



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1

Пусть  $ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot k_1$ ,  $ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot k_2$ ,  $bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_3$ , где  $k_1, k_2$  и  $k_3$  — это натуральные числа (в силу делимости). Тогда  $a \cdot b \cdot c$

$$a \cdot c = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot$$

$$3^{56} \cdot 7^{72} \Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}, \text{ так как } k_1, k_2, k_3 \text{ каждое из них натуральное} \Rightarrow k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, k_3 \geq 1 \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}.$$

Пусть  $a: 3^x$  (где  $x$  — это максимальная степень, которая воз-  
можна), аналогично  $b: 3^y$ ,  $c: 3^z$ , тогда  $x+y \geq 14$ ;

$$x+z \geq 23; y+z \geq 19 \text{ (из делимости)} \Rightarrow \text{ждет все сложим)}$$

$$2(x+y+z) \geq 19+14+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{19+14+23}{2} = 28 \Rightarrow abc: 3^{28}$$

$$\text{Так } ac: 7^{42}, \text{ а } b \geq 1 \text{ (так натурально)} \Rightarrow abc: 7^{42}, \text{ получим}$$

$$\text{(так } 3 \text{ и } 7 \text{ взаимно просты), что } abc: 7^{42} \cdot 3^{28} \Rightarrow abc \geq 7^{42} \cdot 3^{28}$$

Приведем пример, что  $abc = 7^{42} \cdot 3^{28}$  возможно.  $a = 3^9 \cdot 7^{21}$ ;

$$b = 3^5; c = 3^{14} \cdot 7^{21}, \text{ тогда } abc = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 3^9 \cdot 7^{21} \cdot 7^{21} = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{и } ab = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21}, \text{ пусть } ab: 3^{14} \cdot 7^{13}; ac = 4^{21} \cdot 7^{21}.$$

$$\cdot 3^{14} \cdot 3^9 = 7^{42} \cdot 3^{23} \Rightarrow ac: 3^{23} \cdot 7^{42}; bc = 3^5 \cdot 3^{14} \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21} \Rightarrow$$

$$bc: 3^{19} \cdot 7^{21}.$$

Ответ:  $7^{42} \cdot 3^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-11ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}. \text{ Рассмотрим НОД}$$

(наибольший общий делитель)  $a+b$  и  $(a+b)^2-11ab$ , тогда:

$$\text{НОД}(a+b; (a+b)^2-11ab) = x \text{ (то есть } a+b: x \text{ и } (a+b)^2-11ab: x,$$

но так  $a+b: x \Rightarrow -11ab: x$ , а потому того, что  $a+b$  и  $ab$

(больше 0)  $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow$  раз  $-11ab: x$ , то  $11ab: x$ )

$$\text{НОД}(a+b; -11ab+(a+b)^2) = \text{НОД}(a+b; 11ab) = x, \text{ так } \frac{a}{b} \text{ не}$$

сократима вробль  $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$  (то есть  $a/b$  и  $b/a$ )

если  $a+b \nmid 11$  ( ~~$a+b$  не делится на 11~~) заметим, что  $a+b \nmid a$   
и  $a+b \nmid b$  ( $a+b$  не делится ни на  $a$ , ни на  $b$ ), так  $a: a$ ,  $ab: a \Rightarrow$

$$a+b \nmid a \text{ (аналогично с } b). \text{ Значит } \text{НОД}(a+b; 11ab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b; 11), \text{ важно заметить, что если } a+b: 11, \text{ тогда}$$

$$\text{НОД}(a+b; 11) = 11 \text{ (пример, что при этом } \frac{a}{b} \text{ несократимо.}$$

$$a=5, b=6), \text{ а если } a+b \nmid 11 \Rightarrow 11\text{-простое, а } a+b \nmid 11 \Rightarrow$$

$$\text{НОД}(a+b; 11) = 1.$$

Ответ:  $m=11$ , при  $a+b: 11$ , иначе  $m=1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

Решим уравнения  $3x^2 - 5x + 6 = 0$  и  $3x^2 + x + 1 = 0$ , получим соответствующие  $D_1 = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47$  (то есть  $D_1 < 0$ ) и  $D_2 = 1 - 4 \cdot 3 = -11$ ;

