



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$$

min abc - ?

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Чтобы минимизировать abc нужно ее представить  
в виде произведения  $2^n \cdot 3^k \cdot 5^z$ ,  $n, k, z \in \mathbb{N}$  и минимально  
возможные.

$$! 5^z$$

$$ac: 5^{30} \Rightarrow abc: 5^{30} \Rightarrow z \geq 30$$

Заметим, что  $a = 5^{15}$ ,  $c = 5^{15}$ ,  $b = 5^0$  если  
степень 5 входящей в  $a = 15$ , в  $c = 15$ , в  $b = 0$ ,  
относительно кратности  $5$  выполняются,  $z = 30$  ( $z \geq 30$ )

$$\Rightarrow z = 30 \text{ (min возможный)}$$

$$! 3^k$$

$x$  - степень 3 входящей в  $a$ ;  $y$  - в  $b$ ,  $z$  - в  $c$

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ y + z \geq 13 \\ x + z \geq 18 \end{cases}$$

$$2x + 2y + 2z \geq 10 + 13 + 18$$

$$x + y + z \geq 20,5$$

$$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y + z \geq 21$$

$$k = x + y + z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пример для  $k=21$

$$x=7 \quad y=3 \quad z=11 \quad \Rightarrow k=21 \text{ (min возможный)}$$

при этих  $x, y, z$  кратности относительно 3 выполняются  
 $! 2^n$

$x$  - степень входящие 2 в  $a$ ,  $y$  - в  $b$ ,  $z$  - в  $c$

$$\begin{cases} x+y \geq 9 \\ y+z \geq 14 \\ x+z \geq 19 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2y+2z \geq 42 \\ x+y+z \geq 21 \end{cases}$$

$$n = x+y+z$$

пример для  $n=21$

$$x=7 \quad y=2 \quad z=12$$

при этих  $x, y, z$  кратности относительно 2 выполняются

$$\Rightarrow n=21 \text{ (min возможный)}$$

$$\text{min значение } abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

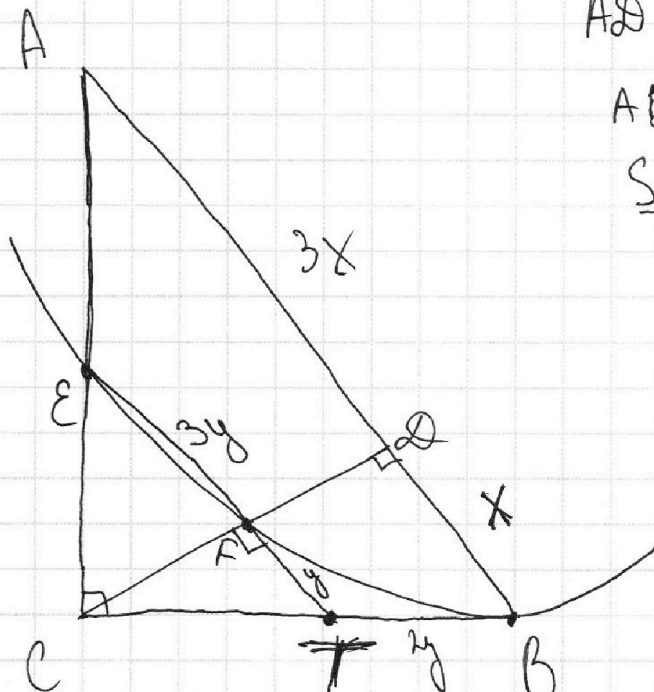
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD : DB = 3 : 1$$

$$AB \parallel EF$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$

пусть  $AD = 3x \Rightarrow DB = x$

$$K = EF \cap CD$$

$$ET \parallel AB \Rightarrow \triangle CTE \sim \triangle CBA$$

$$K - \text{коэф. подобия} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow FT = y; FE = 3y \text{ (высота делит в том же отношении)}$$

CD - высота из прямого  $\angle$  треугольника CBA

$$\Rightarrow CD = \sqrt{DB \cdot DA} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$$

