



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1

Пусть $ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot k_1$, $ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot k_2$, $bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_3$, где k_1, k_2, k_3 — это натуральные числа (в силу делимости). Тогда $a \cdot b \cdot c$
 $\cdot ac = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 3^{56} \cdot 7^{72}$
 $\Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}$, а так k_1, k_2, k_3 каждое из них натуральное $\Rightarrow k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, k_3 \geq 1 \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$.

Пусть $a:3^x$ (где x — это максимальная степень, которая воз-
 можна), аналогично $b:3^y, c:3^z$, тогда $x+y \geq 14$;
 $x+z \geq 23$; $y+z \geq 19$ (из делимости) $\Rightarrow$ все сложим)

$2(x+y+z) \geq 19+14+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{19+14+23}{2} = 28 \Rightarrow abc:3^{28}$.
 Так $ac:7^{42}$, а $b \geq 1$ (так натурально) $\Rightarrow abc:7^{42}$, получаем
 (так 3 и 7 взаимно просты), что $abc:7^{42} \cdot 3^{28} \Rightarrow abc \geq 7^{42} \cdot 3^{28}$

Приведем пример, что $abc = 7^{42} \cdot 3^{28}$ возможно. $a = 3^9 \cdot 7^{21}$;
 $b = 3^5$; $c = 3^{14} \cdot 7^{21}$, тогда $abc = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 3^9 \cdot 7^{21} \cdot 7^{21} = 3^{28} \cdot 7^{42}$
 и $ab = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21}$, пусть $ab:3^{14} \cdot 7^{13}$; $ac = 3^{21} \cdot 7^{21}$.
 $\cdot 3^{14} \cdot 3^9 = 7^{42} \cdot 3^{23} \Rightarrow ac:3^{23} \cdot 7^{42}$; $bc = 3^5 \cdot 3^{14} \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21} \Rightarrow$
 $bc:3^{19} \cdot 7^{17}$.

Ответ: $7^{42} \cdot 3^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2-11ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}. \text{ Рассмотрим НОД}$$

(наибольший общий делитель) $a+b$ и $(a+b)^2-11ab$, тогда:

$$\text{НОД}(a+b; (a+b)^2-11ab) = x \text{ (то есть } a+b : x \text{ и } (a+b)^2-11ab : x,$$

но так $a+b : x \Rightarrow -11ab : x$, а потому того, что a и b взаим.

(больше 0) $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ раз $-11ab : x$, то $11ab : x$)

$$\text{НОД}(a+b; -11ab + (a+b)^2) = \text{НОД}(a+b; 11ab) = x, \text{ так } \frac{a}{b} \text{ не}$$

сократимо $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$ (то есть a/b и b/a)

если $a+b \nmid 11$ (и $a+b$ не делится на 11) Заметим, что $a+b \nmid a$
и $a+b \nmid b$ (и $a+b$ не делится ни на a , ни на b), так $a : a$, $ab : a \Rightarrow$
 $a+b \nmid a$ (аналогично с b). Значит $\text{НОД}(a+b; 11ab) =$

$= \text{НОД}(a+b; 11)$, легко заметить, что если $a+b \nmid 11$, то

$\text{НОД}(a+b; 11) = 1$ (пример, что при этом $\frac{a}{b}$ несократимо:

$a=5, b=6$), а если $a+b \nmid 11 \Rightarrow 11$ -простое, а $a+b \nmid 11 \Rightarrow$

$$\text{НОД}(a+b; 11) = 1.$$

Ответ: $m=11$, при $a+b \nmid 11$, иначе $m=1$

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3

Решим уравнения $3x^2 - 5x + 6 = 0$ и $3x^2 + x + 1 = 0$, получим соответствующие $D_1 = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47$ (то есть $D_1 < 0$) и $D_2 = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11$;

