



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1

Пусть $ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot k_1$, $ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot k_2$, $bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_3$, где k_1, k_2 и k_3 — это натуральные числа (в силу делимости). Тогда $a \cdot b \cdot c$

$$a \cdot c = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot$$

$$3^{56} \cdot 7^{72} \Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}, \text{ так как } k_1, k_2, k_3 \text{ каждое из них натуральное} \Rightarrow k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, k_3 \geq 1 \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}.$$

Пусть $a: 3^x$ (где x — это максимальная степень, которая воз-
можна), аналогично $b: 3^y$, $c: 3^z$, тогда $x+y \geq 14$;

$$x+z \geq 23; y+z \geq 19 \text{ (из делимости)} \Rightarrow \text{ждет все сложим)}$$

$$2(x+y+z) \geq 19+14+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{19+14+23}{2} = 28 \Rightarrow abc: 3^{28}$$

$$\text{Так } ac: 7^{42}, \text{ а } b \geq 1 \text{ (так натурально)} \Rightarrow abc: 7^{42}, \text{ получим}$$

$$\text{(так 3 и 7 взаимно просты), что } abc: 7^{42} \cdot 3^{28} \Rightarrow abc \geq 7^{42} \cdot 3^{28}$$

Приведем пример, что $abc = 7^{42} \cdot 3^{28}$ возможно. $a = 3^9 \cdot 7^{21}$;

$$b = 3^5; c = 3^9 \cdot 7^{21}, \text{ тогда } abc = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 3^9 \cdot 7^{21} \cdot 7^{21} = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{и } ab = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21}, \text{ пусть } ab: 3^{14} \cdot 7^{13}; ac = 4^{21} \cdot 7^{21}.$$

$$\cdot 3^{14} \cdot 3^9 = 7^{42} \cdot 3^{23} \Rightarrow ac: 3^{23} \cdot 7^{42}; bc = 3^5 \cdot 3^{14} \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21} \Rightarrow$$

$$bc: 3^{19} \cdot 7^{21}.$$

Ответ: $7^{42} \cdot 3^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-11ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}. \text{ Рассмотрим НОД}$$

(наибольший общий делитель) $a+b$ и $(a+b)^2-11ab$, тогда:

$$\text{НОД}(a+b; (a+b)^2-11ab) = x \text{ (то есть } a+b \div x \text{ и } (a+b)^2-11ab \div x,$$

но так $a+b \div x \Rightarrow -11ab \div x$, а в силу того, что a и b взаим.

(больше 0) $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ раз $-11ab \div x$, то $11ab \div x$)

$$\text{НОД}(a+b; -11ab + (a+b)^2) = \text{НОД}(a+b; 11ab) = x, \text{ так } \frac{a}{b} \text{ не}$$

сократима вробль $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$ (то есть $a \nmid b$ и $b \nmid a$)

если $a+b \nmid 11$ (~~a и b не делятся на 11~~) заметим, что $a+b \nmid a$
и $a+b \nmid b$ ($a+b$ не делится ни на a , ни на b), так $a \div a$, $a \nmid b \Rightarrow$

$$a+b \nmid a \text{ (аналогично с } b). \text{ Значит } \text{НОД}(a+b; 11ab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b; 11), \text{ важно заметить, что если } a+b \nmid 11, \text{ тогда}$$

$$\text{НОД}(a+b; 11) = 1 \text{ (пример, что при этом } \frac{a}{b} \text{ несократимо.}$$

$$a=5, b=6), \text{ а если } a+b \nmid 11 \Rightarrow 11 \text{ - простое, а } a+b \nmid 11 \Rightarrow$$

$$\text{НОД}(a+b; 11) = 1.$$

Ответ: $m=11$, при $a+b \nmid 11$, иначе $m=1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3

Решим уравнения $3x^2 - 5x + 6 = 0$ и $3x^2 + x + 1 = 0$, получим соответствующие $D_1 = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47$ (то есть $D_1 < 0$) и $D_2 = 1 - 4 \cdot 3 = -11$;

то есть $D_2 < 0$, так D_1 и D_2 меньше 0 и коэффициенты при x^2 в обоих уравнениях положительны (то есть парабола ветви вверх), значит при любых x уравнение $3x^2 - 5x + 6 > 0$ и $3x^2 + x + 1 > 0$. Так выражение под корнем ^{используем} положительное \Rightarrow корни двух корней положительны (получим $4 \pm \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$)

