МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $ac \vdots 2^{14}$, то $abc \vdots 2^{14}$.

Т.к. $ac \vdots 3^{21}$, то $abc \vdots 3^{21}$.

Т.к. $ac \vdots 5^{39}$, то $abc \vdots 5^{39}$.

Тогда, т.к. $a, b, c \in N$, то $abc > 0$

и $abc \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$.

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot A$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot B$,

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot C$, где $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i \in Z$ и не меньше 0.
$A, B, C \in N$, но не кратны $\{2, 3, 5\}$.

Тогда, из условия:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8, & \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14, & \beta_1 + \gamma_1 \geq \cancel{20}\ 12, \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14, & \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21, & \beta_2 + \gamma_2 \geq 20, \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12, & \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39, & \beta_3 + \gamma_3 \geq 17. \end{cases}$$

$\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 3$, $\gamma_1 = 9$ — удовлетворяют ~~первой~~ системе

$\alpha_3 = 12$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_3 = 17$

$\alpha_2 = 8$, $\beta_2 = 6$, $\gamma_2 = 14$

Докажем, что $abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

Т.к. $ac \vdots 5^{39}$, то $abc \vdots 5^{39}$.

Т.к. $(\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_2 + \gamma_2) + (\beta_2 + \gamma_2) \geq 14 + 21 + 20$

$2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 55$, то

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 27{,}5$.

$abc \vdots 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$, т.к. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — целые, то

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$ и $abc \vdots 3^{28}$.

Т.к. $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \gamma_1) + (\beta_1 + \gamma_1) \geq 8 + 14 + 12$, то

$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 34$ $\quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$

$abc \vdots 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}$, значит, $abc \vdots 2^{17}$.

Значит, $abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

Тогда, $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

Равенство достигается при $\cancel{a = 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 5^8}$,
$\cancel{b = 2^3 \cdot 3^6}$ и $\cancel{c = 2^9 \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}}$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$, $b = 2^3 \cdot 3^6$, $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$

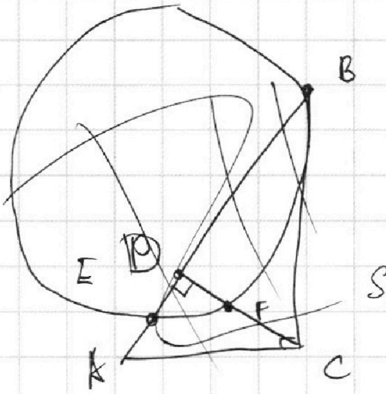
Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

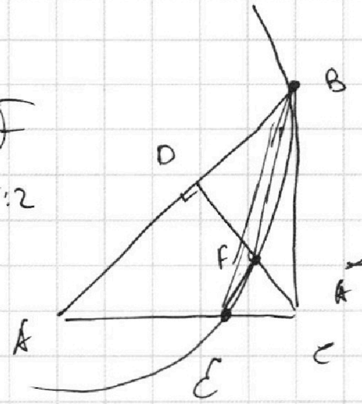


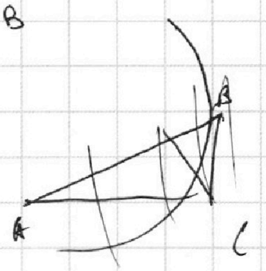
~~$AB \parallel E$~~

$AB \parallel EF$

$AD : DB = 5 : 2$

$S_{ABC} : S_{CEF}$

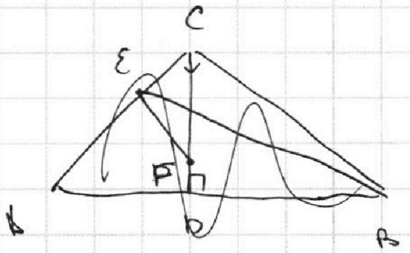


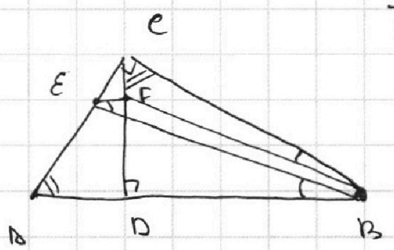


Решение.

Т.к. данная окружность является описанной около $\triangle BFE$ и BC – касательная к ней, то $\angle BEF = \angle EBC$ (оба опираются на дугу BF).

Т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle BEF = \angle ABE$ (как накрест лежащие углы при $AB \parallel EF$ и секущей BE).





Т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle CFE = \angle CDA = 90°$.

(1) Т.к. CD – высота, то $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ ($\angle CBA$ – общий, $\angle CDB = \angle ACB = 90°$). Значит, $\angle DCB = \angle CAB$

(2) Т.к. $\angle CBF = \angle EBA$, ~~$\triangle CDB \sim \triangle ACB$, то~~ $\angle DCB = \angle CAB$, то $\triangle CFB \sim \triangle AEB$

Тогда, из (2) $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CB}$, из (1) $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB}$.