TB - кас. к  $\omega$ ; TE - секущая

$$\Rightarrow TB^2 = y \cdot 4y^2 = 4y^3$$

$$\Rightarrow TB = 2y, y > 0$$

~~$$\frac{1}{2} \cdot 3y \cdot \sqrt{3} \cdot 3y$$~~  
~~$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot \sqrt{3} \cdot 3y$$~~  
~~$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot \sqrt{3} \cdot 4y + \frac{1}{2} \cdot (y+1) \cdot \sqrt{3} \cdot (y+1)$$~~  
~~$$= \frac{3y^2}{4y^2 + 4(y+1)^2}$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta CFT \sim \Delta CDB$$

$$\frac{2y + CT}{CT} = \frac{x}{y}$$

$$1 + \frac{2y}{CT} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{2y}{CT} = \frac{x-y}{y}$$

$$CT = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$CB = \frac{y \cdot CT}{x-y} + 2y = \frac{2y^2 + 2xy - 2y^2}{x-y} = \frac{2xy}{x-y}$$

Th Тюрингера для  $\Delta CDB$

$$3x^2 + x^2 = \frac{4x^2y^2}{(x-y)^2}$$

$$4x^2 = \frac{4x^2y^2}{(x-y)^2} \Rightarrow (x-y)^2 = y^2$$

$$x > y \Rightarrow x - y = y \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta CFT} = \frac{1}{4} S_{\Delta ACB}$$

$$\frac{S_{\Delta CFE}}{S_{\Delta CFT}} = \frac{3y}{y} \text{ (общая высота)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CFE} = \frac{3}{4} S_{\Delta CFT}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CFE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S_{\Delta ACB} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ACB}}{S_{\Delta CFE}} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \operatorname{arcsin}(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsin}(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsin}(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$2 \sin(\frac{2}{5}(x + \frac{\pi}{2})) \cos(\frac{3}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sin(\frac{2}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\frac{2}{5}(x + \frac{\pi}{2}) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\frac{3}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\frac{3}{5}(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 2,5 \pi n$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi k}{6} + \frac{5}{3} \pi k$$

$$-5 \leq 5 \operatorname{arcsin}(\cos x) \leq 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq x + \frac{\pi}{2} \leq 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-5 \leq 2,5\sqrt{u} \leq 5$$

$$-2 \leq \sqrt{u} \leq 2, \quad u \in \mathbb{Z}$$

подходит только  $u=0$

$$-5 \leq \frac{5\sqrt{u}}{6} + \frac{5}{3}\sqrt{uk} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{5\sqrt{u} + 10\sqrt{uk}}{6} \leq 5$$

$$-30 \leq 5\sqrt{u} + 10\sqrt{uk} \leq 30$$

$$-6 \leq \sqrt{u} + 2\sqrt{uk} \leq 6$$

подходит  $k=-1; 0$

$$\left[ \begin{array}{l} x + \frac{\sqrt{u}}{2} = 0 \\ x + \frac{\sqrt{u}}{2} = \frac{5\sqrt{u}}{6} - \frac{5\sqrt{u}}{3} \\ x + \frac{\sqrt{u}}{2} = \frac{5\sqrt{u}}{6} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\sqrt{u}}{2} \\ x = -\frac{4\sqrt{u}}{3} \\ x = \frac{\sqrt{u}}{3} \end{array} \right.$$

Ответ:  $-\frac{4\sqrt{u}}{3}; -\frac{\sqrt{u}}{2}; \frac{\sqrt{u}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5ax + 2y - 3b = 0$$