то есть  $D_2 < 0$ , так  $D_1$  и  $D_2$  меньше 0 и коэффициенты при  $x^2$  в обоих уравнениях положительны (то есть парабола ветви вверх), значит при любых  $x$  уравнение  $3x^2 - 5x + 6 > 0$  и  $3x^2 + x + 1 > 0$ . Так выражение под корнем <sup>высчитаем</sup> положительное  $\Rightarrow$  корни двух корней положительны (получим  $4 \pm \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$ )

получим  $3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$   
 $-6x + 5 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$  Один корень уравнения:

$5 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$  (он под корнем ветви положительной  $\Rightarrow$  можно не проверять). Далее считаем что  $x \neq \frac{5}{6}$ , тогда разделим на

$5 - 6x$ , получим:  $1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \Rightarrow 1 - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$

~~тогда  $\sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1$  (имеем положительный корень отрицательного)~~

~~$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1 \Rightarrow 3x^2 + x \leq 0 \Rightarrow x(3x + 1) \leq 0$  (решаем неравенство~~

~~на  $x \in [-\frac{1}{3}; 0]$  тогда возведем в~~

~~квадрат:  $1 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6 \Rightarrow -2\sqrt{3x^2 + x + 1} = -2(3x - 2)$~~

~~(разделим на  $-2$ )  $\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$  ( $3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$ ) возведем в квадрат~~

~~$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x \Rightarrow 6x^2 - 13x + 3 = 0 \Rightarrow$~~

~~$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$  (можно не подсчитывать, так как корнем ветви положительной)~~

Ответ:  $\frac{5}{6}$ ;  $\frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

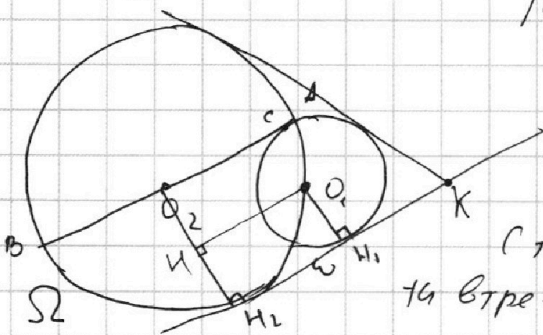
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 4



Пусть центры окр.  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно  $O_1$  и  $O_2$  (см. рис.), тогда

т.к.  $AB$  диаметр  $\Rightarrow$  он проходит через  $O_2$ , и т.к.  $AB$  касательная к  $\omega$  и

с точкой касания  $\Rightarrow O_1C \perp AB$  ( $O_1C$  - радиус

и втрое-ке  $\angle O_1CB = 90^\circ$ , т.к. опирается

на диаметр в окр.  $\Omega$ , тогда из соотношений в

крив. тре-ке ( $\triangle O_1CB$ )  $h = \sqrt{ac \cdot bc}$  ( $O_1C$  как ст. кас.  $\Rightarrow O_1C$  как радиус  $\Omega$ )

это и радиус окр.  $\omega$ )  $= \sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5$ .  $O_2A = O_2B =$

$= \frac{AC + CB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{1 + 25}{2} = 13$ . Пусть  $H_1$  и  $H_2$  это перпендикуляры

на общую касательную (на ось)  $H_1$  из  $O_1$  и  $H_2$  из  $O_2$ . Т.к.

$O_1H_1$  и  $O_2H_2$  перпендикуляры к касательной (к одной прямой)  $\Rightarrow$

$O_1H_1 \parallel O_2H_2 \Rightarrow O_1, H_1, H_2, O_2$  - это <sup>тр. перпен.</sup> ~~прямоуг.~~ (прямоугольн. тр. перпен. т.к.  $O_1H_1 \perp O_2H_2$

и прямоуг. т.к.  $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ$ ). Пусть  $O_1H_1 \perp O_2H_2$ , тогда т.к.  $O_1H_1 \parallel H_2H_1$

(т.к. перпендикуляры одной прямой) и  $H_1O_1 \parallel H_2H_1$  (указано выше),

$H_1O_1 = H_2H_1$  значит  $H_1O_1, H_2H_1$  - параллелограмм / ось  $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ \Rightarrow$  прямоугольник)

Значит  $O_1H_1 = H_2H_1 = \phi$  ~~радиус~~ радиус  $\Rightarrow O_1H_1 = O_1C = 5 \Rightarrow$

$H_2H_1 = 5 \Rightarrow O_2H_2$  (т.к.  $O_2H_2$  - радиус  $\Rightarrow O_2H_2 = 13$ )  $= O_2H_2 - H_2H_1 =$

$= 13 - 5 = 8$ . Т.к.  $\angle O_1H_1O_2 = 90^\circ \Rightarrow O_1H_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H_2^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$ .