Значит, $\frac{AE}{CF} = \frac{AC}{CD} = \frac{AE+EC}{CF+FD}$.

$AE(CF + FD) = (AE+EC)\,CF$

$AE \cdot FD = EC \cdot CF \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{FD}{CF}$.

Т.к. $EF \parallel AD$, то $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ ($\angle ACD$ общий, $\angle EFC = \angle ADC = 90°$). Тогда, $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$. (3)

$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CF}$ $\qquad$ $\frac{AC}{CE} = \frac{AE+EC}{CE} = \frac{AE}{EC} + 1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{CD}{CF} = \frac{CF+FD}{CF} = \frac{FD}{CF} + 1.$

Значит, $\frac{FD}{CF} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

$\frac{FD}{CF} = \frac{AE}{EC}$

Т.к. $\frac{FD}{CF} = \frac{AE}{EC}$ и $\frac{FD}{CF} = \frac{EC}{AE}$ (из (3)),

то $\frac{AE}{EC} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow AE = EC.$

Значит, $FD = CF$. Т.к. E и F - середины AC и CD соответственно.

Тогда, $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ACD}$ (EF - средняя линия $\triangle ACD$).

Т.к. $AD : DB = 5 : 2$, то $DB = \frac{2}{5} AD$

$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{CDB} = \frac{1}{2} CD(AD + DB) =$

$= \frac{1}{2} CD \cdot AD(1 + \frac{2}{5}) = \frac{7}{10} CD \cdot AD.$

$S_{ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD.$

$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ADC} = \frac{1}{8} CD \cdot AD.$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{7}{10} CD \cdot AD}{\frac{1}{8} CD \cdot AD} = \frac{7 \cdot 8}{10} = 5,6.$

Ответ: $S_{ABC} : S_{CEF} = 56 : 10$

или же $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 5,6.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\cos x$ имеет период 2π $\quad \cos 0 = 1$.
$\cos 2\pi = 1$.

~~Найдем решения на~~ $\cancel{\cos(y+\frac{\pi}{2}) = \cos y \cos\frac{\pi}{2} - \sin y \sin\frac{\pi}{2}}$

Тогда $f(x) = 10 \arcsin(\cos x)$ — периодична с периодом 2π.

$g(x) = \pi - 2x$ — строго убывающая функция

$\arcsin y$ — дает ~~значе~~ значения из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Поэтому, ~~также~~ $f(x)$ принимает значения только из отрезка $[-5\pi; 5\pi]$.

$g(x) = \pi - 2x$ принимает значения $[-5\pi; 5\pi]$ только при $x \in [-2\pi; 3\pi]$.

Значит, решения $f(x) = g(x)$ ~~есть~~ могут быть только на $[-2\pi; 3\pi]$.

$\cancel{y = \frac{\pi}{2} + x}$ Сделаем замену переменной
~~пусть~~ $x = -y + \frac{\pi}{2}$.

Тогда, $\pi - 2x = 2y$, $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y$,

$10 \arcsin(\sin y) = 2y$.

$\arcsin(\sin y) = y - \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. ч. $y - \pi n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$10 \arcsin(\sin y) = 10y - 10\pi n = 2y$

$8y = 10\pi n$ $\quad y = \frac{10\pi n}{8}$

Т.к. $10 \arcsin(\sin y) \in [-5\pi; 5\pi]$, то решение следует искать ~~на~~ при $2y \in [-5\pi; 5\pi]$, т.е. $y \in [-2{,}5\pi; 2{,}5\pi]$.

Тогда, $\frac{5\pi n}{4} \in [-2{,}5\pi; 2{,}5\pi]$ $\quad n \in [-2; 2]$.

Рассмотрим все $n \in [-2; 2]$.

$n = -2$, $\quad y = -2{,}5\pi$, $\quad \sin(-2{,}5\pi) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

$10 \arcsin(-1) = \cancel{}-5\pi$ $\quad 2y = -5\pi$. $\quad n = -2$ ~~—~~ решение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$n=-1$. $y=-\frac{5}{4}\pi$. $\sin y=+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$10\arcsin\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=10\cdot\left(+\frac{\pi}{4}\right)=+2{,}5\pi$.

$2y=-2{,}5\pi$.

Значит, $n=-1$ не решение.

$n=0$.

$y=0$ $2y=0$ $\sin(y)=0$

$10\arcsin(0)=10\cdot 0=0$

$n=0$ — решение

$n=1$.

$y=\frac{5}{4}\pi$ $2y=2{,}5\pi$ $\sin y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$10\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{10\pi}{4}=-2{,}5\pi$.