то есть $D_2 < 0$, т.к. D_1 и D_2 меньше 0 а коэффициенты при x^2 в обоих уравнениях положительны (то есть параболы ветви вверх), значит при любых x уравнение $3x^2 - 5x + 6 > 0$ и $3x^2 + x + 1 > 0$. Т.к. выражение под корнем ^{выражение} положительное $\Rightarrow$ корни двух уравнений положительные (умножим на $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$)

получим $3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$
 $-6x + 5 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$ Один корень уравнения:

$5 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$ (он под корнем всегда положительное $\Rightarrow$ можно не проверять). Далее считаем что $x \neq \frac{5}{6}$, тогда разделим на $5 - 6x$, получим:

$$1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \Rightarrow 1 - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$$

~~тогда $\sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1$ (мне получилось корни отрицательные) $\Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1 \Rightarrow 3x^2 + x + 1 \leq 1 \Rightarrow 3x^2 + x \leq 0 \Rightarrow x(3x + 1) \leq 0$ (решаем неравенство $\Rightarrow x \in [-\frac{1}{3}, 0]$ тогда возведем в квадрат:~~

$$1 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6 \Rightarrow -2\sqrt{3x^2 + x + 1} = -2(3x - 2)$$

(разделим на -2) $\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$ ($3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$) возведем в квадрат

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x \Rightarrow 6x^2 - 13x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$$

(можно не проверять, т.к. мы получили всегда положительное)

Ответ: $\frac{5}{6}$; $\frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

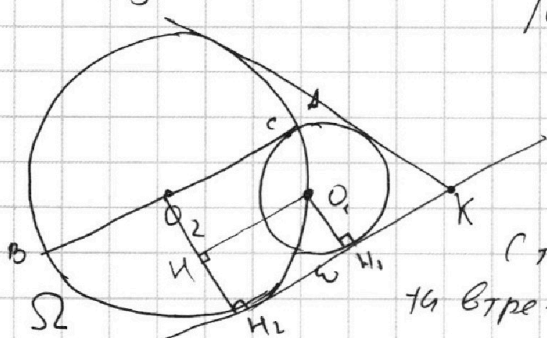
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 4



Пусть центры окр. ω и Ω соответственно
равны O_1 и O_2 (см. рис.). Пусть

Тк AB диаметр $\Rightarrow$ он проходит через

O_2 , и тк AB касательная к ω и

сточки касания $\Rightarrow O_1C \perp AB$ (O_1C - радиус

тк втр-ке AO_1B , и $\angle AO_1B = 90^\circ$, тк опирается

на диаметр в окр. Ω , тогда из соотношений в

прям. тр-ке ($\triangle O_1AC$ и $\triangle O_2BC$) O_1C (тк сточки касания $\Rightarrow O_1C$ (как радиус Ω)

это и радиус окр. ω) $= \sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5$. $O_2A = O_2B =$

$= \frac{AC + CB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{1 + 25}{2} = 13$. Пусть H_1 и H_2 это перпендикуляры

на общую касательную (на ось) H_1 из O_1 и H_2 из O_2 . Тк

O_1H_1 и O_2H_2 перпендикуляры к касательной (к одной прямой) $\Rightarrow$

$O_1H_1 \parallel O_2H_2 \Rightarrow O_1H_1H_2O_2$ - это ^{трапеция} ~~прямоугольник~~ (трапеция тк $O_1H_1 \parallel O_2H_2$,

и $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ$). Пусть $O_1H_1 \perp O_2H_2$, тогда тк $O_1H_1 \parallel H_2H_1$

(тк перпендикуляры к одной прямой) и $H_1O_1 \parallel H_2H_1$ (показано выше),

значит $H_1O_1H_2H_1$ - параллелограмм / тк $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ \Rightarrow$ прямоугольник)

значит $O_1H_1 = H_2H_1$ и $O_2H_2 = H_1H_2$ (тк O_2H_2 - радиус $\Rightarrow O_2H_2 = O_1C = 5$) $\Rightarrow$

$H_1H_2 = 5 \Rightarrow O_2H_2 = 5$ (тк O_2H_2 - радиус $\Rightarrow O_2H_2 = 13$) $= O_2H_2 - H_1H_2 =$

$= 13 - 5 = 8$. Тк $\angle O_1H_1O_2 = 90^\circ \Rightarrow O_1H_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H_2^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$.

