МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам
$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$
Найдите наименьшее возможное значение выражения $\dfrac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Раз $ac \vdots 7^{42}$, то и $abc \vdots 7^{42}$, поскольку $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}$. $ab \vdots 3^{14}, bc \vdots 3^{19}, ac \vdots 3^{23} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac \vdots 3^{14} \cdot 3^{19} \cdot 3^{23} = 3^{56} \Leftrightarrow (abc)^2 \vdots 3^{56} \Leftrightarrow abc \vdots 3^{28}$ (если $abc \not\vdots 3^{28}$, то $abc \cdot abc = (abc)^2 \not\vdots 3^{56}$, что противоречит доказанному). Итак, поскольку $abc \vdots 7^{42}$ и $abc \vdots 3^{28}$, а 7^{42} и 3^{28} взаимно просты, то $abc \vdots 3^{28} 7^{42} \Rightarrow abc \geq 3^{28} 7^{42}$, поскольку a, b и c натуральные. Приведём пример, в котором $abc = 3^{28} 7^{42}$ и условие выполняется: $a = 3^9 7^{21}$, $b = 3^5$, $c = 3^{14} 7^{21}$. Он работает, поскольку:

$ab = 3^{14} 7^{21} \vdots 3^{14} 7^{13}$, $bc = 3^{19} 7^{21} \vdots 3^{19} 7^{17}$, $ac = 3^{23} 7^{42} \vdots 3^{23} 7^{42}$, $abc = 3^{28} 7^{42}$.

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow$ у a и b нет общих делителей. Рассмотрим число m, на которое можно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$. Раз дробь можно сократить на это число, то $a+b \vdots m$ и $a^2-9ab+b^2 \vdots m$. $a^2-9ab+b^2=(a+b)^2-11ab \Rightarrow (a+b)^2-11ab \vdots m \Rightarrow 11ab \vdots m$ (т.к. $a+b \vdots m$). ~~Если $a \vdots m$, то~~

Докажем, что для $m>11$ условия не выполняются. Предположим, что они выполняются. Если $a \vdots m$, то (т.к. у a и b нет общих делителей) $b \not\vdots m \Rightarrow a+b \not\vdots m$, что противоречит доказанному. Аналогично: если $b \vdots m$, то $a \not\vdots m \Rightarrow a+b \not\vdots m$, снова противоречие. Значит, $a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m$. Отсюда следует, что (раз $11ab \vdots m$, но $a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m$) $11 \vdots m$. Но $m>11$, противоречие $\Rightarrow m \leq 11$. Приведём пример, в котором $m=11$: $a=1$, $b=10$. ~~То~~ Он подходит, т.к. дробь $\frac{a}{b}=\frac{1}{10}$ несократима, а числитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}=\frac{1+10}{1-9\cdot1\cdot10+10^2}=\frac{11}{101-90}=\frac{11}{11}$ можно сократить на $m=11$.

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возведём обе части уравнения в квадрат (это преобразование может добавить лишние корни уравнения, но в конце мы сделаем проверку):

$(3x^2-5x+6)+(3x^2+x+1)-2\sqrt{3x^2-5x+6}\cdot\sqrt{3x^2+x+1}=25-60x+36x^2$

$2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}=-30x^2+56x-18$

$\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}=-15x^2+28x-9$

$(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)=(-15x^2+28x-9)^2$ (снова возведим обе части в квадрат)

$9x^4-12x^3+16x^2+x+6=225x^4-84x^3+1054x^2-504x+81$

$216x^4-72x^3+1038x^2-505x+75=0$

$(216x^4-180x^3)+(108x^3-90x^2)+(\cancel{\ldots}\,1128x^2-940x)+(435x$

Преобразуем исходное выражение и возведём обе части в квадрат (это ~~может добавить лишние~~ преобразование неравносильно, и может добавить лишние корни, но в конце мы сделаем проверку):
~~корни, но в конце сделаем проверку~~