$n=1$ — не решение

$n=2$. $y=2{,}5\pi$ $2y=5\pi$. $\sin y=1$

$10\arcsin 1=10\cdot\frac{\pi}{2}=5\pi$.

$n=2$ — решение.

$n=\{-2;0;2\}$ — решения

$y=\{-2{,}5\pi;\ 0;\ 2{,}5\pi\}$.

$x=-y+\frac{\pi}{2}$ $x=\{-2\pi;\frac{\pi}{2};3\pi\}$.

Ответ: $x\in\{-2\pi;\frac{\pi}{2};3\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

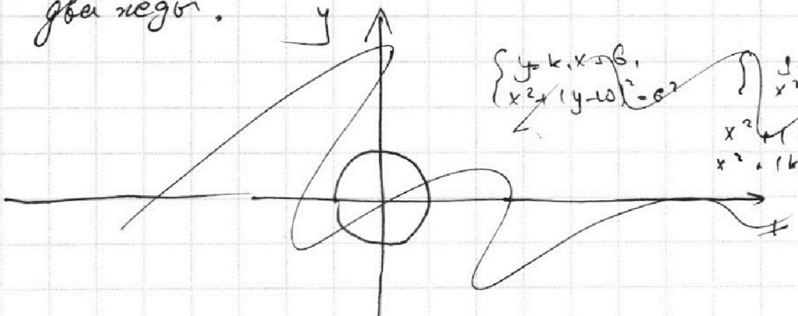
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 84) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 - 100 + 64 = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$ax - 3y + 4b$ — уравнение прямой

ω_1 : $x^2 + y^2 = 1$
ω_2 : $x^2 + (y-10)^2 = 36$ — уравнение окружностей ω_1 и ω_2

~~Ст~~ Решениями системы являются точки пересечение прямой с окружностями.
Прямая имеет не более двух точек пересечения с окружностью.
Т.к. решений должно быть 4, то прямая пересекает каждую окружность дважды.



$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = Ax + B \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$x^2 + (Ax + B - 10)^2 = 6^2$

$x^2 + (k_1 x + b_1 - 10)^2 = 6^2$

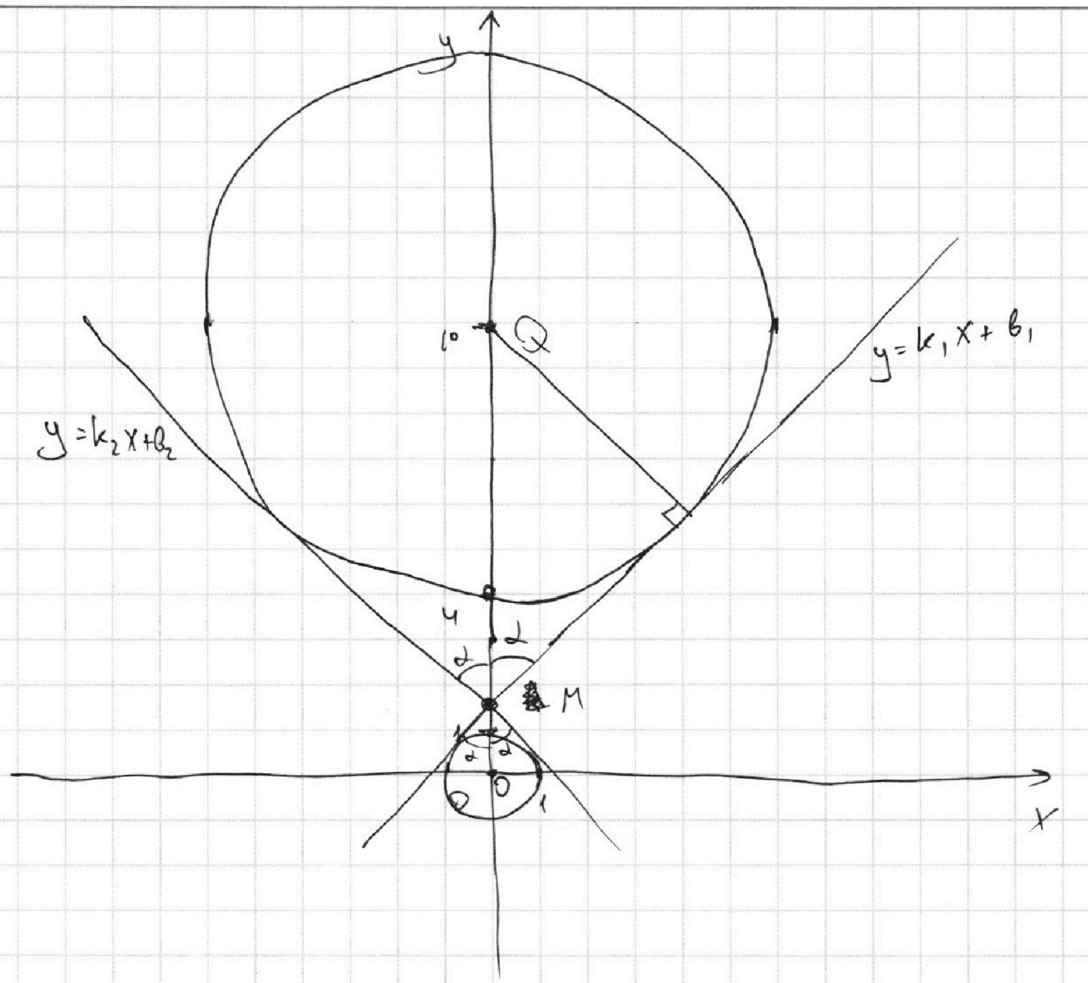
Т.к. центр 1 окружности — $O(0;0)$ и её радиус $r = 1$, а центр второй $Q(0;10)$, а её радиус — $R = 6$, то окружности не пересекаются ($OQ = 10$, $r + R = 7$).

