\pi k + 81 - 77k^2 + 77\pi n^2 > 0$$

$$\frac{\lambda^2}{25} - 25 \cdot \frac{36\alpha^2}{25} + 25 > 0$$

$$18 \cdot \frac{6\alpha b}{25} - 77 \cdot \frac{6\alpha^2}{25} + \frac{b^2}{25} > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 - 25 \cdot 36\alpha^2 + 25 > 0 \\ - 18 \cdot 6\alpha b - 77 \cdot 6\alpha^2 + b^2 > 0 \end{array} \right. \quad \textcircled{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 - 25 \cdot 36\alpha^2 + 25 > 0 \\ - 6\alpha^2 + 18ab + 81 > 0 \end{array} \right. \quad \textcircled{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 - 25 \cdot 36\alpha^2 + 25 > 0 \\ - 6\alpha^2 + 18ab + 81 > 0 \\ - 6 \cdot (18\alpha^2 + 18ab + b^2) + 7b^2 + 6 \cdot 4\alpha^2 > 0 \\ b^2 > 25 \cdot (36\alpha^2 - 1) \\ 7b^2 + 24\alpha^2 > 6 \cdot (9\alpha + b)^2 \end{array} \right.$$

① Рассмотрим

нормальное

$\delta(\alpha) > 0$.

② явление или параллельство

$$- 72 \cdot 6\alpha^2 - 18 \cdot 6b \cdot \alpha + b^2 > 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(6 \cdot 6b \right)^2 + 4 \cdot 6 \cdot 778 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot b^2 + 4 \cdot 6 \cdot 778 =$$

$$= \left(b \cdot \sqrt{6 \cdot 4 \cdot 778 + 6^2 \cdot 6^2} \right)^2 = \left(b \cdot \sqrt{3764} \right)^2$$

$$- \frac{56 - \sqrt{3764}}{72} b < \alpha < - \frac{\sqrt{3764} b + 6 \cdot 6 \cdot b}{77 \cdot 6} \quad \text{при } b > 0$$

$$- \frac{(54 + \sqrt{3764})b}{72} < \alpha < - \frac{(54 - \sqrt{3764})b}{77 \cdot 6} \quad \text{при } b > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① Рассмотрим как устроено решение

$$(1) \quad \beta^2 + 25 \geq 25 \cdot 36 \alpha^2$$

$$\alpha \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\beta^2 + 25} \leq +\alpha, & \alpha < 0 \\ \frac{\sqrt{\beta^2 + 25}}{36} \geq \alpha, & \alpha > 0 \end{cases}$$

② Рассмотрим как выражение от β

$$\beta^2 - 18 \cdot 6 \cdot \alpha + \beta - 77 \cdot 6 \alpha^2 \geq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (6 \cdot 9)^2 \alpha^2 + 77 \cdot 6 \alpha^2 = 6 \alpha^2 (54 + 77) \geq 0$$

$$54\alpha - \sqrt{6 \cdot 131} \leq \beta \leq 54\alpha + \sqrt{6 \cdot 131}$$

$$\text{при } \alpha \geq 0: \quad \begin{cases} \sqrt{\beta^2 + 25} \geq \alpha \cdot 30 \iff \beta \geq \sqrt{900\alpha^2 - 25} \\ \beta \geq 54\alpha - \sqrt{6 \cdot 131} \cdot \alpha \\ 54\alpha + \sqrt{6 \cdot 131} \cdot \alpha \geq \beta \end{cases}$$

Все решения на β , есть

$$54\alpha + \sqrt{6 \cdot 131} \cdot \alpha \geq \sqrt{900\alpha^2 - 25}$$

$$\alpha^2 (54 + 6 \cdot \sqrt{6 \cdot 131})^2 \geq 900\alpha^2 - 25$$

что всегда возможно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если $a < 0$:

$$\begin{cases} 8^2 + 25 < 30 a^2 \\ -54|a| - \sqrt{6 \cdot 131}|a| < 8 < -54|a| + \sqrt{6 \cdot 131}|a| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8^2 + 25 < 30 a^2 \\ -54|a| - \sqrt{6 \cdot 131}|a| < 8 \\ 8 > \sqrt{6 \cdot 131}|a| + 54|a| \end{cases}$$

$$(\sqrt{6 \cdot 131}|a| + 54)^2 |a|^2 < 30 a^2$$

нет решения

Ответ: при $a \geq 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

x⁵

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + \log_{\frac{1}{2}y} (11) = \log_{(\frac{1}{2}y)^3} (11^{-13}) - 5 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + \log_{\frac{1}{2}y} (11) = \log_{(\frac{1}{2}y)^3} (11^{-13}) - 5 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1) \quad \cancel{\log_{11}^4 x + \frac{6 \log_{11} x}{\log_{11} x}} = \frac{1}{3} \log_x (11^{-2}) - 5$$

$$\cancel{\log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} (11)}} = \frac{1}{3} \log_{(\frac{1}{2}y)} (11^{-13}) - 5$$

$$\cancel{\log_{11}^4 x + \frac{6}{\log_{11} x}} = \frac{-2}{3} \log_{11} (x) - 5$$

$$\cancel{\log_{11}^5 x + (6 + \frac{2}{3})} = -5$$

$$\cancel{\log_{11}^5 x + \frac{20}{3} + 5} \log_{11} (x) = 0$$

$$(2) \quad \cancel{\log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} (11)}} = \log_{\frac{1}{2}y} (-13)$$

$$(1) \quad \cancel{\log_{11}^4 x - 6 \frac{\log_{11} x}{\log_{11} (x)}} = -\frac{2}{3} \log_{11} (x) - 5$$

$$(2) \quad \cancel{\log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} (\frac{1}{2}y)}} = -\frac{13}{3} \log_{\frac{1}{2}y} (-13) - 5$$