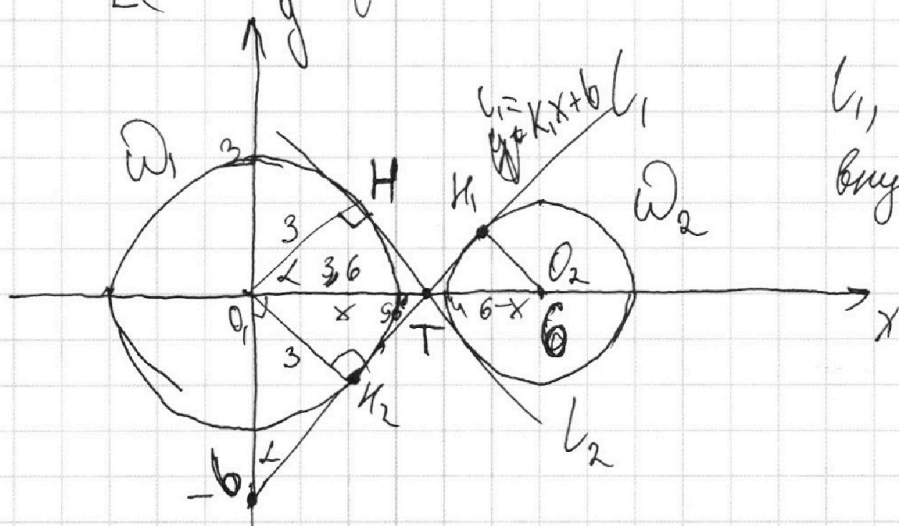
$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

а-? найдётся в иреш

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \omega_1$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \quad \omega_2$$



$l_1, l_2$  — общие  
внутр. касательные

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$  — эта прямая должна пересекать

окружности в 4х точках, но так как кол-во  
точек  $\Lambda$ -я прямой и  $\omega = 2 \Rightarrow$  каждую

окружность прямая должна пересечь в 2х точках



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что мы всегда можем подобрать  $b$ :  
прямая пересечёт  $\Omega_1$  в не точке.

$\Omega_2$  будет пересечена в 2х точках, если  
 $-\frac{a}{2} > \text{коэф. } l_2$ ;  $-\frac{a}{2} < \text{коэф. } l_1$

Заметим, что  $l_1$  симм.  $l_2$  отн.  $Ox$

Пусть  $\angle KO_1T = \alpha$  (см. рис.)

$\angle KO_1T = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle O_1TO_2 = 90^\circ - \alpha$  (из симметрии)

$\angle KO_2T = \angle O_1TO_2 = 90^\circ - \alpha$  (верт.)

$\Rightarrow \triangle O_1KO_1T \sim \triangle O_2KO_2T$  (по 2 углам)

$$\Rightarrow \frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1T}{O_2T}$$

пусть  $O_1T = x$   
 $O_2T = 6 - x$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{6-x}$$

$$18 - 3x = 2x \quad 5x = 18 \quad x = \frac{18}{5} = 3,6$$

$$l_1 = k_1x + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{k_1} = 3,6 \quad b = -3,6k_1$$

$$l_1 = k_1x - 3,6k_1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{KT}{O_1K} = \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3} = k_1 \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3} - \frac{a}{2} \leq \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3}$$

$$\text{Ответ: } -2 \left( \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3} \right) \leq k_1 \leq 2 \left( \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \frac{1}{\log_3 x} = 2,5 \log_3 x - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \frac{1}{\log_3 x} = 2,5 \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$t^4 + 3,5t - 8 = 0$$

$$f'(t) = 4t^3 + 3,5$$

$$6^3 = -3,5$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

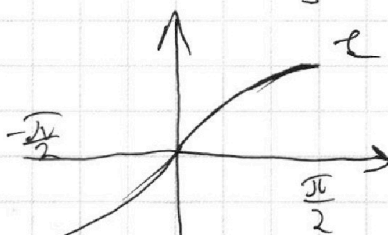
$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin(\arcsin t) = t$$

$$\arcsin(\sin t) = t$$

arcsin



$$\sin q = x$$

$$y_{max} = \sqrt{9-x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2}$$

$$-30 \leq 10\sqrt{t} + 5 \leq 30$$

$$-5 \leq \frac{10\sqrt{t} + 5}{6} \leq 5$$

$$(\log_3 5y)^4 + \frac{2}{\log_3 5y}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{5}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{5}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{2}{5}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

$$\frac{2}{5}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax + 2y - 36 = 0 \quad y = 9 - x^2 \quad \frac{3}{2}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$Kx + 6 = 0 \quad (x-6)^2 + y^2 = 4 \quad 3 = \sqrt{3,6 \cdot k^2 + 1}$$