Пусть  $k$  точка пересечения одной касательной окр.  $\Rightarrow k, O_1, O_2$  колл.

на одной прямой, значит (по двум углам / по двум углам  $\angle kH_2O_2 =$

$= 90^\circ = \angle kH_1O_1$ )  $\triangle kO_1H_1 \sim \triangle kO_2H_2 \Rightarrow \frac{kH_2}{kH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow$

$$\frac{kH_2}{kH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow kH_2 \cdot O_1H_1 = O_2H_2 \cdot kH_1 = O_2H_2 \cdot kH_1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №4.

$$k u_2 (0,4 u_1 - 0,2 u_2) = -0,2 u_2$$

$$\frac{k u_1 + u_1 u_2}{k u_1} = \frac{0,2 u_2}{0,4 u_1} \Rightarrow k u_1 \cdot 0,4 u_1 + u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1 = 0,2 u_2 \cdot k u_1$$

$$k u_1 (0,4 u_1 - 0,2 u_2) = -u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1$$

$$k u_1 = \frac{-u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1}{0,4 u_1 - 0,2 u_2} = \frac{u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1}{0,2 u_2 - 0,4 u_1} = \frac{1105 \cdot 5}{13 - 5} = \frac{51105}{8}$$

$$k u_2 = k u_1 + u_1 u_2 = 1105 + \frac{51105}{8} = \frac{81105 + 51105}{8} = \frac{132210}{8}$$

Ответ:  $\sqrt{1105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15}{z} - \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15x - 8z}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ y = \frac{2x}{15x - 8z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x^2 - 9z^2 - 30xz \\ y^2 + 3z^2 \end{cases}$$

$$\frac{2x}{15x - 8z} = 5x - 3z \Rightarrow 2x = (5x - 3z)(15x - 8z) \Rightarrow$$

$$2x = 5 \cdot 15x^2 + 24z^2 - 3 \cdot 15xz - 8 \cdot 5z \cdot x$$

$$75x^2 + 24z^2 - 86xz = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{86z \pm \sqrt{86^2z^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24z^2}}{2 \cdot 75} =$$

$$= \frac{86z \pm 2\sqrt{86^2 - 4 \cdot 24 \cdot 75}}{2 \cdot 75} = \frac{z(86 \pm 7)}{2 \cdot 75}$$

$$x_1 = \frac{93z}{2 \cdot 75} \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{79z}{2 \cdot 75}$$

Рассмотрим 2 случая и выведем, который больше:

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - (25x^2 - 9z^2 - 30xz) - z^2}{y(25x^2 + 9z^2 - 30xz) + 3z^2} = \frac{-10z^2 - 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$= -10z \cdot \frac{z + 3x}{12z^2 + 25x^2 - 30xz}$$

$$1) \quad x = \frac{93z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - 3 \cdot \frac{93z}{2 \cdot 75}}{12z^2 + 25 \cdot \frac{93^2z^2}{4 \cdot 75^2} - \frac{30 \cdot 93z^2}{2 \cdot 75}} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{3 \cdot 93}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{3 \cdot 93}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{43}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5}}$$

$$2) \quad x = \frac{79z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - \frac{79 \cdot 3z}{2 \cdot 75}}{12z^2 + \frac{25 \cdot 79^2}{4 \cdot 75^2}z^2 - \frac{30 \cdot 79}{2 \cdot 75}z^2} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{79}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{29}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи № 5.

Надо сравнить 1000 и 200 случаев:

$$10 \cdot \frac{43}{50 \left( 12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5} \right)}$$

$$\frac{43}{12 \cdot 50 + \frac{31^2}{2} - 930}$$

$$\frac{43}{10(12 \cdot 5 - 93) + \frac{31^2}{2}} = \frac{43}{\frac{31^2}{2} - 330}$$

$$\frac{43}{150,5} = \frac{86}{301}$$

$$86 \cdot 2821 = 243 \cdot 2821$$

$$43 \cdot 2821$$

$$43 \cdot 2821 > 43 \cdot 2709 = 43 \cdot$$

$$\cdot 301 \cdot 9$$

$$43$$

>

$$29$$

$$y = 5x - 3z \sqrt{\quad}$$

Значит, имеем еще 301 человек при

$$x = \frac{792}{150} \text{ бюджет } \frac{29 \cdot 18 \cdot 10}{2821} = \frac{522}{2821}$$

Ответ:  $\frac{522}{2821}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

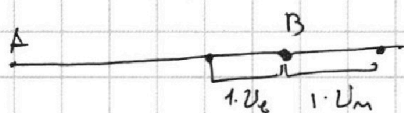
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №6.