получим $3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$
 $-6x + 5 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$ Один корень уравнения:

$5 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$ (он под корнем ветви положительной \Rightarrow можно не проверять). Далее считаем что $x \neq \frac{5}{6}$, тогда разделим на

$5 - 6x$, получим: $1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \Rightarrow 1 - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$

~~тогда $\sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1$ (имеем положительный корень отрицательного)~~

~~$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1 \Rightarrow 3x^2 + x \leq 0 \Rightarrow x(3x + 1) \leq 0$ (решаем неравенство~~

~~на $x \in [-\frac{1}{3}; 0]$ тогда возведем в~~

~~квадрат: $1 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6 \Rightarrow -2\sqrt{3x^2 + x + 1} = -2(3x - 2)$~~

~~(разделим на -2) $\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$ ($3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$) возведем в квадрат~~

~~$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x \Rightarrow 6x^2 - 13x + 3 = 0 \Rightarrow$~~

~~$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$ (можно не подсчитывать, так как корнем ветви положительной)~~

Ответ: $\frac{5}{6}$; $\frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

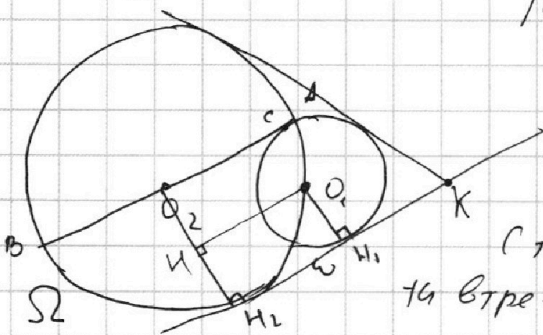
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 4



Пусть центры окр. ω и Ω соответственно на рисунке O_1 и O_2 (см. рис.), тогда

Тк AB диаметр \Rightarrow он проходит через O_2 , и тк AB касательная к ω и

С точки касания $\Rightarrow O_1C \perp AB$ (O_1C - радиус)

Тк в тр-ке HO_1B , $\angle HO_1B = 90^\circ$, тк опирается

на диаметр в окр. Ω , тогда из соотношений в

тр-ке HO_1B ($\angle HO_1B = 90^\circ$) $h = \frac{a \cdot b}{c}$ O_1C (тк точки касания $\Rightarrow O_1C$ (как радиус Ω))

это и радиус окр. ω) $= \sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5$. $O_2A = O_2B =$

$= \frac{AC + CB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{1 + 25}{2} = 13$. Пусть H_1 и H_2 это перпендикуляры

на общую касательную (на ось) H_1 из O_1 и H_2 из O_2 . Тк

O_1H_1 и O_2H_2 перпендикуляры к касательной (к одной прямой) \Rightarrow

$O_1H_1 \parallel O_2H_2 \Rightarrow O_1, H_1, H_2, O_2$ - это ^{тр-угольн} ~~прямоугольн~~ (прямоугольн тк $O_1H_1 \perp H_1H_2$

и $H_1H_2 \perp O_2H_2$ тк $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ$). Пусть $O_1H_1 \perp O_2H_2$, тогда тк $O_1H_1 \parallel H_1H_2$

(тк перпендикуляры к одной прямой) и $H_1O_1 \parallel H_2O_2$ (указано выше)

$H_1O_1 = H_2O_2$ значит H_1O_1, H_2O_2 - параллелограмм / тк $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ \Rightarrow$ прямоугольник

Значит $O_1H_1 = H_2O_2 = \frac{1}{2} O_1O_2$ - радиус $\Rightarrow O_1H_1 = O_1C = 5 \Rightarrow$

$H_1H_2 = 5 \Rightarrow O_2H_2$ (тк O_2H_2 - радиус $\Rightarrow O_2H_2 = 13$) $= O_2H_2 - H_1H_2 =$

$= 13 - 5 = 8$. Тк $\angle O_1H_1O_2 = 90^\circ \Rightarrow O_1H_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H_2^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$.