$$K_1 x = -6 \quad 3 \frac{3}{5} = 3,6 \quad 9 = 3,6 \cdot k^2$$

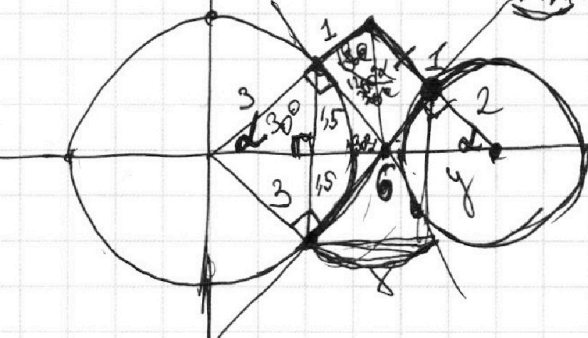
$$y_{кас} = \sqrt{-x^2 + 12x - 32} + \frac{6-x}{\sqrt{x^2 + 12x + 32}} (x-x_0)$$

$$u = x_0 + k^2 x_0^2 \quad y_{кас} = \sqrt{9-x_0^2} + \frac{-x_0}{\sqrt{9-x_0^2}} (x-x_0)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\log 5} = \frac{1}{\log 5} - 35$$

$$\frac{1}{\log 5} = \frac{1}{\log 5} - 35$$

$$\frac{1}{\log 5} = \frac{1}{\log 5} - 35$$



$$ax + 2y - 36 = 0 \quad \sqrt{36-1} = \sqrt{35} \quad x = \frac{-b}{k} = 3,6$$

$$2y = -ax + 36 \quad \sqrt{36-25} = \sqrt{11} \quad -b = 3,6k$$

$$y = -\frac{a}{2} \cdot x + 1,56 = 900 + 360 + 36 = 1296$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad 12,96 - 9 = 3,96 \quad y \in \sqrt{x^2 - 12x + 36}$$

$$y = \sqrt{9-x^2} \quad y = \sqrt{-x^2 + 12x - 32}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \quad y' = \frac{-2x+12}{2\sqrt{-x^2+12x-32}}$$

$$\frac{-x_0}{\sqrt{9-x_0^2}} = \frac{6-x_1}{\sqrt{-x_1^2+12x_1-32}} \quad \geq \frac{6-x}{\sqrt{-x^2+12x-32}}$$