по т. Пифагора

Пусть к точкам пересечения одной касательной окр. $\Rightarrow H_1O_1O_2$ лежат

на одной прямой, значит (по двум углам / по двум углам $\angle H_1O_1O_2 =$

$= 90^\circ = \angle H_2O_2H_1$) $\triangle KO_1H_1C \sim \triangle KO_2H_2C \Rightarrow \frac{KH_2}{KH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow$

$$\frac{KH_2}{KH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow KH_2 \cdot O_1H_1 = O_2H_2 \cdot KH_1 = O_2H_2 \cdot KH_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №4.

$$k u_1 (0, u_1 - 0,2 u_2) = -0,2 u_2$$

$$\frac{k u_1 + u_1 u_2}{k u_1} = \frac{0,2 u_2}{0, u_1} \Rightarrow k u_1 \cdot 0, u_1 + u_1 u_2 \cdot 0, u_1 = 0,2 u_2 \cdot k u_1$$

$$k u_1 (0, u_1 - 0,2 u_2) = -u_1 u_2 \cdot 0, u_1$$

$$k u_1 = \frac{-u_1 u_2 \cdot 0, u_1}{0, u_1 - 0,2 u_2} = \frac{u_1 u_2 \cdot 0, u_1}{0,2 u_2 - 0, u_1} = \frac{105 \cdot 5}{13 - 5} = \frac{5105}{8}$$

$$k u_2 = k u_1 + u_1 u_2 = 105 + \frac{5105}{8} = \frac{8105 + 5105}{8} = \frac{13105}{8}$$

Order: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15}{z} - \frac{x}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15x - 8z}{zx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ y = \frac{zx}{15x - 8z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x^2 - 9z^2 - 30xz \\ y = \frac{zx}{15x - 8z} \end{cases}$$

$z \neq 0, y \neq 0, x \neq 0$ так как иначе не имеет смысла

$$\frac{zx}{15x - 8z} = 5x - 3z \Rightarrow zx = (5x - 3z)(15x - 8z) \Rightarrow$$

$$zx = 5 \cdot 15x^2 + 24z^2 - 3 \cdot 15xz - 8 \cdot 5z \cdot x$$

$$75x^2 + 24z^2 - 86xz = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{86z \pm \sqrt{86^2 z^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24z^2}}{2 \cdot 75} =$$

$$= \frac{86z \pm 2\sqrt{86^2 - 4 \cdot 24 \cdot 75}}{2 \cdot 75} = \frac{z(86 \pm 7)}{2 \cdot 75}$$

$$x_1 = \frac{93z}{2 \cdot 75} \text{ или } x_2 = \frac{79z}{2 \cdot 75}$$

Рассмотрим 2 случая и выйдем, который больше:

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - (25x^2 + 9z^2 - 30xz) - z^2}{y(25x^2 + 9z^2 - 30xz) + 3z^2} = \frac{-10z^2 - 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz} =$$

$$= -10z \cdot \frac{z + 3x}{12z^2 + 25x^2 - 30xz}$$

$$1) x = \frac{93z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - \frac{3 \cdot 93z}{2 \cdot 25}}{12z^2 + 25 \cdot \frac{93^2 z^2}{4 \cdot 75^2} - \frac{30 \cdot 93z^2}{2 \cdot 75}} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{93}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{1093}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{47}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5}}$$

$$2) x = \frac{79z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - \frac{79 \cdot 3z}{2 \cdot 75}}{12z^2 + \frac{25 \cdot 79^2}{4 \cdot 75^2} z^2 - \frac{30 \cdot 79}{2 \cdot 75} z^2} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{79}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{29}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи № 5.