Тогда: $\left\{ \begin{array}{l} \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \\ \log_{11}^5 (\frac{1}{2}y) + 5 \log_{11} (\frac{1}{2}y) = -\frac{16}{3} \end{array} \right.$

тогда $\log_{11}^5 x + \log_{11}^5 (\frac{1}{2}y) + 5(\log_{11} (\frac{1}{2}x y)) = 0$

$$(\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 (\frac{1}{2}y)) \circ (\log_{11}^4 (x) - \log_{11}^3 (x) \cdot \log_{11}^3 (\frac{1}{2}y) +$$

$$+ \log_{11}^2 (x) \cdot \log_{11}^2 (\frac{1}{2}y) - \log_{11}^2 (x) \cdot \log_{11}^3 (\frac{1}{2}y) + \log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + 5) = 0$$

$$\log_{11} (\frac{1}{2}x y) \cdot (\log_{11}^4 x \log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) \log_{11}^2 (x) \cdot \log_{11}^2 (\frac{1}{2}y) - \log_{11} (x) \cdot \log_{11} (\frac{1}{2}y) (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y) + 5) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 (продолжение)

точка: $\log_{11}\left(\frac{1}{2}xy\right) = 0 \quad (2)$

$$\log_{11}(x) + \log_{11}(y) + \log^2(x) \cdot \log^2(y) - \log_{11}(x) \cdot \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) (\log^2(x) + \log^2(y))$$

$$+ \left(\log^2(x) + \log^2\left(\frac{1}{2}y\right) \right) + 5 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \quad \log^3(x) \left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right) + \log^3\left(\frac{1}{2}y\right) \left(\log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}(x) \right).$$

$$+ 5 + \log^2(x) \cdot \log^2\left(\frac{1}{2}y\right) = 0$$

$$\left(\log^3(x) - \log^3\left(\frac{1}{2}y\right) \right) \left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right) + \log^2\left(\frac{1}{2}y\right) \log^2(x)$$

$$+ \log^2(x) \cdot \log^2\left(\frac{1}{2}y\right) + 5 = 0$$

$$\left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^2 \left(\log^2(x) + \log_{11}(x) \cdot \log_{11}y + \log^2(y) \right) + 5 + \log^2(x) \cdot \log^2(y) = 0$$

$$5 > 0, \quad \log^2(x) \cdot \log^2\left(\frac{1}{2}y\right) \geq 0; \quad \log^2(x) + \log_{11}(x) \cdot \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) + \log^2\left(\frac{1}{2}y\right)$$

> 0 как неотрицательный квадрат, $\left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^2 \geq 0$

точка \Rightarrow уравнение не имеет решений

(2) $\log_{11}\left(\frac{1}{2}xy\right) = 0$

$$\frac{1}{2}xy = 1$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

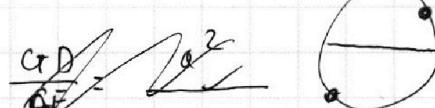
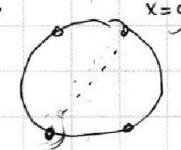
ЧЕРНОВЫК

$$x = y$$

$$x =$$

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{x}{\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{b^2 - x\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}$$



$$\frac{GE}{GD} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} \Rightarrow \frac{GD}{EG} = \frac{a^2}{x\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{DE}{GE} = \frac{a^2 + x\sqrt{a^2+b^2}}{x\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{GE}{CD} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2} \cdot b^2 - x^2(a^2+b^2)}{b^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot x \cdot \sqrt{a^2+b^2}} \stackrel{?}{=} \frac{a^4}{(a^2+b^2)(\frac{a^2}{a^2+b^2} + a^2)}$$

$$\frac{GP}{GC} = \frac{A+B^2}{CA^2} \Rightarrow \frac{GP}{CD} = \frac{AD^2}{AD^2+AC^2}$$

$$\frac{a^2}{a^2+a^2+b^2} =$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \\ &= \sin x \cdot \cos 2y + \cos y \cdot \sin 2y = \\ &= -\sin^3 y + \cos^2 \sin x + 2\cos^2 \cdot \sin x \\ &\arccos(\sin x) \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$x = y - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$3\cos x - 4\cos^3 x \sin x = \cos y$$

$$\pi - x =$$

$$x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$$

$$x = y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$$

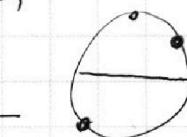
$$\pi - x = y + \frac{\pi}{2}$$

$$=\sin x$$

$$\cos \frac{x}{5}$$

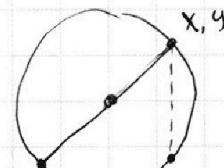
$$\sin 5x = \sin 2x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 2x$$

$$2\cos x \cdot \sin x \cdot (4\cos^3 x - 3\cos x)$$



log₁₀ x

$$\frac{GE}{CD} =$$



$$a = y$$

$$x = \sin^2 x$$

$$y = \cos x$$

$$z = \sin x$$

$$w = \cos 2x$$

$$v = \sin 2x$$

$$u = \cos 3x$$

$$t = \sin 3x$$

$$s = \cos 5x$$

$$r = \sin 5x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!