Пусть k точки пересечения одной касательной окр. $\Rightarrow k, O_1, O_2$ лежат на одной прямой, значит (по двум углам / по двум углам $\angle kH_2O_2 = 90^\circ = \angle kH_1O_1$) $\Delta kO_1H_1 \sim \Delta kO_2H_2 \Rightarrow \frac{kH_2}{kH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow$

$$\frac{kH_2}{kH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow kH_2 \cdot O_1H_1 = O_2H_2 \cdot kH_1 = O_2H_2 \cdot kH_1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи № 4.

$$k u_2 (0,4 u_1 - 0,2 u_2) = -0,2 u_2$$

$$\frac{k u_1 + u_1 u_2}{k u_1} = \frac{0,2 u_2}{0,4 u_1} \Rightarrow k u_1 \cdot 0,4 u_1 + u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1 = 0,2 u_2 \cdot k u_1$$

$$k u_1 (0,4 u_1 - 0,2 u_2) = -u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1$$

$$k u_1 = \frac{-u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1}{0,4 u_1 - 0,2 u_2} = \frac{u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1}{0,2 u_2 - 0,4 u_1} = \frac{1105 \cdot 5}{13 - 5} = \frac{51105}{8}$$

$$k u_2 = k u_1 + u_1 u_2 = 1105 + \frac{51105}{8} = \frac{81105 + 51105}{8} = \frac{132210}{8}$$

Ответ: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15}{z} - \frac{x}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15x - 8z}{zx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ y = \frac{zx}{15x - 8z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x^2 - 9z^2 - 30xz \\ y^2 + 3z^2 \end{cases}$$

$z \neq 0, y \neq 0, x \neq 0$ так как иначе не имеет смысла

$$\frac{zx}{15x - 8z} = 5x - 3z \Rightarrow zx = (5x - 3z)(15x - 8z) \Rightarrow$$

$$zx = 5 \cdot 15x^2 + 24z^2 - 3 \cdot 15xz - 8 \cdot 5z \cdot x$$

$$75x^2 + 24z^2 - 86xz = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{86z \pm \sqrt{86^2 z^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24z^2}}{2 \cdot 75} =$$

$$= \frac{86z \pm 2\sqrt{86^2 - 4 \cdot 24 \cdot 75}}{2 \cdot 75} = \frac{z(86 \pm 7)}{2 \cdot 75}$$

$$x_1 = \frac{93z}{2 \cdot 75} \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{79z}{2 \cdot 75}$$

Рассмотрим 2 случая и выйдем тот, который больше:

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - (25x^2 - 9z^2 - 30xz) - z^2}{y(25x^2 + 9z^2 - 30xz) + 3z^2} = \frac{-10z^2 - 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$= -10z \cdot \frac{z + 3x}{12z^2 + 25x^2 - 30xz}$$

$$1) x = \frac{93z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - 3 \cdot \frac{93z}{2 \cdot 75}}{12z^2 + 25 \cdot \frac{93^2 z^2}{4 \cdot 75^2} - \frac{30 \cdot 93z^2}{2 \cdot 75}} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{3 \cdot 93}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{3 \cdot 93}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{43}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5}}$$

$$2) x = \frac{79z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - \frac{79 \cdot 3z}{2 \cdot 75}}{12z^2 + \frac{25 \cdot 79^2}{4 \cdot 75^2} z^2 - \frac{30 \cdot 79}{2 \cdot 75} z^2} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{79}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{29}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи № 5.

Надо сравнить 1001 и 2005 случаи:

$$10 \cdot \frac{43}{50 \left(12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5} \right)}$$

$$\frac{43}{12 \cdot 50 + \frac{31^2}{2} - 930}$$

$$\frac{43}{10(12 \cdot 5 - 93) + \frac{31^2}{2}} = \frac{43}{\frac{31^2}{2} - 330}$$

$$\frac{43}{150,5} = \frac{86}{301}$$

$$86 \cdot 2821 = 243 \cdot 2821$$

$$43 \cdot 2821$$

$$43 \cdot 2821 > 43 \cdot 2709 = 43 \cdot$$

$$\cdot 301 \cdot 9$$

$$43$$

>

$$29$$

$$y = 5x - 3z \sqrt{\quad}$$

Значит, имеем еще значение при

$$x = \frac{792}{150} \quad \text{бюджет} \quad \frac{29 \cdot 18 \cdot 10}{2821} = \frac{522}{2821}$$

Ответ: $\frac{522}{2821}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

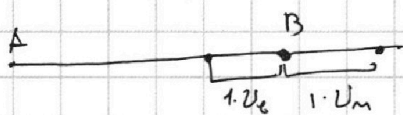
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