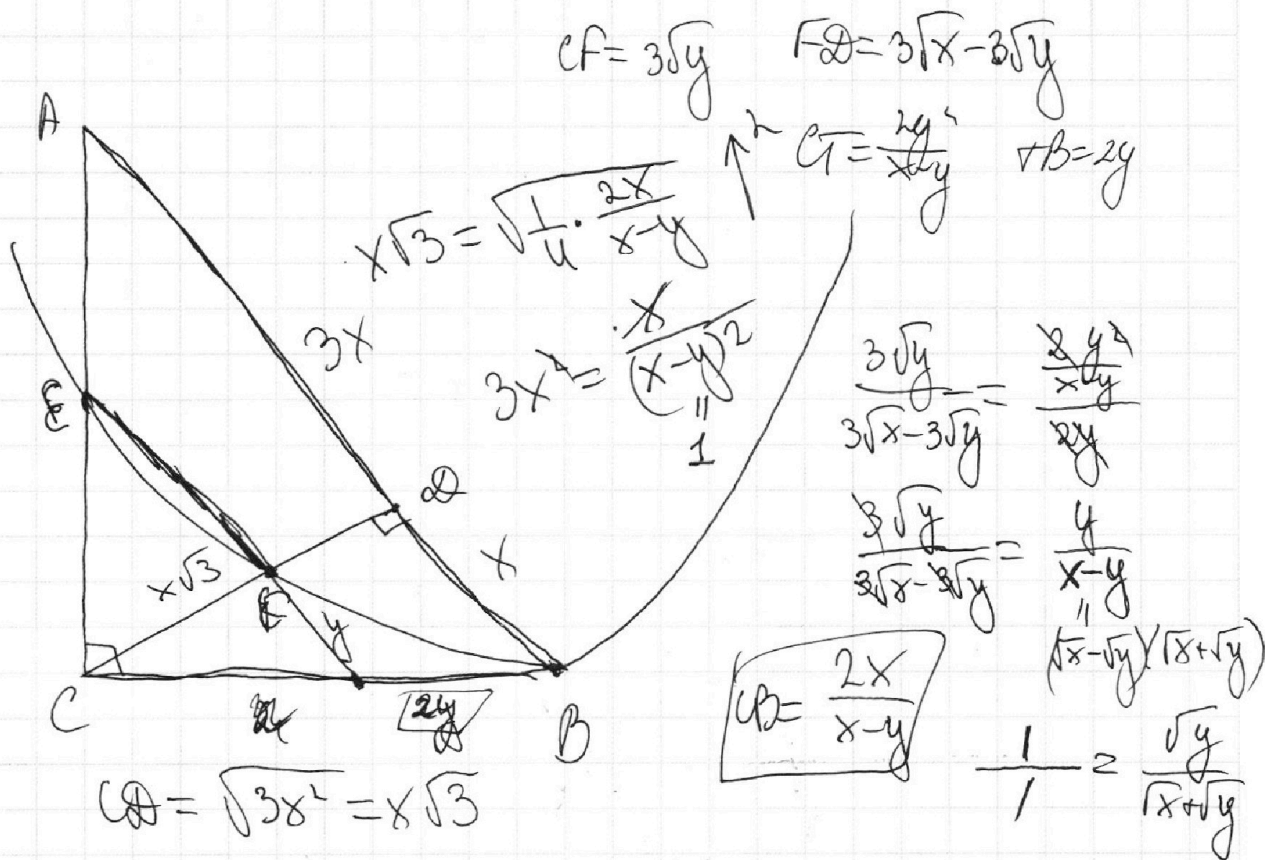
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{4x^2}{(x-y)^2} = 3x^2 + 4x^2 - \frac{4x^2 + x^2}{3} + \frac{x^2}{2} \quad CB = \frac{2y+2}{1} = 2y+2$$

$$= \frac{8x^2 + 3x^2 - 5x^2}{6} \quad CT = 2 \quad x=1$$

$$\frac{1}{(x-y)^2} = 1 \quad (x-y)^2 = 1 \quad \frac{2}{2y+2} = \frac{y}{y+1}$$

$$x > y \quad x - y = 1$$

$$x = y + 1$$

$$\frac{2y^2}{x-y} + 2y = \frac{2xy}{x-y}$$

$$CF = 3\sqrt{y}$$

$$CT = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$\frac{4y^2}{(x-y)^2} = 3y^2 + y^2$$

$$(x-y)^2 = 1$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{(y^2+1)^2}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(y^2+1)^2}{y^2} = \frac{y^2 + 2y + 1}{y^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3 X)^4 + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \quad \text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 1$$

$$(\log_3 X)^4 + \frac{6}{\log_3 X} = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \quad \log_x 3 = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = 2,5t - 8 \quad | \cdot t$$

$$t^5 - 2,5t^2 + 8t + 6 = 0 \quad \text{АА } t = -1 \quad -1 - 2,5 + 8 + 6 = 0$$

$$f'(t) = 5t^4 - 5t + 8 = 0 \quad \text{АА } 5t^4 + 16t + 12 = 0$$

$$5t(t^3 - \frac{1}{5}) + 8 > 0 \quad \text{АА } t = -1$$

$$(5t^4 - 5t)' = 20t^3 - 5 = 0$$

$$t^3 = \frac{1}{4} \quad t < 1$$

↑  
min

$$-1 - 2,5 - 8 + 6 < 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{25} - 2,5 \cdot \frac{1}{4} - 4 + 6$$