$\sqrt{3x^2-5x+6}=(5-6x)+\sqrt{3x^2+x+1}$

$3x^2-5x+6=(5-6x)^2+(3x^2+x+1)+2(5-6x)\sqrt{3x^2+x+1}$

$(5-6x)^2+6x-5+2\sqrt{3x^2+x+1}\,(5-6x)=0$

$(5-6x)(5-6x-1+2\sqrt{3x^2+x+1})=0$

$(5-6x)(6x-4-2\sqrt{3x^2+x+1})=0$

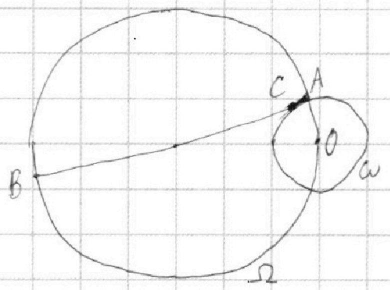
$(5-6x)(3x-2-\sqrt{3x^2+x+1})=0$. Один корень мы нашли — это $x=\frac{5}{6}$ $(5-6x=0)$. Если предположить, что $x\neq\frac{5}{6}$, то: $\sqrt{3x^2+x+1}=3x-2 \Rightarrow 3x^2+x+1=9x^2-12x+4 \Leftrightarrow 6x^2-13x+3=0$. Дискриминант равен $13^2-4\cdot6\cdot3=169-72=97$, значит, корни равны $\frac{13\pm\sqrt{97}}{12}$. Непосредственная проверка показывает, что все три корня подходят.

Ответ: $\left\{\frac{5}{6};\ \frac{13-\sqrt{97}}{12};\ \frac{13+\sqrt{97}}{12}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AC=1$
$BC=25$

Пусть O – центр ω. O лежит на $\Omega \Rightarrow \angle AOB=90^\circ$ (т.к. AB – диаметр Ω). $OC \perp AB$, т.к. OC – радиус, проведённый в точку касания. Значит, OC – высота в прямоугольном треугольнике $AOB \Rightarrow$ $\Rightarrow OC^2 = AC \cdot BC = 1 \cdot 25 = 25 \Rightarrow OC=5$ (т.к. $OC \geqslant 0$). А диаметр Ω равен $AB=AC+BC=1+25=26 \Rightarrow$ радиус Ω равен $\frac{26}{2}=13$. Пусть радиусы ω и Ω – r и R соответственно. Тогда $r=5$, $R=13$. По формуле общей внешней касательной к двум окружностям (общую внутреннюю касательную к ω и Ω провести не удастся, т.к. O лежит на Ω; расстояние между центрами Ω и ω равно R): длина этой касательной равна $\sqrt{R^2-(R-r)^2}=\sqrt{13^2-(13-5)^2}=\sqrt{13^2-8^2}=\sqrt{169-64}=\sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

По условию: (так как $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$, то все проводимые преобразования равносильны)

$$\begin{cases} 5x-y=3z \\ \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=3z+y \\ \frac{40}{5x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=3z+y \\ \frac{40}{3z+y}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}\end{cases}$$

Тогда $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}=\frac{(3z+y)^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}=$

$=\frac{9z^2+6yz+y^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}=\frac{8z^2+6yz}{3z^2+y^2}.$

В уравнении $\frac{40}{3z+y}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}$ домножим обе части на $(3z+y)yz$ и раскроем скобки:

$40yz+1\cdot(3z+y)z=15(3z+y)y \Leftrightarrow 40yz+3z^2+yz=45yz+15y^2 \Leftrightarrow 15y^2+4yz-3z^2=0.$ Поделим равенство на z^2: $15\frac{y^2}{z^2}+4\frac{y}{z}-3=0.$ Пусть $t=\frac{y}{z}$: $15t^2+4t-3=0.$ Дискриминант равен $4^2-4\cdot(-3)\cdot 15=$ $=16+180=196=14^2$, значит, корни равны $\frac{-4\pm 14}{30}=\{-\frac{18}{30};\frac{10}{30}\}=\{-0{,}6;\frac{1}{3}\}.$ Здесь есть два варианта:

1. $\frac{y}{z}=t=-0{,}6.$ В этом случае $y=-0{,}6z$, и:

$$\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}=\frac{8z^2+6yz}{3z^2+y^2}=\frac{8z^2+6\cdot(-0{,}6z)z}{3z^2+(-0{,}6z)^2}=\frac{8z^2-3{,}6z^2}{3z^2+0{,}36z^2}=\frac{4{,}4z^2}{3{,}36z^2}=\frac{4{,}4}{3{,}36}=\frac{440}{336}=\frac{55}{42}=1\frac{13}{42}.$$