Надо сравнить 1000 и 200 случаев:

$$10 \cdot \frac{43}{50 \left(12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5} \right)}$$

$$10 \cdot \frac{29}{50 \left(12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5} \right)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{43}{12 \cdot 50 + \frac{31^2}{2} - 930} \\ & \frac{43}{10(12 \cdot 5 - 93) + \frac{31^2}{2}} = \frac{43}{\frac{31^2}{2} - 330} \\ & \frac{43}{150,5} = \frac{86}{301} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{29}{50 \cdot 12 + \frac{79^2}{18} - 790} \\ & \frac{29}{10(60 - 79) + \frac{79^2}{18}} = \frac{29}{\frac{79^2}{18} - 190} \\ & \frac{29 \cdot 18}{79^2 - 19 \cdot 180} = \frac{29 \cdot 18}{2821} \end{aligned}$$

$$86 \cdot 2821 = 243 \cdot 2821$$

$$301 \cdot 29 \cdot 18$$

$$43 \cdot 2821$$

$$301 \cdot 29 \cdot 9$$

$$43 \cdot 2821 > 43 \cdot 2709 = 43 \cdot$$

$$301 \cdot 9 \cdot 29$$

$$\cdot 301 \cdot 9$$

$$43$$

$$>$$

$$29$$

$$y = 5x - 3z \sqrt{\quad}$$

Значит, имеем еще значение при

$$x = \frac{792}{150} \text{ дает } \frac{29 \cdot 18 \cdot 10}{2821} = \frac{522}{2821}$$

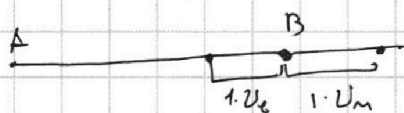
Ответ: $\frac{522}{2821}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

Пусть S — это расстояние от A до B (измеряется в км), V_6 — это скорость велосипедиста (измеряется в $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$) и V_m — это скорость мотоциклиста (измеряется в $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$). Рассмотрим утверждение после того как мотоциклист приехал из A к месту встречи велосипедиста (то есть со слов "Если бы велосипедист..." и со слов "...на 49 км больше"). Т.к. на путь от A до B велосипедисту требуется на 1 час больше чем мотоциклисту, то



Тогда 49 км равен $1 \cdot V_m + 1 \cdot V_6 = V_m + V_6$

$$\begin{cases} \frac{S}{V_m} + 1 = \frac{S}{V_6} \\ V_m + V_6 = 49 \\ \frac{S}{V_m + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{V_6 + 7} \end{cases}$$

Составим систему уравнений (время = $\frac{\text{путь}}{\text{скорость}}$)
(т.к. V_6, V_m, S это разн. величины, характеризующие длину и скорость, значит

$V_6, V_m, S > 0$ (какие по отдельности), а так $V_m + V_6 = 49 \Leftrightarrow (V_m = 49 - V_6) \quad V_m < 49 \quad V_6 < 49$

так мотоциклист прибывает первым $\Rightarrow$

$$V_6 < V_m). \quad \frac{S}{V_m} + 1 = \frac{S}{V_6} \Rightarrow 1 = S \left(\frac{1}{V_6} - \frac{1}{V_m} \right) \Rightarrow S = \frac{V_m - V_6}{V_6 \cdot V_m} = 1 \Rightarrow$$

т.к. $V_m + V_6 = 49 \Rightarrow$

$V_6 = 49 - V_m$

$$S = \frac{V_6 V_m}{V_m - V_6} = \frac{(49 - V_m) V_m}{V_m - 49 + V_m} = \frac{V_m (49 - V_m)}{2V_m - 49}$$

$$\frac{S}{V_m + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{V_6 + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{S}{V_6 + 7} - \frac{S}{V_m + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = S \left(\frac{V_m + 7 - V_6 - 7}{(V_m + 7)(V_6 + 7)} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} = \frac{V_6 V_m}{V_m - V_6} \cdot \frac{(V_m - V_6)}{(V_m + 7)(V_6 + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{V_6 V_m}{(V_m + 7)(V_6 + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{(49 - V_m) V_m}{(V_m + 7)(56 - V_m)}$$