$ax - 3y + 4b = 0$, $3y = ax + 4b$
$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. прямая задается как $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$, то a — определяет наклон, а b — точку пересечения с Oy. Заменим $\frac{a}{3}$ на A, $\frac{4}{3}b$ на B.
Значит, нужно найти такие A, что из множества прямых параллельных $y=Ax$ хотя бы одна пересекает обе окружности.
Докажем, что ~~этот~~ нужные нам A задают прямые ~~находящиеся~~ и имеющие наклон больший, чем у внутренней общей касательной с положительным наклоном и наклон меньший, чем у внутренней общей касательной с отрицательным коэффициентом.

($\left[\begin{array}{l} A>k_1 \\ A<k_2 \end{array}\right.$, где $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ касательные).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Если $0 \le A \le k$, то т.к. $y = k_1 x + b_1$ – общая внутренняя касательная, то при $B \le b_1$ $y = Ax + B$ ~~или~~ не пересекает ω_2 или касается ω_2. А значит, такие прямые не дадут 4 решения (пересечений уже не больше 3).

(В отсутствии двух пересечений можно убедиться так, что α (отмечен на рисунке) ~~уменьшается~~ при ~~отдалении точки~~ M от – угол между Oy и касательной из M уменьшается при движении точки M вниз по Oy ($\sin\alpha = \frac{R}{QM}$; QM – растет, значит и α – уменьшается)), а чем меньше α тем больший угол наклона у касательной из M. Тогда, $y = Ax + B$ не может быть касательной при $B < B_1$, как и пересекать ω_2 в двух точках (наклон секущей не меньше касательной), а при $B = b_1$, $y = Ax + B$ ~~не был~~ также не может быть секущей, значит, $y = Ax + B$ при $0 < A \le k_1$, $B \le b_1$ имеет с ω_2 не более одной общей точки).

С другой стороны при $B > b_1$ $y = Ax + B$ имеет не более одной общей точки с ω_1 (ситуация аналогичная с ω_2) ~~просто Oy~~

Значит, A должно быть ~~не меньше~~ ~~k_1~~ больше k.

При $k_2 < A \le 0$ всё тоже самое т.к. ситуация симметрична зеркально относительно Oy для случая $0 < A \le k$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, $A < k_2$.

При этом $y = Ax + b_1$ ~~и $y = Ax + b_2$~~ при $A > k_1$ будет секущей для обеих окружностей по тем же причинам, что и имеет не более одной общей точки если $0 \le A \le k_1$.

Аналогично $y = Ax + b_2$ при $A < k_2$ тоже секущая к обеим окружностям.

Осталось найти k_1 и k_2.

Из геометрии ~~дела~~ заметим, что обе касательные пересекутся на OQ, т.е. на Oy. ~~При этом~~

~~$\sin\alpha = \frac{R}{10-b_1}$, $\sin(90-\alpha) = \frac{r}{b_1-0}$ т.к. касательные~~

~~При этом~~

$\sin\alpha = \frac{R}{10-b_1}$, $\sin\alpha = \frac{r}{b_1-0}$ т.к. касательные перпендикулярны радиусам, M имеет координаты $(0;b_1)$.

$\frac{R}{10-b_1} = \frac{r}{b_1}$ $\qquad \frac{6}{10-b} = \frac{1}{b}$ $\qquad 6b = 10-b$
$7b = 10$

$b = \frac{10}{7}$. $\qquad \sin\alpha = \frac{1}{\frac{10}{7}} = \frac{7}{10}$.