Пусть S - это расстояние от A до B (измеряется в км), v_B - это скорость велосипедиста (измеряется в $\frac{км}{ч}$) и v_M - это скорость мотоциклиста (измеряется в $\frac{км}{ч}$). Рассмотрим утверждение после того, как мотоциклист приехал из точки B к велосипедисту (то есть со слов "Если бы велосипедист..."). То есть от A до B велосипедисту требуется на 1 час больше чем мотоциклисту, то



Эти 49 км равны $1 \cdot v_M + 1 \cdot v_B = v_M + v_B$

Составим систему уравнений (время = $\frac{\text{пути}}{\text{скорость}}$)

$$\begin{cases} \frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B} \\ v_M + v_B = 49 \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} \end{cases}$$

(т.к. v_B, v_M, S это физ. величины, характерные для данной ситуации и скорости, значит

$v_B, v_M, S > 0$ (какие-то отщепености), а т.к.

$$v_M + v_B = 49 \Leftrightarrow (v_M = 49 - v_B) \quad v_M < 49 \quad v_B < 49,$$

а т.к. мотоциклист прибывает первым \Rightarrow

$$v_B < v_M). \quad \frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B} \Rightarrow 1 = S \left(\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_M} \right) \Rightarrow S = \frac{v_M - v_B}{v_B \cdot v_M} = 1 \Rightarrow$$

$$S = \frac{v_B \cdot v_M}{v_M - v_B} = \frac{(49 - v_M) \cdot v_M}{v_M - 49 + v_M} = \frac{v_M(49 - v_M)}{2v_M - 49}$$

$$v_B = 49 - v_M$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} - \frac{S}{v_M + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = S \left(\frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_B \cdot v_M}{v_M - v_B} \cdot \frac{(v_M - v_B)}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{v_B \cdot v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{(49 - v_M) \cdot v_M}{(v_M + 7)(56 - v_M)}$$

$$3(v_M + 7)(56 - v_M) = 5v_M(49 - v_M) \Rightarrow -3v_M^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49v_M =$$

$$= -5v_M^2 + 5 \cdot 49v_M \Rightarrow 2v_M^2 - 2 \cdot 49v_M + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow$$

$$v_M^2 - 49v_M + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7^2 \cdot 3 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$

$$v_{M1} = \frac{49 + 7}{2} \Rightarrow v_{M1} = \frac{49 + 7}{2} = 28 \frac{км}{ч} \quad \text{или} \quad v_{M2} = \frac{49 - 7}{2} = 21 \frac{км}{ч}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение задачи № 6

Пк $v_B = v_M + 49$, то при $v_M = 21$, $v_B = 28 \Rightarrow v_B > v_M$, если же
поискать обратное $\Rightarrow v_M = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_B = 49 - 28 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

$$\text{Тогда } S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = \frac{7^2 \cdot 4 \cdot 3}{7} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 21 \cdot 4 = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

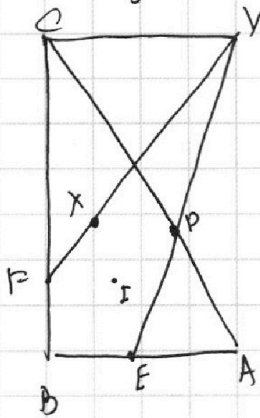
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача N=7



Степень точки Y относительно вписанной
окружности: $YX \cdot YF = YD \cdot YE$ или же

$\sqrt{2} \cdot EX \cdot YF = YD \cdot YE$, т.к. омп касается
в точках O и $E \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \angle EDA =$

$\angle DEA$, т.к. $\angle CDD$ и $\angle EDA$ верт. \Rightarrow

$\angle EDA = \angle DEA$, а т.к. $\angle YED + \angle CDA = 90^\circ = 90^\circ =$

$= 180^\circ \Rightarrow CY \parallel BA \Rightarrow \angle CYD = \angle DEB \Rightarrow CD = CY$. А $\angle EFD =$

$\angle EXD$ (т.к. опираются на одну дугу), $\angle DEB = \angle DFE$ как

углы между касательной и хордой. $\angle YEB = \angle DFH$

как углы опирающиеся на одну дугу, $\angle FYE$ общий \Rightarrow

$\triangle FYD \sim \triangle FYE \Rightarrow \frac{FX}{FY} = \frac{FY}{FY} \Rightarrow FD = \sqrt{2} YD$. В сте-