$$3(V_m + 7)(56 - V_m) = 5V_m(49 - V_m) \Rightarrow -3V_m^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49V_m =$$

$$= -5V_m^2 + 5 \cdot 49V_m \Rightarrow 2V_m^2 - 2 \cdot 49V_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow$$

$$V_m^2 - 49V_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7^2 \cdot 3 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$

$$V_{m_{1,2}} = \frac{49 \pm 7}{2} \Rightarrow V_{m_1} = \frac{49 - 7}{2} = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \quad \text{или} \quad V_{m_2} = \frac{49 + 7}{2} = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение задачи № 6

Пк $v_B = v_m + 49$, то при $v_m = 21$, $v_B = 28 \Rightarrow v_B > v_m$, что не
может быть $\Rightarrow v_m = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_B = 49 - 28 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

Тогда
$$S = \frac{v_B v_m}{v_m - v_B} = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = \frac{7^2 \cdot 4 \cdot 3}{7} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 21 \cdot 4 = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

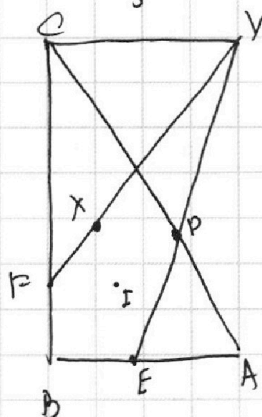
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача N=7



Степень точки Y относительно вписанной
окружности: $YX \cdot YF = YD \cdot YE$ или же

$\sqrt{2} \cdot EX \cdot YF = YD \cdot YE$, т.к. окружность
касается в точках D и E $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \angle EDA =$

$\angle DEA$, т.к. $\angle CDA$ и $\angle EDA$ верт. $\Rightarrow$

$\angle EDA = \angle DEA$, а т.к. $\angle YCD + \angle CDA = 90^\circ = 90^\circ =$

$= 180^\circ \Rightarrow CY \parallel BA \Rightarrow \angle CYD = \angle DEA \Rightarrow CD = CY$. А $\angle EFD =$

$\angle EXD$ (т.к. опираются на одну дугу), $\angle DEA = \angle DFE$ как

углы между касательной и хордой. $\angle YED = \angle DFH$

как углы опирающиеся на одну дугу, $\angle FYE$ общий $\Rightarrow$

$\triangle FYD \sim \triangle FYX \Rightarrow \frac{FX}{FY} = \frac{FY}{FY} \Rightarrow FD = \sqrt{2} YD$. В стр-

ности точки Y получим и получили: $2 EX \cdot YF = FD \cdot YE$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(1 + 1)$$

$$-6x + 5 = (5 - 6x)(1 + 1) \text{ если } 5 - 6x = 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

или

$$\begin{cases} 5x - y = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases} \begin{array}{l} 25 \\ 720 \\ 25 \\ 47 \end{array}$$

$$1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ 569 \\ \hline 72 \\ \hline 97 \end{array}$$

$$1 + 3x^2 + x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6$$

$$2(1 + \sqrt{3x^2 + x + 1}) = -6x + 6$$

$$\frac{1 + \sqrt{3x^2 + x + 1}}{2} = -3x + 3$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x$$

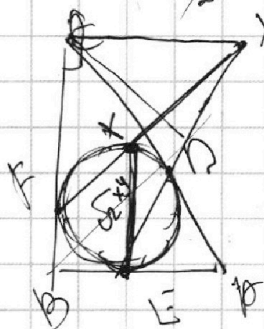
$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 169 - 72 = 97$$

$$\frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$$3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6$$