$k_1 = tg(90°-\alpha) = \frac{\sin(90°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)} =$

$= \frac{\sin 90° \cos\alpha - \cos 90° \sin\alpha}{\cos 90° \cos\alpha + \sin 90° \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Т.к. α — острый, то $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{7^2}{10^2}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$k_1 = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$.

$k_2 = -k_1$ из симметрии.

Значит, $\left[\begin{array}{l} A > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ A < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$.

$\left[\begin{array}{l} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

из данных равенств ясно, что

$2x > 0$, $y > 0$ т.е. $x > 0$ и $y > 0$.

$625 = 5^4$ $\log_{8x^3}625 = \frac{4}{3}\frac{1}{\log_5 2x}$ $\log_{y^3}0{,}2 = \frac{1}{3}\frac{1}{\log_{5^{-1}}y}$

$\log_5^4(2x) - 3\cdot\frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\frac{1}{\log_5 2x} - 3$

$\log_5^4 y + 4\cdot\frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\log_5 y} - 3$

$\frac{\log_5^5 2x - 3 - \frac{4}{3} + 3\log_5 2x}{\log_5 2x} = 0$

$\frac{\log_5^5 y + 4 + \frac{1}{3} + 3\log_5 y}{\log_5 y} = 0$

$\log_5^5 2x + 3\log_5 2x - \frac{13}{3} = 0$

$\log_5^5 y + 3\log_5 y + \frac{13}{3} = 0$

Значит, $\log_5^5 2x + 3\log_5 2x = -\log_5^5 y + 3\log_5 y$.

$\log_5 y = B$, $\log_5 2x = A$

$A^5 + 3A = -(B^5 + 3B)$

$A^5 + 3A$ – строго возрастающая

$-B^5 - 3B$ – строго убывающая.

Значит, решение не больше одного.

$A = -B$ – решение.

Значит, $\log_5 2x = -\log_5 y$.

$\log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy = 0$

$2xy = 1$

$xy = \frac{1}{2}$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
					x	

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O(0;0) \to (O(0;0)$
$P(-16;80) \to (-80;80)$
$Q(2;80) \to (10;80)$
$R(18;0) \to (90;80)$

Точка $M(x;y)$ внутри параллелограмма будет ~~принадлежать~~ иметь целые координаты в изначальной системе если $x \vdots 5$, а $y \in \mathbb{Z}$.

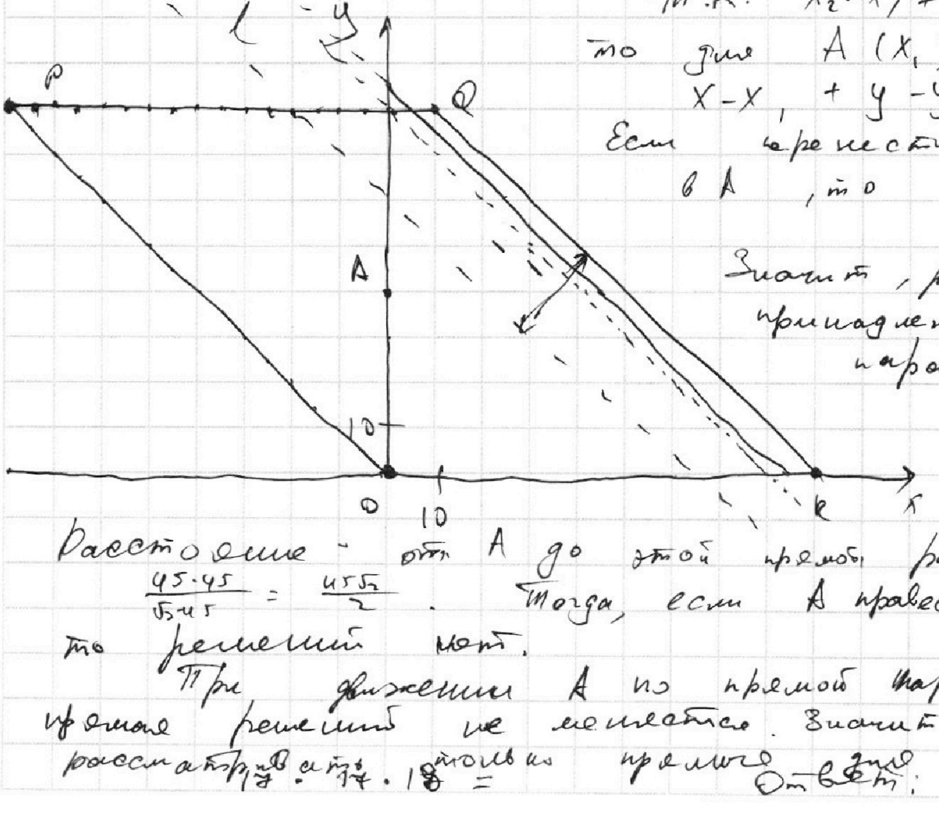
Тогда условие $5x_2+y_2-5x_1-y_1=45$ превращается в $x_2+y_2-x_1-y_1=45$.