2. $\frac{y}{z}=t=\frac{1}{3}.$ В этом случае $y=\frac{1}{3}z$, и:

$$\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}=\frac{8z^2+6yz}{3z^2+y^2}=\frac{8z^2+6\cdot\frac{1}{3}z\cdot z}{3z^2+(\frac{1}{3}z)^2}=\frac{8z^2+2z^2}{3z^2+\frac{1}{9}z^2}=\frac{10z^2}{3\frac{1}{9}z^2}=\frac{10}{\frac{28}{9}}=\frac{90}{28}=\frac{45}{14}=3\frac{3}{14}.$$

Поскольку $1\frac{13}{42}<3\frac{3}{14}$, то наименьшее возможное значение $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ равно $1\frac{13}{42}$.

Ответ: $1\frac{13}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть скорости мотоциклиста и велосипедиста равны V_1 км/ч и V_2 км/ч соответственно, а расстояние от A до B равно S км. Тогда мотоциклист затратил на дорогу из A в B $\frac{S}{V_1}$ часов, а велосипедист — $\frac{S}{V_2}$ часов. Из условия следует, что $\frac{S}{V_2}-\frac{S}{V_1}=1$ (час). Если бы велосипедист ехал $\frac{S}{V_1}$ часов, то он бы проехал $\frac{S}{V_1}\cdot V_2$ км. Если бы мотоциклист ехал $\frac{S}{V_2}$ часов, то он бы проехал $\frac{S}{V_2}\cdot V_1$ км. Из условия следует, что $\frac{S}{V_2}\cdot V_1-\frac{S}{V_1}\cdot V_2=49$ (км). Если бы скорости обоих людей были на 7 км/ч больше, то они бы приехали в B из A: ~~за~~ мотоциклист — за $\frac{S}{V_1+7}$ часов, велосипедист — за $\frac{S}{V_2+7}$ часов. Из условия следует, что $\frac{S}{V_2+7}-\frac{S}{V_1+7}=36$ (минут) $=\frac{36}{60}$ (часов) $=0{,}6$ (часа). Итак, у нас есть 3 уравнения, и нужно найти S:

$$\begin{cases}\frac{S}{V_2}-\frac{S}{V_1}=1\\ \frac{S}{V_2}V_1-\frac{S}{V_1}V_2=49\\ \frac{S}{V_2+7}-\frac{S}{V_1+7}=0{,}6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S\cdot\frac{V_1-V_2}{V_1V_2}=1\\ S\cdot\frac{V_1^2-V_2^2}{V_1V_2}=49\\ S\cdot\frac{V_1-V_2}{(V_1+7)(V_2+7)}=0{,}6\end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$\frac{V_1^2-V_2^2}{V_1-V_2}=49 \Leftrightarrow V_1+V_2=49$. ($V_1\neq V_2$, т.к. иначе не выполняется уравнение $\frac{S}{V_2}-\frac{S}{V_1}=1$).

Разделив третье уравнение на первое, получим:

$$\frac{V_1V_2}{(V_1+7)(V_2+7)}=0{,}6\Leftrightarrow V_1V_2=0{,}6\cdot(V_1V_2+7(V_1+V_2)+49)\Leftrightarrow 0{,}4V_1V_2=0{,}6\cdot7\cdot49+0{,}6\cdot49\Leftrightarrow V_1V_2=\frac{4{,}8\cdot49}{0{,}4}=12\cdot49.$$

Поскольку $V_1+V_2=49$, ~~то~~ ~~V_1V_2~~ и $V_1V_2=12\cdot49$, то по теореме, обратной теореме Виета, V_1 и V_2 — корни уравнения $x^2-49x+12\cdot49=0$. Дискриминант равен $49^2-4\cdot1\cdot(12\cdot49)=49^2-48\cdot49=49=7^2$, а корни равны $\frac{49\pm7}{2}=\{21;28\}$. $V_1-V_2=\frac{1\cdot V_1V_2}{S}=\frac{V_1V_2}{S}>0\Rightarrow V_1>V_2\Rightarrow V_1=28$ (км/ч), $V_2=21$ (км/ч) $\Rightarrow S=1\cdot\frac{V_1V_2}{V_1-V_2}=\frac{28\cdot21}{28-21}=84$ (км).