пень точки Y поставим и получим: $2 EX \cdot YF = FD \cdot YE$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5-6x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})$$

$$-6x + 5 = (5-6x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}) \text{ если } 5-6x=0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases} \left| \begin{array}{l} 25 \\ 72 \\ 25 \\ 47 \end{array} \right.$$

или так

$$1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 26 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 52 \\ 13 \\ \hline 65 \\ 13 \\ \hline 78 \\ 13 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$1 + 3x^2 + x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6$$

$$2(1 + \sqrt{3x^2 + x + 1}) = -6x + 6$$

$$1 + \sqrt{3x^2 + x + 1} = -3x + 3$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x$$

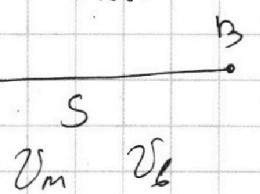
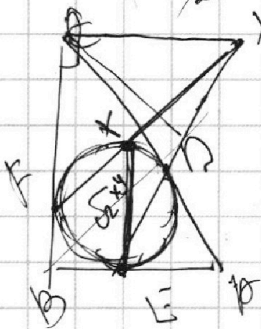
$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 169 - 72 = 97$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 60 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$$3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = -2(3x-2)$$



$$\frac{S}{v_m} + 1 = \frac{S}{v_b}$$

$$\frac{S}{v_b} \cdot v_m - \frac{S}{v_m} \cdot v_b = 4y$$

$$\frac{S}{v_m + 1} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_b + 7}$$

$$25x^2 = 9z^2 + y^2 = 6zy$$

$$25x^2 - y^2 - 9z^2 = -6zy$$

$$-6zy + 8z^2$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$8 + \frac{y}{z} = \frac{15x}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$yz = \frac{15xy - xz}{8}$$

$$45$$

$$3x^2 + x + 1 \leq 1$$

$$x(3x+1) \leq 0$$

$$0$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

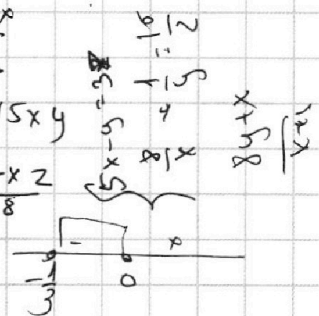
$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

$$1 = \frac{S}{v_b} - \frac{S}{v_m}$$

$$1 = S \left(\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_m} \right) = S \frac{v_m - v_b}{v_b v_m}$$

$$\frac{v_b v_m}{v_m - v_b} = S$$

$$S \left(\frac{v_m}{v_b} - \frac{v_b}{v_m} \right) = 4y$$



$$v_m^2 = 32y$$

$$25x^2 = 20z$$

$$1 + \frac{y}{z} = \frac{15x}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$yz = \frac{15xy - xz}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 3^{14} \cdot 7^{15}$
 $bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$
 $ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$

$(abc)^2: 3^{14+19+23} \cdot 7^{30+42} = 3^{56} \cdot 7^{72}$

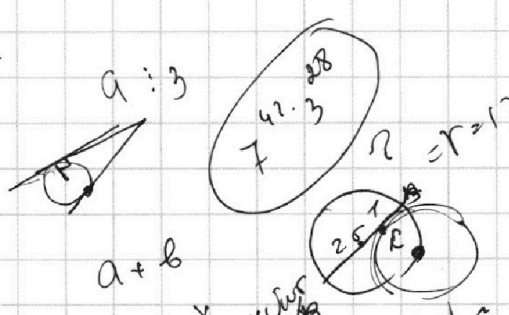
$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-7ab}$
 $\frac{a+b}{(a-b)^2-7ab} = 1$