Т.о. для точки A в новом параллелограмме нужно найти кол-во точек B таких что сумма координат B на 45 больше суммы координат A и $x_2 \vdots 5$, $y_2 \in \mathbb{Z}$.

Т.к. $x_1 \vdots 5$, $x_2 \vdots 5$, то $y_2-y_1 \vdots 5$ (т.к. $45 \vdots 5$).

Т.к. $x_2-x_1+y_2-y_1=45$, то для $A(x_1;y_1)$
$x-x_1+y-y_1=45$

Если перенести начало $(0;0)$ в A, то $x+y=45$
$y=45-x$



Значит, решения принадлежат прямым параллельным $y=45-x$, а эти прямые параллельны QR и PO.

Расстояние от A до этой прямой равно $\frac{45 \cdot 45}{\sqrt{5 \cdot 45}} = \frac{45\sqrt{2}}{2}$. Тогда, если A правее l, где $\rho(l;QR)$ ~~где~~ $\frac{45\sqrt{2}}{2}$ ~~...~~ $<25\sqrt{2}$
то решений нет.

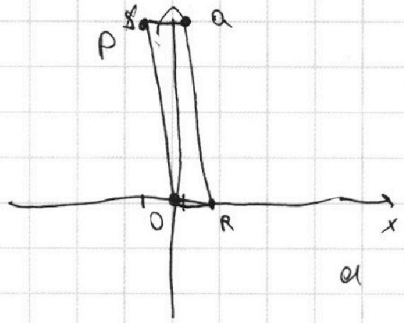
При движении A по прямой параллельной QR, кол-во решений не меняется. Значит, можно рассматривать только прямую для точки A ~~17~~ $17 \cdot 18 =$

Ответ: ~~...~~ $17^2 \cdot 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что прямая QR задается уравнением $y=-5x+90$.

Прямая PO: $y=-5x$

а OR и PQ параллельны Ox.

Т.к. $5x_2+y_2-5x_1-y_1=45$

Посмотрим какое максимальное значение принимает $5x_2+y_2$ при $(x_2;y_2)$ внутри параллелограмма.

Внутри параллелограмма y_2 — неотрицательно.

Т.к. точки $(x_2;y_2)$ внутри PQRO, то $(x_2;y_2)$ ~~слевой~~ с левой стороны от QR. Т.е. при некотором y_2,

$y_2=-5x+90$, $x\ge x_2$

$x=\frac{y_2-90}{-5}=18-\frac{y_2}{5}$.

$x_2\le 18-\frac{y_2}{5}$.

Тогда, $5x_2+y_2\le 5\left(18-\frac{y_2}{5}\right)+y_2=90$.

y_2 не больше 80 т.к. PQ ~~выше~~ не ниже $(x_2;y_2)$, а PQ задается как $y=80$.

~~Тогда, $x_2+y_2\le 18+\frac{4\cdot 80}{5}=18+4\cdot 16$~~

Т.к. $(x_2;y_2)$ справа от PO, то при некотором y_2

$y_2=-5x$, $x\le x_2$

$x_2\ge -\frac{y_2}{5}$

Значит, наши точки задаются системой $\begin{cases}0\le y_2\le 80\\ -\frac{y_2}{5}\le x_2\le 18-\frac{y_2}{5}\end{cases}$

~~Для точки $A(x_1;y_1)$ нужно~~

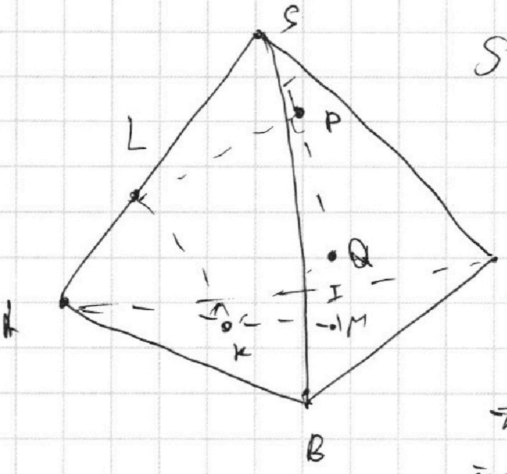
Растянем наш параллелограмм в 5 раз по оси x.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$SP = MQ$ $\quad SA = 16$

$S_{ABC} = 100$ $\quad BC = 16$

Точки L, P, Q, K лежат в одной плоскости, которая задается прямыми AM и SA.