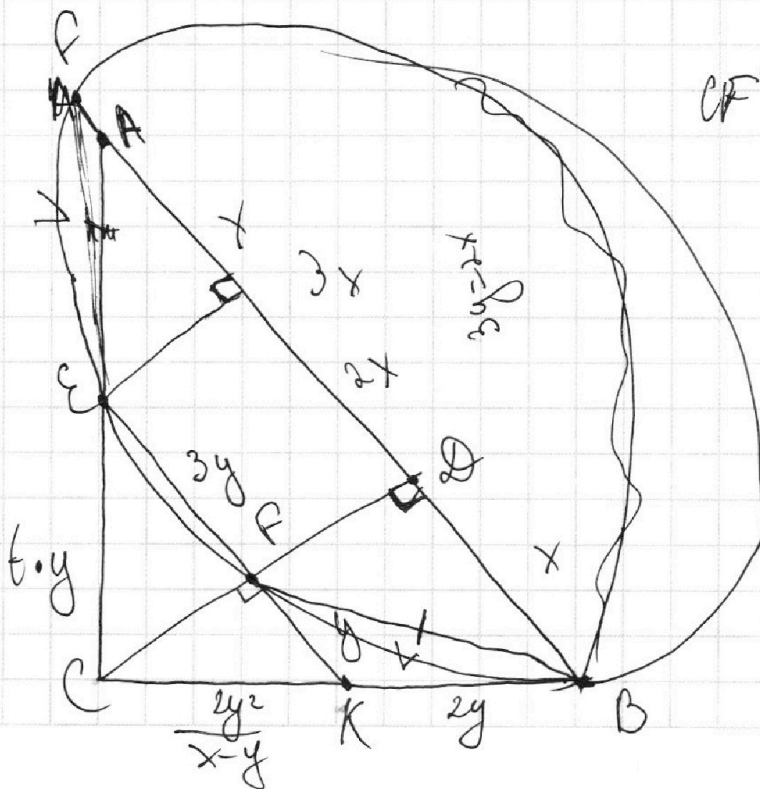
$$CP^2 = \frac{xy^4}{x^2y^2} - y^2 = \frac{xy^2}{x-y} + 2y = \frac{2xy}{xy}$$

$$\frac{CK}{y} = \frac{CK + 2y}{x}$$

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{2y}{CK}$$

$$\frac{x-y}{y} = \frac{2y}{CK}$$

$$CK = \frac{2y^2}{x-y}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$   
 $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$   
 $ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

Найти  $abc$

a  
b  
c

$10+13+30$

$53:2 = 26,5$

$19+14 = 33+5 = 42$

$$\begin{cases} a+b \geq 10 \\ b+c \geq 13 \\ a+c \geq 18 \end{cases}$$

$41:2$

$20$

$28+14 = 42$

$21$

$2a+2b+2c \geq$

$$\begin{cases} a+b \geq 9 \\ b+c \geq 14 \\ a+c \geq 19 \end{cases}$$

$a-x(3)$

$c-18-x$

$10-x = 10-x$

$13-18+x = x-5$

$10-x = x-5$

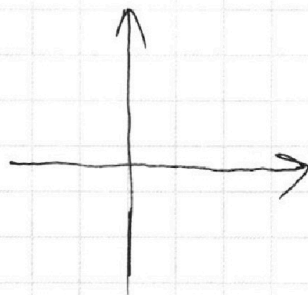
$2x = 15 \quad x = 7,5$

$x=7 \quad x=8$

$min=3 \quad min=3$

$x-5 = 9-x$

$2x = 14 \quad x=7$



$abc: 5^{30}$

~~$a-5^{10} \quad c-5^{20} \quad b-5^3$~~

~~$a-5^{15} \quad c-5^{15}$~~

$b+a \geq 10$

$b+c \geq 13$

$a+c \geq 18$

$18+10+13 = 41$

$b=3$

$3^{21}$

$b = 14 - 19 + x = x - 5$

$b = 9 - 8 = 9 - x$

$a=7 \quad c=12 \quad b=2$

$\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 X}$   
 $\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 X}$   
 $\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 X}$   
 $\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 X}$

$\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 X}$   
 $\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 X}$   
 $\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 X}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