Пусть  $S$  - это расстояние от  $A$  до  $B$  (измеряется в км),  $v_B$  - это скорость велосипедиста (измеряется в  $\frac{км}{ч}$ ) и  $v_M$  - это скорость мотоциклиста (измеряется в  $\frac{км}{ч}$ ). Рассмотрим утверждение после того, как мотоциклист приехал из точки  $B$  к велосипедисту (то есть со слов "Если бы велосипедист..."). То же утверждение от  $A$  до  $B$  велосипедисту требуется на час больше чем мотоциклисту, то



Эти часы равны  $1 \cdot v_M + 1 \cdot v_B = v_M + v_B$

$$\begin{cases} \frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B} \\ v_M + v_B = 49 \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} \end{cases}$$

Составим систему уравнений (время =  $\frac{\text{пути}}{\text{скорость}}$ )

(где  $v_B, v_M, S$  это числ. величины, характеризующие гонимую и скорость, значит

$v_B, v_M, S > 0$  (какие по отдельности), а так

$$v_M + v_B = 49 \Leftrightarrow (v_M = 49 - v_B) \quad v_M < 49 \quad v_B < 49,$$

так мотоциклист прибывает первым  $\Rightarrow$

$$v_B < v_M). \quad \frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B} \Rightarrow 1 = S \left( \frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_M} \right) \Rightarrow S = \frac{v_M - v_B}{v_B \cdot v_M} = 1 \Rightarrow$$

$$(\text{так } v_M + v_B = 49 \Rightarrow$$

$$v_B = 49 - v_M)$$

$$S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{(49 - v_M) v_M}{v_M - 49 + v_M} = \frac{v_M (49 - v_M)}{2v_M - 49}$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} - \frac{S}{v_M + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = S \left( \frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \cdot \frac{(v_M - v_B)}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{(49 - v_M) v_M}{(v_M + 7)(56 - v_M)}$$

$$3(v_M + 7)(56 - v_M) = 5v_M(49 - v_M) \Rightarrow -3v_M^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49v_M =$$

$$= -5v_M^2 + 5 \cdot 49v_M \Rightarrow 2v_M^2 - 2 \cdot 49v_M + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow$$

$$v_M^2 - 49v_M + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7^2 \cdot 3 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$

$$v_{M1} = \frac{49 + 7}{2} \Rightarrow v_{M1} = \frac{49 + 7}{2} = 28 \frac{км}{ч} \quad \text{или} \quad v_{M2} = \frac{49 - 7}{2} = 21 \frac{км}{ч}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение задачи № 6

Пк  $v_B = v_M + 49$ , то при  $v_M = 21$ ,  $v_B = 28 \Rightarrow v_B > v_M$ , если же  
покажем обратное  $\Rightarrow v_M = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ,  $v_B = 49 - 28 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

$$\text{Тогда } S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = \frac{7^2 \cdot 4 \cdot 3}{7} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 21 \cdot 4 = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

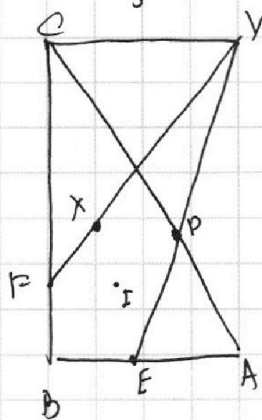
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача N=7



Степень точки Y относительно вписанной  
окружности:  $YX \cdot YF = YD \cdot YE$  или же

$\sqrt{2} \cdot EX \cdot YF = YD \cdot YE$ , т.к. омп касается  
в точках O и E  $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \angle EDA =$

$\angle DEA$ , т.к.  $\angle CDO$  и  $\angle EDA$  верт.  $\Rightarrow$

$\angle EDA = \angle DEA$ , а т.к.  $\angle YED + \angle CDA = 90^\circ = 90^\circ =$

$= 180^\circ \Rightarrow CY \parallel BA \Rightarrow \angle CYD = \angle DEA \Rightarrow CD = CY$ . А  $\angle EFD =$