Все величины удовлетворяют ~~[illegible]~~ полученные реальности (все скорости возможно развить в жизни).

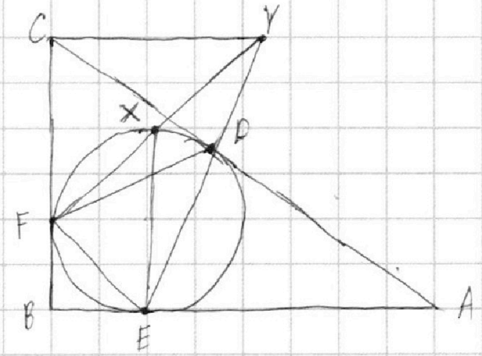
Ответ: 84 километра.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



меньшая дуга EF

Пусть O – центр ω. Тогда $\smile EF = \angle EOF = 360^\circ - \angle OFB - \angle OEB - \angle EBF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle EXF =$

$= \frac{\smile EF}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Из-за вписанности $\angle DEX = \angle XFD \Rightarrow \triangle YXE \sim \triangle YDF$ ($\angle EYF$ совпадает, $\angle DEX = \angle XFD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{FD}{DY} = \frac{EX}{XY} = \sqrt{2}$. Из-за того, что $\angle BCY = 90^\circ$, $CY \parallel AB \Rightarrow \triangle CYD \sim \triangle AED$ (т.к. из-за параллельности

$\angle AED = \angle CYD$, $\angle EAD = \angle YCD$) $\Rightarrow AD:DC = ED:DY$. Из этого же подобия $\frac{AD}{DE} = \frac{CY}{CD}$, а AD и DE равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow CY = CD$. Кроме того, $CD = CF \Rightarrow CY = CF$. Поскольку $\angle FCY = 90^\circ$, $\triangle CYF$ прямоугольный равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CFY = 45^\circ$. $BE = BF$ и $\angle EBF = 90^\circ \Rightarrow \angle BFE = 45^\circ \Rightarrow \angle XFE = 180^\circ - \angle CFY - \angle EFB = 90^\circ \Rightarrow EX$ – диаметр ω.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1.) $a=3^{\alpha_1}7^{\alpha_2},\ b=3^{\beta_1}7^{\beta_2},\ c=3^{\gamma_1}7^{\gamma_2}$

$\alpha_1+\beta_1\geq 14,\ \beta_1+\gamma_1\geq 19,\ \alpha_1+\gamma_1\geq 23$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\geq \frac{14+19+23}{2}=28$

$\alpha_2+\beta_2\geq 13,\ \beta_2+\gamma_2\geq 17,\ \alpha_2+\gamma_2\geq 42$

$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geq \frac{13+17+42}{2}=36$

$abc\geq\sqrt{ab\cdot bc\cdot ca}=\sqrt{3^{14+19+23}7^{13+17+42}}=\sqrt{3^{56}7^{72}}=3^{28}7^{36}$

7^{42}

Пример: $a=3^9 7^{21},\ b=3^5,\ c=3^{14}7^{21}$

(6.) $S,\ V_1,\ V_2$

$\begin{cases}\frac{S}{V_2}-\frac{S}{V_1}=1\\ \frac{S}{V_2}V_1-\frac{S}{V_1}V_2=49\\ \frac{S}{V_2+7}-\frac{S}{V_1+7}=0{,}6\end{cases}\to\begin{cases}S\cdot\frac{V_1-V_2}{V_1V_2}=1\\ S\cdot\frac{V_1^2-V_2^2}{V_1V_2}=49\\ S\cdot\frac{V_1-V_2}{(V_1+7)(V_2+7)}=0{,}6\end{cases}$

$\begin{cases}V_1^2-V_2^2=49(V_1-V_2)\\ V_1V_2=0{,}6(V_1+7)(V_2+7)\end{cases}$

$\begin{cases}V_1+V_2=49\\ V_1V_2=0{,}6V_1V_2+4{,}2(V_1+V_2)+49\cdot0{,}6\end{cases}$