Т.к. эти четыре точки лежат в одной плоскости на одной сфере, то L, P, Q, K — лежат на одной окружности.

Т.к. сфера касалась AM и SA (AM часть (ABC) ~~плоско~~ и точка касания $K \in AM$), то окружность тоже касается AS в L и AM в K.

Тогда степень точки M равна MK^2 и $MQ \cdot MP = MQ \cdot (MQ + QP)$ т.к. MP — секущая окружности.

Степень точки S равна SL^2 и $SP \cdot SQ = SP(SP + PQ)$.

Т.к. $SP = MQ$, то $MQ(MQ + QP) = SP(SP + QP)$.

Значит, степени точек M и S относительно окружности равны.

Значит, $MK^2 = SL^2$ $\quad MK = SL$.

Также можем посчитать степень точки A относительно этой окружности. Она равна AL^2 и AK^2 (L и K — точки касания). Значит $AL = AK$.

Тогда, $AK + KM = AL + LS = AS$.

Значит $AM = SA = BC = 16$.

Т.к. M делит AA_1 в отношении $2:1$, то $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$.

$S_{ABC} = AA_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\angle AA_1B) = 24 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \sin\alpha = 100$

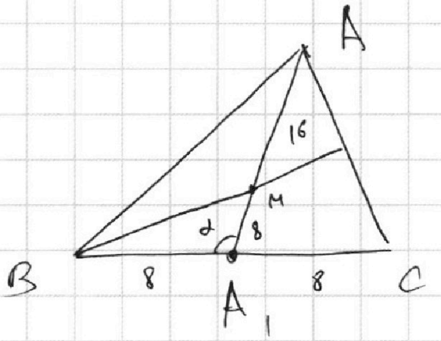
$24 \cdot 8 \cdot \sin\alpha = 100$ $\quad \sin\alpha = \frac{100}{192}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~~S_{BMC}~~

Заметим, что $MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8$.

$BA_1 = A_1C = \frac{1}{2} BC = 8$.

Значит, MA_1 — медиана равная половине стороны к которой проведена. Значит, $\triangle BMC$ — прямоугольный.

Т.к. $\sin\alpha = \frac{100}{192}$, то $\frac{100}{192} = \frac{50}{96} = \frac{25}{48}$

$\sin(\angle MBA_1) = \sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})$ $\triangle BA_1M$ равнобедренный ($MA_1 = BA_1$).

$24 \cdot 15 = 120 + 24 = 360$

$(50-2)^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$

$2304 - 625 = 1679$

~~По теореме~~

Т.к. $\sin\alpha = \frac{100}{192}$, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{100\cdot 100}{192\cdot 192}} =$

$= \pm\sqrt{\frac{2304}{2304} - \frac{625}{2304}} = \pm\frac{\sqrt{1679}}{48}$

По теореме косинусов для $\triangle BMA_1$ и $\triangle A_1CM$ найдём BM и MC. (Без ограничения общности будем считать, что $\angle BA_1M < \angle MA_1C$).

$BM^2 = 8^2 + 8^2 - 2\cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{1679}}{48} =$

$= 128\left(1 - \frac{\sqrt{1679}}{48}\right)$

$CM^2 = 128\left(1 + \frac{\sqrt{1679}}{48}\right)$

$CC_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{3}{2}\sqrt{CM^2}$

$BB_1 = \frac{3}{2}\sqrt{BM^2}$

$CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9}{4}\cdot\sqrt{128\cdot 128\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{1679}}{48}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{1679}}{48}\right)} =$

$= \frac{9}{4}\cdot 128\cdot\sqrt{1 - \frac{1679}{48^2}} = 9\cdot 32\cdot\sqrt{\frac{625}{48^2}} = 9\cdot 32\cdot\frac{25}{48} =$

$= 6\cdot 25 = 150$

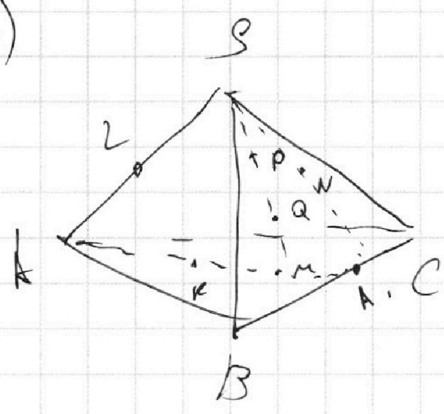
$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 24\cdot 150 = 3600$

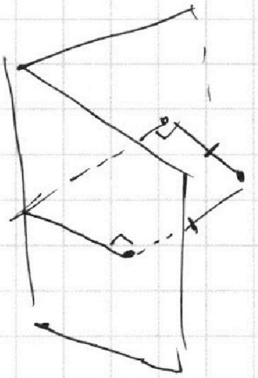
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