$\angle EXD$  (т.к. опираются на одну дугу),  $\angle DEA = \angle DFE$  как

углы между касательной и хордой.  $\angle YED = \angle DFX$

как углы опирающиеся на одну дугу,  $\angle FYE$  общий  $\Rightarrow$

$\triangle FYD \sim \triangle FYX \Rightarrow \frac{FX}{FY} = \frac{FY}{FY} \Rightarrow FD = \sqrt{2} YD$ . В сте-

пень точки Y подставим и получим:  $2 EX \cdot YF = FD \cdot YE$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5-6x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})$$

$$-6x + 5 = (5-6x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}) \text{ если } 5-6x=0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases} \left| \begin{array}{l} 25 \\ 72 \\ 25 \\ 47 \end{array} \right.$$

или

$$1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 26 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 52 \\ 13 \\ \hline 65 \\ 13 \\ \hline 78 \\ 13 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$1 + 3x^2 + x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6$$

$$2(1 + \sqrt{3x^2 + x + 1}) = -6x + 6$$

$$1 + \sqrt{3x^2 + x + 1} = -3x + 3$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x$$

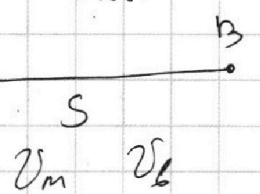
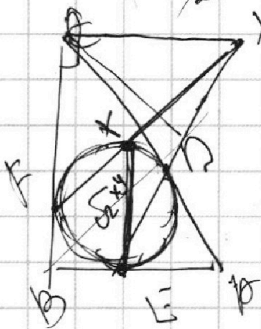
$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 169 - 72 = 97$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 60 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$$3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6$$



$$\frac{S}{V_M} + 1 = \frac{S}{V_B}$$

$$\frac{S}{V_B} \cdot V_M - \frac{S}{V_M} \cdot V_B = 4y$$

$$\frac{S}{V_M + 1} + \frac{3}{5} = \frac{S}{V_B + 7}$$

$$25x^2 = 9z^2 + y^2 = 6zy$$

$$25x^2 - y^2 - 9z^2 = -6zy$$

$$-6zy + 8z^2$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$8 + \frac{x}{y} = \frac{15x}{2y}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$yz = \frac{15xy - xz}{8}$$

$$3x^2 + x + 1 \leq 1$$

$$x(3x + 1) \leq 0$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

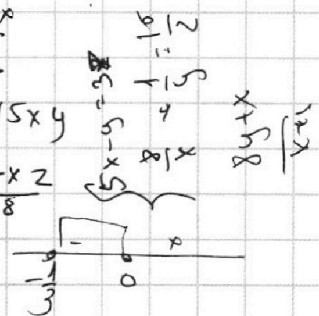
$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

$$1 = \frac{S}{V_B} - \frac{S}{V_M}$$

$$1 = S \left( \frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M} \right) = S \frac{V_M - V_B}{V_B V_M}$$

$$\frac{V_B V_M}{V_M - V_B} = S$$

$$S \left( \frac{V_M}{V_B} - \frac{V_B}{V_M} \right) = 4y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 3^{14} \cdot 7^{15}$   
 $bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$   
 $ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$

$(abc)^2: 3^{14+19+23} \cdot 7^{30+42} = 3^{56} \cdot 7^{72}$

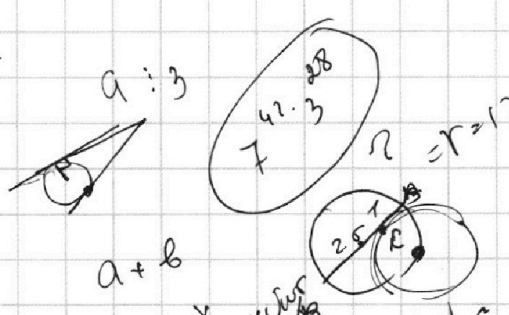
$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-7ab}$   
 $\frac{a+b}{(a-b)^2-7ab} = 1$

$a: 3^{14}$   
 $c: 3^9$   
 $b: 3^5$   
 $a: 7^{13}$   
 $b: 7^6$   
 $c: 7^{14}$

$abc: 3^{28} \cdot 7^{36}$   
 $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$   
 $abc: 3^{28}$   
 $ab = 3^{14} \cdot 7^{13} k_1$   
 $bc = 3^{19} \cdot 7^{17} k_2$   
 $ac = 3^{23} \cdot 7^{42} k_3$