$\begin{cases}0{,}4V_1V_2=48\cdot49\\ V_1+V_2=49\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_1+V_2=49\\ V_1V_2=\cancel{\frac{25\cdot49}{2}}\ 12\cdot49\end{cases}$

~~$x^2-49x+\frac{25\cdot49}{2}=0,\ D=49^2-50\cdot49$~~

$x^2-49x+12\cdot49=0,\ D=49^2-48\cdot49=49=7^2$

$V_1,V_2=\frac{49\pm7}{2}=\{28;21\}\Rightarrow V_1=28$ км/ч, $V_2=21$ км/ч

$S=\frac{V_1V_2}{V_1-V_2}=\frac{28\cdot21}{7}=84$

(2.) $(a,b)=1$

$a+b\,\vdots\, m$

$a^2-9ab+b^2\,\vdots\, m\Rightarrow(a+b)^2-11ab\,\vdots\, m\Rightarrow 11ab\,\vdots\, m$. Если $a\,\vdots\, m$, то $b\not\vdots\, m$ и наоборот $\Rightarrow a\not\vdots\, m,\ b\not\vdots\, m\Rightarrow 11\,\vdots\, m\Rightarrow m\leq 11$

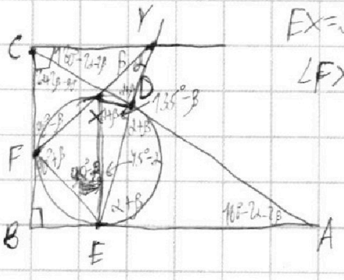
$\frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}$ – сокр. на $m\Rightarrow\frac{(a+b)^2-11ab}{a+b}$ – сокр. на $m\Rightarrow\frac{11ab}{a+b}$ – сокр. на m

$m=11;\quad a=1,\ b=10$

$\frac{1}{10}$ – несократима

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}=\frac{11}{1-90+100}=\frac{11}{11}$ – сокр. на 11

7.

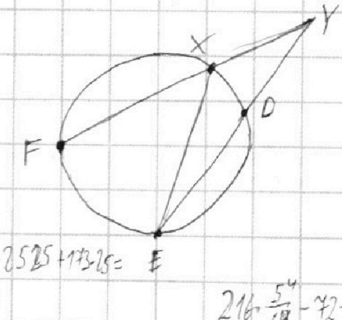


$EX=\sqrt2 XY$

$\angle FXE=45^\circ\Rightarrow\angle EXY=135^\circ$

$EY=\sqrt{XY^2+2XY^2+2XY\cdot\sqrt2XY\cdot\frac{\sqrt2}{2}}=$

$=XY\sqrt{3+2}=\sqrt5 XY$



(3.) $\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x$

$3x^2-5x+6+3x^2+x+1-2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}=5-6x$

$2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}=6x^2+2x+2$

$\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}=3x^2+x+1$

$(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)=(3x^2+x+1)^2$. $3x^2+x+1\neq0\Rightarrow 3x^2-5x+6=3x^2+x+1\Rightarrow 6x=5\Rightarrow x=\frac56$

$28^2+2\cdot15\cdot9=784+270=1054$

$6x-5$

$625-250+450-2525+173\cdot25=$
$=-1700+173\cdot25$

$216\cdot\frac{5^4}{6^4}-72\cdot\frac{5^3}{6^3}+1038\cdot\frac{5^2}{6^2}-505\cdot\frac56+75=$

$=\frac{5^4}{6}-\frac{2\cdot5^3}{6}+\frac{173\cdot5^2}{6}-\frac{5\cdot505}{6}+\frac{75\cdot6}{6}$

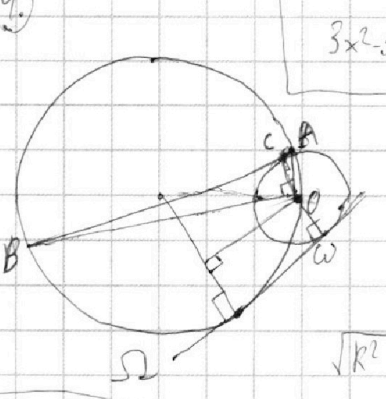
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4.)