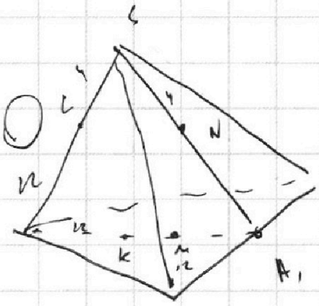
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б)







~~Т.к. Ω касается пирамиды в точках L, N, K~~

Т.к. L, N, K принадлежат Ω и ~~любые три точки лежат~~ в одной плоскости

~~Т.к. Ω касается (SBC) в точке N, Ω касается AS в точке L, то степень точки S относительно Ω равна SL^2 и SN^2. Значит, $SL = SN = 4$.~~

В пункте (а) мы получили, что $AL = AK$, $SL = KM$, $AS = AM$ значит, $\frac{AL}{AS} = \frac{AK}{AM} = \frac{AK}{AS}$

Тогда, $LK \parallel SM$.

Рассмотрим плоскость, которую задают прямые SM и SN (они не совпадают).

Т.к. $SM \parallel LK$ и $SM \cap SN = S$, то SM лежит в этой плоскости. Тогда, точки L, K, P, Q, N лежат в одной плоскости. А т.к. все эти точки принадлежат сфере и одной плоскости, то они все на одной окружности.

При этом SN касается этой окружности в N.

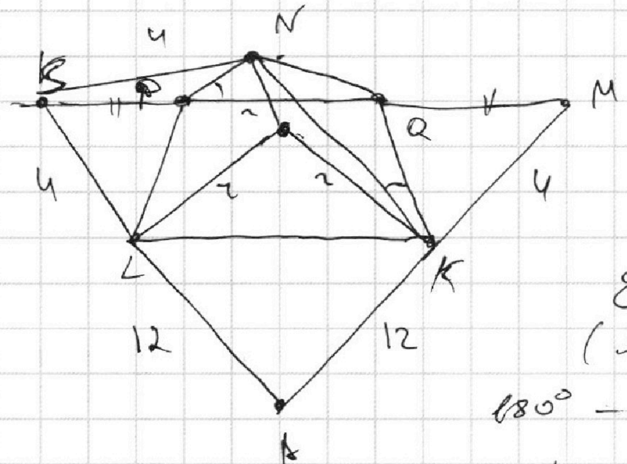
Степень точки S относительно этой окружности равна SL^2 и SN^2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $SN = SL = 4$.



Теперь, если мы найдем NK, то из $\triangle KON$, где O – центр сферы найдем $\angle KON$, а именно угол двугранного угла между (SBC) и (ABC) равен $180^\circ - \angle KON$.

Т.к. $SN \subset (ASM)$, то $AM \cap BC = SN \cap BC$, т.к. (ASM) пересекает BC в одной точке. Тогда, SN – медиана в $\triangle SBC$, ведь SN проходит через A_1.

Для точки A_1 степень относительно той же окружности равна A_1N^2 и A_1K^2, т.е. $A_1N = A_1K = AA_1 - AK = 24 - 12 = 12$.

Тогда, $SA_1 : NA_1 = SL : AL = 4 : 12$ ($AL = SA - SL = 16 - 4 = 12$).

Тогда, $LN \parallel AA_1$.

$AA_1 = 24$, $SA = 16$, $SA_1 = 12 + 4 = 16$.

$\triangle SAA_1$ – равнобедренный

То $\cos(\angle SA_1K) = \frac{A_1K}{SA_1} = \frac{12}{16}$ (т.к. $AK = 12$, $KA_1 = 12$, то SK – медиана, а значит, высота).

По теореме косинусов для $\triangle KA_1N$:

$KN^2 = NA_1^2 + A_1K^2 - 2A_1K \cdot NA_1 \cdot \cos(\angle SA_1K) =$
$= 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{12}{16} = 144 \cdot 2\left(1 - \frac{12}{16}\right) = \frac{4}{16} \cdot 2 \cdot 144 =$
$= 72$. $KN = \sqrt{72} = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Т.к. в $\triangle KON$ OK и ON – радиусы, то $KO = ON = 5$. По теореме косинусов.

$KN^2 = OK^2 + ON^2 - 2OK \cdot ON \cdot \cos(\angle KON) =$
$= 2 \cdot 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos(\angle KON) = 6\sqrt{2}$

$50(1 - \cos(\angle KON)) = 6\sqrt{2}$ $\quad 1 - \cos(\angle KON) = \frac{3\sqrt{2}}{25}$

$\cos(\angle KON) = \frac{25 - 3\sqrt{2}}{25}$. Ответ: а) 3800; б) $180^\circ - \arccos\left(\frac{25 - 3\sqrt{2}}{25}\right)$.