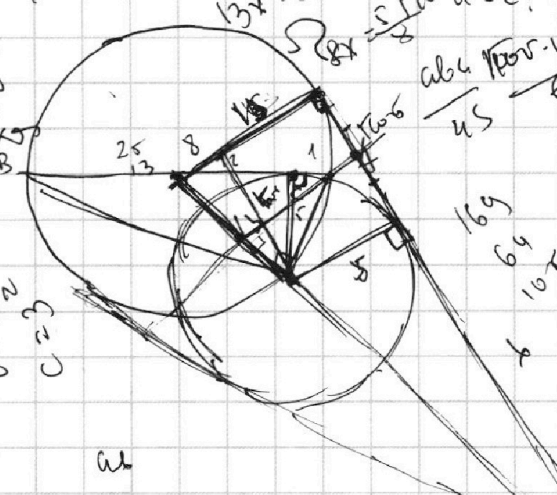
$k_1, k_2, k_3 \geq 1$   
 $\frac{1+2}{1+2-36} = \frac{3}{-31}$   
 $\frac{2+3}{4+9-239} = \frac{5}{-236}$

$2(x+y+z)$   
 $x \geq 14$   
 $x+2 \geq 19$   
 $x+2 \geq 23$   
 $a=3^x$   
 $b=3^y$   
 $c=3^z$   
 $28$



$a+b$   
 $\frac{x}{5} = \frac{4 \cdot 28}{13}$   
 $\frac{a-b}{5} = \frac{5x+5}{13}$   
 $13x = 5x+5$   
 $8x = 5$   
 $x = \frac{5}{8}$   
 $abc: 7^{42}$   
 $abc: 7^{42} \rightarrow 7+9,6+11,6$   
 $abc: 7^{42}$   
 $abc: 7^{42}$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 6}{36} = \frac{-25 \cdot 7 \cdot 2}{36}$   
 $\frac{-5^2 \cdot 3 + 6 \cdot 12 \cdot 5}{2612} = \frac{47}{12}$



$3x^2 - 5x + 6 - \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-11ab}$   
 $(a+b; (a-b)^2-11ab) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 6}{936}$   
 $= (a+b; -11ab) = \frac{25-4 \cdot 6 \cdot 3}{936}$   
 $(5+6)^2 - 11 \cdot 5 \cdot 6 = (a+b)^2 - 11ab - (a+b)^2$   
 $= (a+b; -11ab)$   
 $(a, b) = 1$   
 $\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5 + 6}{0} = \frac{-5 \cdot 2}{63}$   
 $\frac{-5+12}{3} = \frac{7}{3}$

$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 =$   
 $= (5-6x)(1 + \sqrt{\quad})$   
 $-6x + 5 = (5-6x)(1 + \sqrt{\quad})$  при  $5-6x=0$   
 $1 = \sqrt{\quad}$   
 $5=6x \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{s}{v_m} + 1 = \frac{s}{v_6}$$

$$\frac{s}{v_m + 7} + \frac{3}{5} = \frac{s}{v_6 + 7}$$

$$v_6 + v_m = 49$$

$$v_6 = 49 - v_m$$

$$1 = \frac{s}{v_6} - \frac{s}{v_m} = s \left( \frac{1}{v_6} - \frac{1}{v_m} \right) = s \frac{v_m - v_6}{v_6 v_m}$$

$$\frac{v_6 v_m}{v_m - v_6} = 5 = \frac{2v_m(49 - v_m)}{v_m - 49 + v_m} = \frac{2v_m(49 - v_m)}{2v_m - 49}$$

$$2sv_m - 49s = v_m$$

$$\frac{3}{5} = s \left( \frac{1}{v_6 + 7} - \frac{1}{v_m + 7} \right) = \frac{v_m + 7v_6 - 7}{(v_6 + 7)(v_m + 7)}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_m(49 - v_m)}{(v_m + 7)(56 - v_m)} = s \left( \frac{v_m - v_6}{(v_6 + 7)(v_m + 7)} \right) = \frac{v_m - 49 + v_m}{(v_m + 7)(56 - v_m)} = \frac{2v_m - 49}{(v_m + 7)(56 - v_m)}$$