$a: 3^{14}$
 $c: 3^9$
 $b: 3^5$
 $a: 7^{13}$
 $b: 7^6$
 $c: 7^{14}$

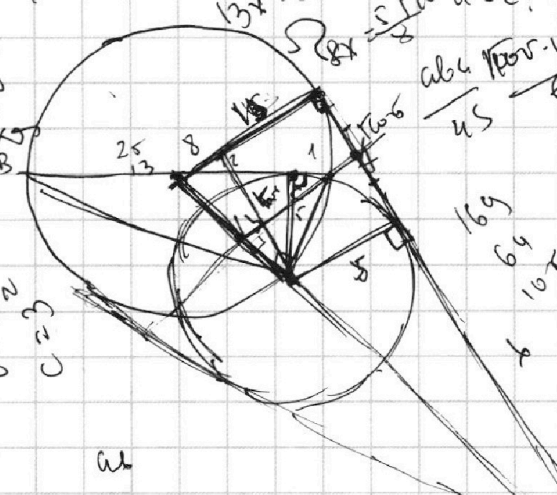
$abc: 3^{28} \cdot 7^{36}$
 $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$
 $abc: 3^{28}$
 $ab = 3^{14} \cdot 7^{13} k_1$
 $bc = 3^{19} \cdot 7^{17} k_2$
 $ac = 3^{23} \cdot 7^{42} k_3$

$k_1, k_2, k_3 \geq 1$
 $\frac{1+2}{1+2-36} = \frac{3}{-31}$
 $\frac{2+3}{4+9-239} = \frac{5}{-236}$

$2(x+y+z)$
 $x \geq 14$
 $x+2 \geq 19$
 $x+2 \geq 23$
 $a=3^x$
 $b=3^y$
 $c=3^z$
 28



$a+b$
 $\frac{x}{a-b} = \frac{4 \cdot 28}{13}$
 $13x = 5x + 5 \cdot 28$
 $8x = 140$
 $x = 17.5$



$(abc)^2 = 3^{14+19+23} \cdot 7^{72} \cdot k_1 k_2 k_3$
 $abc = 7^{36} \cdot 3^{28} \sqrt{k_1 k_2 k_3}$
 $ac: 242 \rightarrow 7+9,6+11,6$
 $abc: 7 \cdot 11$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 6}{36} = \frac{-25 \cdot 7 \cdot 2}{2612} = \frac{47}{12}$

$3x^2 - 5x + 6 - \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}$
 $(a+b; (a+b)^2-11ab) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 6}{936}$
 $= (a+b; -11ab) = \frac{25-4 \cdot 6 \cdot 3}{936}$

$\frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6}{0} = \frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{0} = \frac{-5 \cdot 2}{63}$
 $\frac{-5+12}{3} = \frac{7}{3}$
 $\frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{6}$

$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 =$
 $= (5-6x)(1 + \sqrt{\quad})$
 $-6x + 5 = (5-6x)(1 + \sqrt{\quad})$
 $1 = \sqrt{\quad}$

$5-6x=0$
 $5=6x \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{s}{v_m} + 1 = \frac{s}{v_6}$$

$$\frac{s}{v_m + 7} + \frac{3}{5} = \frac{s}{v_6 + 7}$$

$$v_6 + v_m = 49$$

$$v_6 = 49 - v_m$$

$$1 = \frac{s}{v_6} - \frac{s}{v_m} = s \left(\frac{1}{v_6} - \frac{1}{v_m} \right) = s \frac{v_m - v_6}{v_6 v_m}$$

$$\frac{v_6 v_m}{v_m - v_6} = 5 = \frac{2v_m(49 - v_m)}{v_m - 49 + v_m} = \frac{2v_m(49 - v_m)}{2v_m - 49}$$

$$2sv_m - 49s = v_m$$

$$\frac{3}{5} = s \left(\frac{1}{v_6 + 7} - \frac{1}{v_m + 7} \right) = \frac{v_m + 7v_6 - 7}{(v_6 + 7)(v_m + 7)}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_m(49 - v_m)}{(v_m + 7)(56 - v_m)} = s \left(\frac{v_m - v_6}{(v_6 + 7)(v_m + 7)} \right) = \frac{v_m - 49 + v_m}{(v_m + 7)(56 - v_m)} = \frac{2v_m - 49}{(v_m + 7)(56 - v_m)}$$