$AC=1,\ BC=25$

$OC=\sqrt{AC\cdot BC}=5 \Rightarrow r=5$

$AB=26 \Rightarrow R=13$

$\sqrt{R^2-(R-r)^2}=\sqrt{13^2-8^2}=\sqrt{169-64}=\sqrt{105}$

$3x^2-5x+6=3x^2+x+1+(5-6x)^2+2(5-6x)\sqrt{3x^2+x+1}$

$-1(5-6x)\ \cancel{6x-5}+(5-6x)^2+2(5-6x)\sqrt{3x^2+x+1}=0$

$x=\frac{5}{6}.\quad x\neq\frac{5}{6}:$

$2\sqrt{3x^2+x+1}+5-6x-1=0$

$\sqrt{3x^2+x+1}=\cancel{6x-4}\ 3x-2$

$3x^2+x+1=9x^2-12x+4$

$6x^2-13x+3=0$

$3\cdot\frac{(13+\sqrt{97})^2}{144}-5\cdot\frac{13+\sqrt{97}}{12}+6=3\cdot\frac{169+97+26\sqrt{97}}{144}-5\cdot\frac{13+\sqrt{97}}{12}+6=$

$=\frac{169+97+26\sqrt{97}-260-20\sqrt{97}+288}{48}=\frac{294+6\sqrt{97}}{48}=\frac{49+\sqrt{97}}{8}$

$3\cdot\frac{(13+\sqrt{97})^2}{144}+\frac{13+\sqrt{97}}{12}+1=\frac{169+97+26\sqrt{97}+52+4\sqrt{97}+48}{48}=\frac{366+30\sqrt{97}}{48}=$

$=\frac{61+5\sqrt{97}}{8}$

$5-6\cdot\frac{13+\sqrt{97}}{12}=5-\frac{13+\sqrt{97}}{2}=\cancel{\frac{10-\sqrt{97}}{24}}=\frac{-3-\sqrt{97}}{2}$

$\frac{169+97-26\sqrt{97}}{48}-\frac{260-20\sqrt{97}}{48}+\frac{288}{48}=\frac{294-6\sqrt{97}}{48}=\frac{49-\sqrt{97}}{8}$

$\frac{61-5\sqrt{97}}{8}$

$5-6\cdot\frac{13-\sqrt{97}}{12}=\frac{-3+\sqrt{97}}{2}$

(5.)

$\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}=\frac{y^2+6yz+9z^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}=\frac{6yz+8z^2}{y^2+3z^2}$

$\frac{40}{y+3z}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}$

$40yz+3z^2+yz=15y^2+45yz$

$15y^2+4yz-3z^2=0$

$\frac{y}{z}=t$

$15t^2+4t-3=0,\ D=16+180=196$

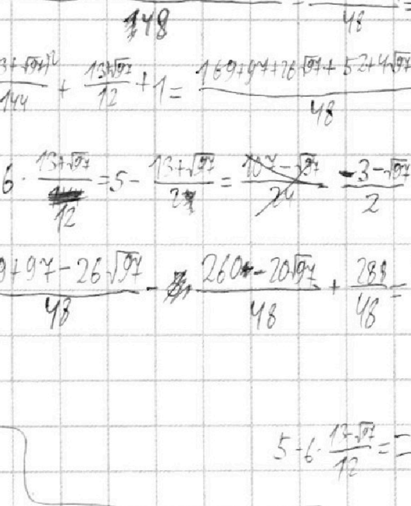
$t=\frac{-4\pm14}{30}=\{\frac{1}{3};-0{,}6\}$

$\frac{y}{z}=\frac{1}{3}\Rightarrow z=3y\Rightarrow\frac{6yz+8z^2}{y^2+3z^2}=\frac{18y^2+72y^2}{y^2+27y^2}=\frac{45}{14}=3\frac{3}{14}$

$\frac{y}{z}=-0{,}6\Rightarrow y=-0{,}6z\Rightarrow\frac{6yz+8z^2}{y^2+3z^2}=\frac{-3{,}6z^2+8z^2}{0{,}36z^2+3z^2}=\frac{4{,}4}{3{,}36}=\frac{44}{33{,}6}=\frac{440}{336}=\frac{110}{84}=\frac{55}{42}=1\frac{13}{42}$

Пример: ~~z=1, y=~~ $z=5,\ y=-3,\ x=2{,}4$

$\frac{144-9-25}{9+75}=\frac{110}{84}=1\frac{13}{42}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