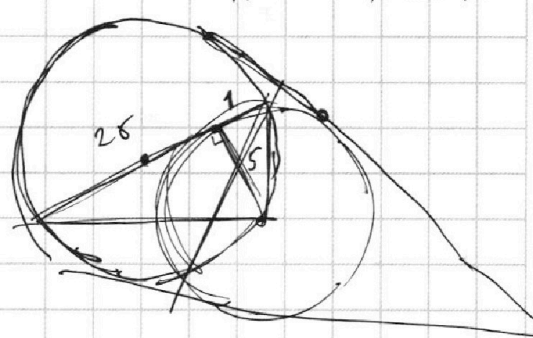
$$3(v_m + 7)(56 - v_m) = 5v_m(49 - v_m)$$

$$-3v_m^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49v_m = -5v_m^2 + 5 \cdot 49v_m$$

$$2v_m^2 - 2 \cdot 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0$$

$$v_m^2 - 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

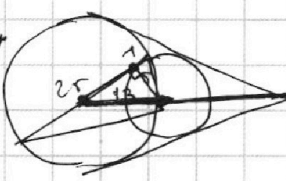
$$D = 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7^2 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$



$$v_m = \frac{49 \pm 7}{2} = \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 = v_r$$

$$v_m < 49$$

$$\frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$



$$5x - y = 32$$

$$5x - 32 = y$$

$$25x^2 + y^2 = 64xy$$

$$25x^2 + (5x - 32)^2 = 64xy$$

$$25x^2 + 25x^2 - 320x + 1024 = 64xy$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 64xy$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 64x(5x - 32)$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 320x^2 - 2048x$$

$$-270x^2 + 1728x - 1024 = 0$$

$$270x^2 - 1728x + 1024 = 0$$

$$x^2 - 6.4x + 3.8 = 0$$

$$x = \frac{6.4 \pm \sqrt{6.4^2 - 4 \cdot 3.8}}{2}$$

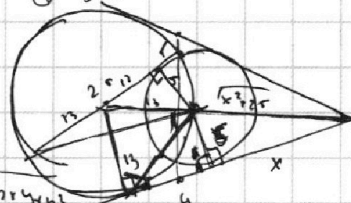
$$x = \frac{6.4 \pm \sqrt{41.0 - 15.2}}{2}$$

$$x = \frac{6.4 \pm \sqrt{25.8}}{2}$$

$$x = \frac{6.4 \pm 5.1}{2}$$

$$x = \frac{1.3}{2} = 0.65$$

$$y = 5x - 32 = 3.25 - 32 = -28.75$$



$$\frac{x}{5} = \frac{xy}{13}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+y}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{aligned} S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \\ S \left( \frac{v_M}{v_B} - \frac{v_B}{v_M} \right) &= 4g \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} &= \frac{S}{v_B + 7} \end{aligned} \right.$$

$$S \left( \frac{1}{v_B + 7} - \frac{1}{v_M + 7} \right) = S \frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_B v_M (v_M - v_B)}{(v_M - v_B)(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_M^2 v_B}{v_M - v_B} - \frac{v_B^2}{v_M - v_B} = 4g$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$3(v_M v_B + 7v_M + 7v_B + 49) = 5v_M v_B$$

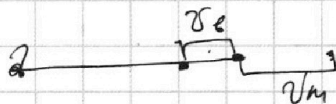
$$v_M^2 - v_B^2 = 4g(v_M - v_B) \quad 21v_M + 21v_B + 3 \cdot 4g - 2v_B v_M = 0$$

$$v_M^2 - 4g v_M + 2v_B(v_B + 4g) = 0 \quad v_M(21 - 2v_B) = -21v_B - 3 \cdot 4g$$

$$D = 4g^2 + 4(v_B^2 - 4g v_B) \quad v_M = \frac{3 \cdot 4g + 21v_B}{2v_B - 21} = \frac{21(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$-v_B^2 + 4g v_B \quad 4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2 \quad \frac{4g + \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2} = \frac{4g(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$v_M = \frac{4g + \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2}$$



$$\frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \quad v_M - v_B$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_B + v_M &= 4g & v_B &= 4g - v_M \\ S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{(4g - v_M)v_M}{v_M - 4g + v_M} = \frac{v_M(4g - v_M)}{2v_M - 4g} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{2v_M - 4g}{v_M(4g - v_M)} = \frac{2v_M - 4g}{(v_M + 7)(56 - v_M)}$$

$$v_M = 4g - v_B$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{56 - v_M} - \frac{S}{v_M + 7}$$