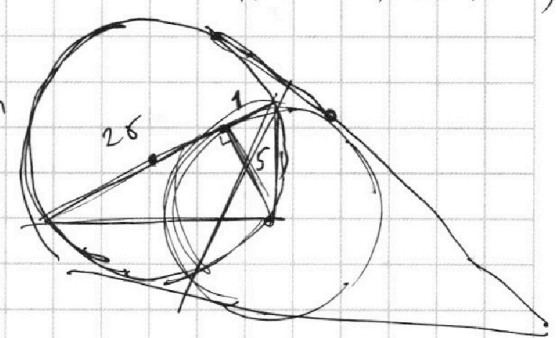
$$3(v_m + 7)(56 - v_m) = 5v_m(49 - v_m)$$

$$-3v_m^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49v_m = -5v_m^2 + 5 \cdot 49v_m$$

$$2v_m^2 - 2 \cdot 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0$$

$$v_m^2 - 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

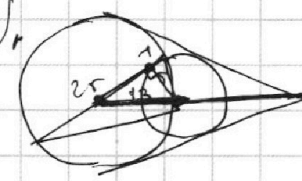
$$D = 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7^2 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$



$$v_m = \frac{49 \pm 7}{2} = \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 = v_r$$

$$v_m < 49$$

$$\frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$



$$5x - y = 32$$

$$5x - 32 = y$$

$$25x^2 + y^2 = 64xy$$

$$25x^2 + (5x - 32)^2 = 64xy$$

$$25x^2 + 25x^2 - 320x + 1024 = 64xy$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 64xy$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 64x(5x - 32)$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 320x^2 - 2048x$$

$$-270x^2 + 1728x - 1024 = 0$$

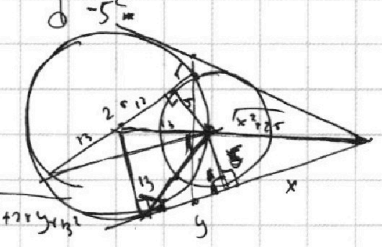
$$270x^2 - 1728x + 1024 = 0$$

$$x^2 - 6.4x + 3.8 = 0$$

$$x = \frac{6.4 \pm \sqrt{6.4^2 - 4 \cdot 3.8}}{2} = \frac{6.4 \pm \sqrt{41.04 - 15.2}}{2} = \frac{6.4 \pm \sqrt{25.84}}{2} = \frac{6.4 \pm 5.08}{2}$$

$$x = \frac{1.32}{2} = 0.66$$

$$y = 5 \cdot 0.66 - 32 = 3.3 - 32 = -28.7$$



$$\frac{x}{5} = \frac{y+9}{13}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+y}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{aligned} S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \\ S \left(\frac{v_M}{v_B} - \frac{v_B}{v_M} \right) &= 4g \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} &= \frac{S}{v_B + 7} \end{aligned} \right.$$

$$S \left(\frac{1}{v_B + 7} - \frac{1}{v_M + 7} \right) = S \frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_B v_M (v_M - v_B)}{(v_M - v_B)(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_M^2 v_B}{v_M - v_B} - \frac{v_B^2}{v_M - v_B} = 4g$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$3(v_M v_B + 7v_M + 7v_B + 49) = 5v_M v_B$$

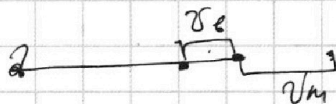
$$v_M^2 - v_B^2 = 4g(v_M - v_B) \quad 21v_M + 21v_B + 3 \cdot 4g - 2v_B v_M = 0$$

$$v_M^2 - 4g v_M + 2v_B(v_B + 4g) = 0 \quad v_M(21 - 2v_B) = -21v_B - 3 \cdot 4g$$

$$D = 4g^2 + 4(v_B^2 - 4g v_B) \quad v_M = \frac{3 \cdot 4g + 21v_B}{2v_B - 21} = \frac{21(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$-v_B^2 + 4g v_B \quad 4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2 \quad \frac{4g + \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2} = \frac{4g(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$v_M = \frac{4g + \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2}$$



$$\frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \quad v_M - v_B$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_B + v_M &= 4g & v_B &= 4g - v_M \\ S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} & &= \frac{(4g - v_M)(v_M)}{v_M - 4g + v_M} = \frac{v_M(4g - v_M)}{2v_M - 4g} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{2v_M - 4g}{v_M(4g - v_M)} = \frac{2v_M - 4g}{(v_M + 7)(56 - v_M)}$$

$$v_M = 4g - v_B$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{56 - v_M} - \frac{S}{v_M + 7}$$