$$-2(3x - 2)$$



$$\frac{S}{V_m} + 1 = \frac{S}{V_b}$$

$$\frac{S}{V_b} \cdot V_m - \frac{S}{V_m} \cdot V_b = 4y$$

$$\frac{S}{V_m + 1} + \frac{3}{5} = \frac{S}{V_b + 7}$$

$$25x^2 = 9z^2 + y^2 = 6zy$$

$$25x^2 - y^2 - 9z^2 = -6zy$$

$$\frac{-6zy + 8z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$8 + \frac{y}{y} = \frac{15x}{2}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$yz = \frac{15xy - xz}{8}$$

$$45$$

$$3x^2 + x + 1 \leq 1$$

$$x(3x + 1) \leq 0$$

$$0$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

$$1 = \frac{S}{V_b} - \frac{S}{V_m}$$

$$1 = S \left(\frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_m} \right) = S \frac{V_m - V_b}{V_b V_m}$$

$$\frac{V_b V_m}{V_m - V_b} = S$$

$$S \left(\frac{V_m}{V_b} - \frac{V_b}{V_m} \right) = 4y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 3^{14} \cdot 7^{15}$$

$$bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$(abc)^2: 3^{14+19+23} \cdot 7^{30+42} = 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc: 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$$abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$$abc: 3^{28}$$

$$ab: 3^{14} \cdot 7^{13} k_1$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17} k_2$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42} k_3$$

$$(abc)^2 = 3^{14+19+23} \cdot 7^{30+42} \cdot k_1 k_2 k_3$$

$$abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \cdot k_1 k_2 k_3$$

$$ac: 7^{42} \rightarrow 7 + 9 \cdot 6 + 11 \cdot 6$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$abc: 7^{42}$$

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} =$$

$$= \frac{a+b}{(a-b)^2-7ab}$$

$$a:b (k,1) = 1$$

$$k_1, k_2, k_3 \geq 1$$

$$\frac{1+2}{1+2-36} = \frac{3}{-31}$$

$$\frac{5}{5} \cdot \frac{2+3}{4+9-23} = \frac{5}{5}$$

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 6}{36} = \frac{-25 \cdot 72}{36}$$

$$= \frac{-5^2 \cdot 2 + 6 \cdot 12 \cdot 5}{2612} = \frac{47}{12}$$

$$3x^2 - 5x + 6 - \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}$$

$$(a+b; (a+b)^2-11ab) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 36}{936}$$

$$\frac{5}{5+6} = \frac{(a+b)^2-11ab}{(a+b)^2-11ab} = \frac{25-4 \cdot 6 \cdot 3}{1}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} - \frac{5 \cdot 2}{63}} = \frac{5+12}{3} = \frac{17}{13}$$

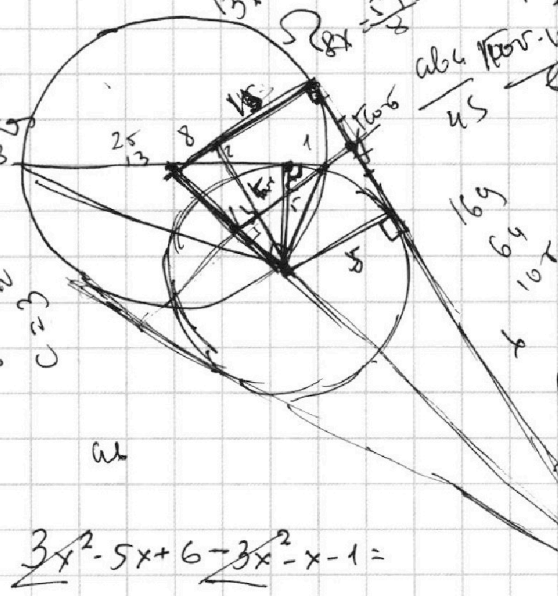
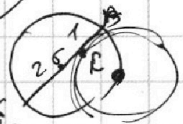
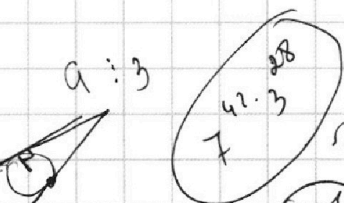
$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 =$$