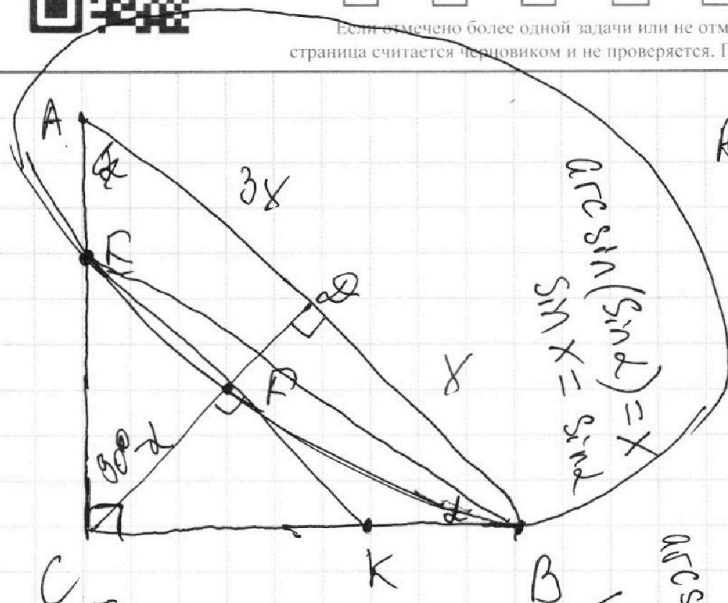
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\arcsin(\sin t)$



$AB \parallel EF$

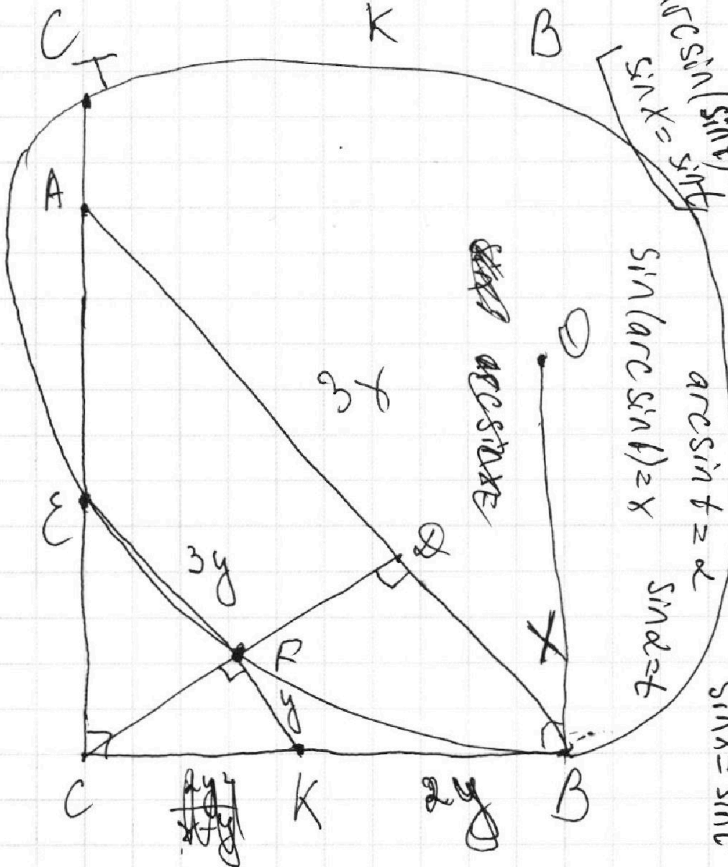
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{3}{4} S_{CEK}$$

$$\arcsin(\sin 2) = x$$

$$\arcsin(\sin t) = x$$

$$AC^2 = 16x^2 - 4x^2y^2$$



$$\arcsin t = \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin t$$

$$\frac{x}{y} = k$$

$$KB^2 = y \cdot 4y = 4y^2$$

$$KB = 2y$$

$$\arcsin(\sin t) = x$$

$$CB = \frac{2y^2}{x} + 2y = \frac{2y^2 + 2xy}{x}$$

$$= 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{CK}{CK + 2y}$$

$$\frac{CB}{CK} = \frac{x}{y}$$

$$CK = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$x \cdot CK = y \cdot CK + 2y^2$$

$$CK = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$\frac{CK + 2y}{CK} = \frac{x}{y}$$

$$1 + \frac{2y}{CK} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}$$

$\arcsin(\sin t) = t$   $\cos 46^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$   $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\sin(30+x)) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\sin(30+x)) = 0$

$\frac{y}{x+\frac{\pi}{2}} = x + \frac{\pi}{2}$