$$\frac{3}{5^2} S \left(\frac{v_M + 7 + v_M - 56}{(v_M + 7)(56 - v_M)} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x - 3y = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 = (32 + y)^2 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 7y \\ 6241 \\ \hline 3420 \\ \hline 2821 \\ \hline 553 \\ \hline 6241 \end{array}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 32^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 32^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 32^2} = 2 \cdot \frac{4z^2 + 3yz}{y^2 + 32^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{3z^2 + y^2 + z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 32^2} = 2 \left(1 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 32^2} \right) = 2 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 32^2}$$

$$6yz + xz = 15xy$$

$$xz = 8yz - 15xy$$

$$xy = y(8z - 15x)$$

$$xz = (15x - 32)(8z - 15x)$$

$$5 \cdot 8xz - 5 \cdot 15x^2 - 24z^2 + 3 \cdot 15xz = \frac{-10z^2 - 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz} = -10 \frac{z^2 + 3xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$5(8z + 9) + 3 \cdot 15xz = 10 \cdot z + 5 \cdot 77 \cdot 3xz$$

$$xz = -24z^2 - 5 \cdot 15x^2 + 517xz$$

$$3 \cdot 15x + 5 \cdot 8 \quad xy = \frac{24z^2 + 5 \cdot 15x^2}{5 \cdot 17 - 1}$$

$$\sqrt{(9+8)} \quad 17$$

$$y = \frac{xz}{15x - 8z} = 5x - 32$$

$$15x - 8z \quad xz = (5x - 32)(5x - 8z)$$

$$xz = 5$$

29
29
31
31
31
31
93
961
2 43
2^2 \cdot 43^2 - 2^2 \cdot 24 \cdot 75
2^2(43^2 - 24 \cdot 75)

$$43^2 - 24 \cdot 75$$

$$43 \cdot 40 + 43 = 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 = 1600 + 120 + 1209 = 9 \cdot 200 = 1800$$

$$\begin{array}{r} 25x^2 + 12z^2 - 30xz \\ \hline 24 \\ \hline 75 \\ \hline 120 \\ \hline 168 \\ \hline 1800 + 172 \\ \hline 1899 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 172 \\ \hline 1899 \\ \hline 18 \\ \hline 29 \\ \hline 162 \\ \hline 36 \\ \hline 515 \end{array}$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$75 = 5 \cdot 15$$

$$40 \cdot 3 \cdot 15 = 120 \cdot 5$$

$$12 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

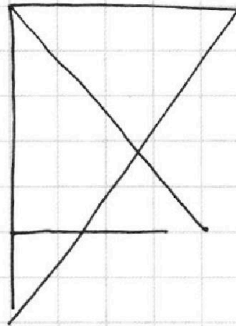
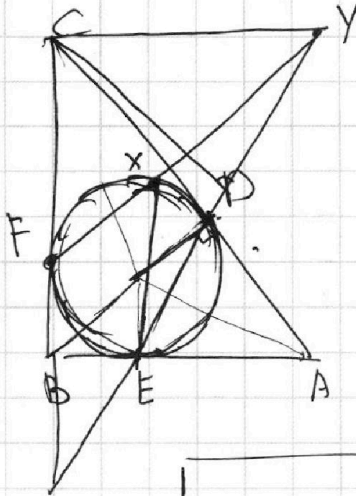
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

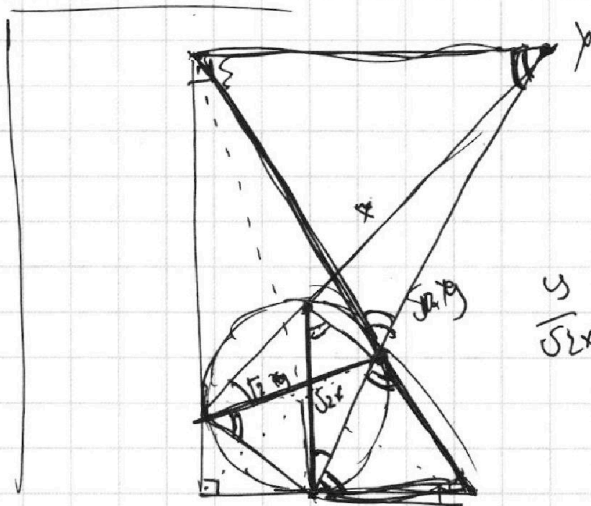
Задача № 7



$$y \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$

$$y \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$

$$\sqrt{2} \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$



$$\frac{y}{\sqrt{2}x}$$