$$\frac{3}{5^2} S \left( \frac{v_M + 7 + v_M - 56}{(v_M + 7)(56 - v_M)} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x - 3y = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 = (32 + y)^2 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 16 \\ \hline 6241 \\ 74 \\ \hline 3420 \\ \hline 2821 \\ 553 \\ \hline 6241 \end{array}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = 2 \cdot \frac{4z^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{3z^2 + y^2 + z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2} = 2 \left( 1 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2} \right) = 2 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2}$$

$$6yz + xz = 15xy$$

$$xz = 8yz - 15xy$$

$$xy = y(8z - 15x)$$

$$xz = (15x - 32)(8z - 15x)$$

$$5 \cdot 8xz - 5 \cdot 15x^2 - 24z^2 + 3 \cdot 15xz = \frac{-10z^2 - 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz} = -10 \cdot \frac{z^2 + 3xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$5(8z + 9) + 3 \cdot 15xz - 10 \cdot z^2 + 15 \cdot 3xz = -24z^2 - 5 \cdot 15x^2 + 517xz$$

$$3 \cdot 15 + 5 \cdot 8 \quad xy = \frac{24z^2 + 5 \cdot 15x^2}{5 \cdot 17 - 1}$$

$$y = \frac{xz}{15x - 8z} = 5x - 32$$

$$15x - 8z \quad xz = (5x - 32)(15x - 8z)$$

$$xz = 5$$

29  
29  
31  
31  
31  
31  
93  
961  
2 43  
2^2 43^2 - 2^2 24 75  
2^2 (43^2 - 24 75)

$$43^2 - 24 \cdot 75$$

$$43 \cdot 40 + 43 = 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 = 1600 + 120 + 1209 = 9 \cdot 200 = 1800$$

$$\begin{array}{r} 25x^2 + 12z^2 - 30xz \\ 24 \\ \hline 75 \\ 120 \\ \hline 168 \\ 1800 \\ \hline 172 \\ 189 \\ \hline 18 \\ 29 \\ \hline 162 \\ 36 \\ \hline 198 \end{array}$$

330  
1480,5  
100,5  
50 - 93  
50  
50  
72  
19  
10(60-93)

2 43  
2^2 43^2 - 2^2 24 75  
2^2 (43^2 - 24 75)



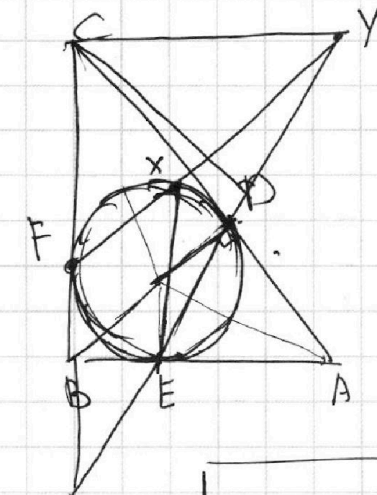
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

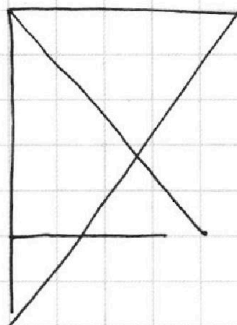
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



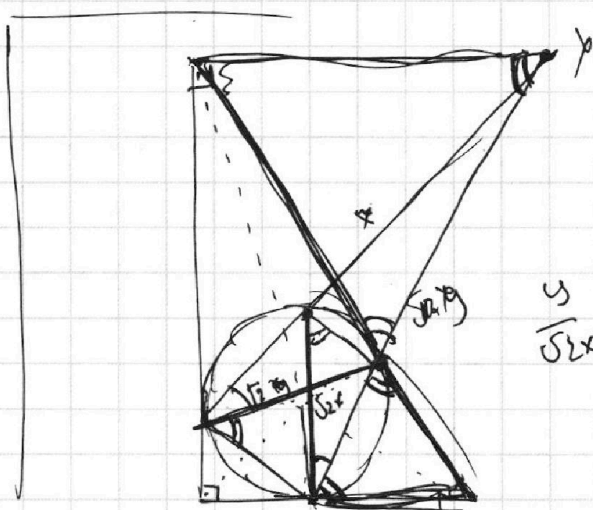
Задача № 7



$$y \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$

$$y \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$

$$\sqrt{2} \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$



$$\frac{y}{\sqrt{2}x}$$