$$= (5-6x)(1 + \sqrt{\quad})$$

$$-6x + 5 = (5-6x)(1 + \sqrt{\quad}) \quad \text{или} \quad 5-6x=0$$

$$1 = \sqrt{\quad}$$

$$5=6x \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{S}{v_m} + 1 = \frac{S}{v_b} \\ \frac{S}{v_m + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_b + 7} \end{cases}$$

$$1 = \frac{S}{v_b} - \frac{S}{v_m} = S \left(\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_m} \right) = S \frac{v_m - v_b}{v_b v_m}$$

$$\frac{v_b v_m}{v_m - v_b} = 5 = \frac{2v_m(49 - v_m)}{v_m - 49 + v_m} = \frac{2v_m(49 - v_m)}{2v_m - 49}$$

$$2Sv_m - 49S = v_m$$

$$\frac{3}{5} = S \left(\frac{1}{v_b + 7} - \frac{1}{v_m + 7} \right) = \frac{v_m + 7v_b - 7}{(v_b + 7)(v_m + 7)}$$

$$3(v_m + 7)(56 - v_m) = 5v_m(49 - v_m)$$

$$-3v_m^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49v_m = -5v_m^2 + 5 \cdot 49v_m$$

$$2v_m^2 - 2 \cdot 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0$$

$$v_m^2 - 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7^2 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$

$$v_m = \frac{49 \pm 7}{2} = \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 = v_r$$

$$v_m < 49$$

$$\frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

$$5x - y = 32$$

$$8 \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{16}{2}$$

$$8y^2 + x^2 = 16xy$$

$$25x^2 - 4y^2 - 4y^2 = 25x^2 - 4y^2 - 4y^2$$

$$4(x^2 + 25) = (y^2(2x + y))^{1/2}$$

$$x^2 + 25 + 16y = y^2 + 2y^2 + 2xy + 16y$$

$$x^2 + 25 = (y^2 + 2xy + 16y)$$

$$\frac{x}{5} = \frac{xy}{13}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+y}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{aligned} S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \\ S \left(\frac{v_M}{v_B} - \frac{v_B}{v_M} \right) &= 4g \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} &= \frac{S}{v_B + 7} \end{aligned} \right.$$

$$S \left(\frac{1}{v_B + 7} - \frac{1}{v_M + 7} \right) = S \frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_B v_M (v_M - v_B)}{(v_M - v_B)(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_M^2 v_B}{v_M - v_B} - \frac{v_B^2}{v_M - v_B} = 4g$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$3(v_M v_B + 7v_M + 7v_B + 49) = 5v_M v_B$$

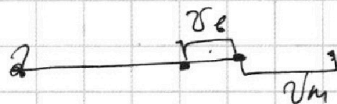
$$v_M^2 - v_B^2 = 4g(v_M - v_B) \quad 21v_M + 21v_B + 3 \cdot 4g - 2v_B v_M = 0$$

$$v_M^2 - 4g v_M + 2v_B(v_B + 4g) = 0 \quad v_M(21 - 2v_B) = -21v_B - 3 \cdot 4g$$

$$D = 4g^2 + 4(v_B^2 - 4g v_B) \quad v_M = \frac{3 \cdot 4g + 21v_B}{2v_B - 21} = \frac{21(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$-v_B^2 + 4g v_B \quad 4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2 \quad \frac{4g + \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2} = \frac{4g(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$v_M = \frac{4g \pm \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2} \quad 4v_B^2 - 4 \cdot 4g$$



$$\frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \quad v_M - v_B$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_B + v_M &= 4g \\ S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{(4g - v_M)v_M}{v_M - 4g + v_M} = \frac{v_M(4g - v_M)}{2v_M - 4g} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{2v_M - 4g}{v_M(4g - v_M)} \quad \frac{2v_M - 4g}{(v_M + 7)(5g - v_M)}$$

$$v_M = 4g - v_B$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{5g - v_M} - \frac{S}{v_M + 7}$$

$$\frac{3}{5} S \left(\frac{v_M + 7 + v_M - 5g}{(v_M + 7)(5g - v_M)} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x - 3z = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 25x^2 = (32 + y)^2 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 32^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 32^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 32^2} = 2 \cdot \frac{4z^2 + 3yz}{y^2 + 32^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{3z^2 + y^2 + z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 32^2} = 2 \left(1 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 32^2} \right) = 2 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 32^2}$$

$$6yz + xz = 15xy$$

$$xz = 8yz - 15xy$$

$$xy = y(8z - 15x)$$

$$xz = (15x - 32)(8z - 15x)$$

$$5 \cdot 8xz - 5 \cdot 15x^2 - 24z^2 + 3 \cdot 15xz = -10z^2 - 30xz$$

$$5(8 + 9) \cdot 2 + 3 \cdot 15xz = -10z^2 - 30xz$$

$$2z^2 + 10z + 5 \cdot 77 \cdot 3xz = -10z^2 - 30xz$$

$$xz = -24z^2 - 5 \cdot 15x^2 + 517xz$$

$$3 \cdot 15x - 5 \cdot 8 \cdot y = \frac{24z^2 + 5 \cdot 15x^2}{5 \cdot 17 - 1}$$

$$y = \frac{xz}{15x - 82} = 5x - 32$$

$$15x - 82 \cdot xz = (5x - 32)(65x - 82)$$

$$xz = 5$$

$$2 \cdot 43^2 - 2 \cdot 24 \cdot 75$$

$$2^2(43^2 - 24 \cdot 75)$$

$$43^2 - 24 \cdot 75$$

$$43 \cdot 40 + 43 = 43 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 = 1600 + 120 + 1209 = 9 \cdot 200 = 1800$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

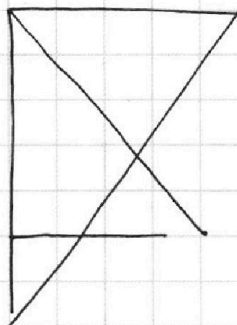
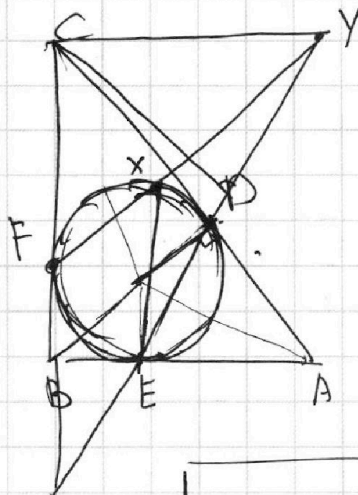
6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

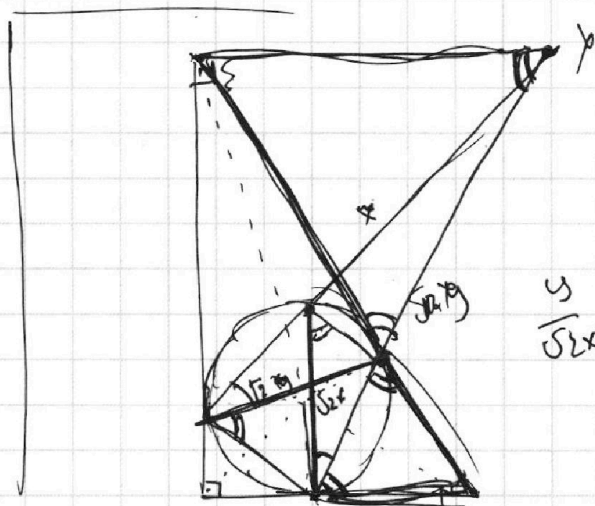
Задача № 7



$$yx \cdot yf = yd \cdot ye$$

$$yx \cdot yf = yd \cdot ye$$

$$\sqrt{2} \cdot ex \cdot yf = yd \cdot ye$$



$$\frac{y}{\sqrt{2}x}$$