



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Найти: $\min(abc)$

Решение:

м.к. $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac: 2^{23} \cdot 7^{39}, \quad \text{но}$

по ОТА: $abc: 2^2 \cdot 7^B$

т.е. $2 \geq \max(17; 15; 23) = 23$

$39 \geq \max(11; 18; 39) = 39$

$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}, \quad \text{т.е. } abc \geq \text{НОК}(2^{15} \cdot 7^{11}; 2^{17} \cdot 7^{18}; 2^{23} \cdot 7^{39})$

$\Rightarrow$ минимальное значение $abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{23} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} \sim 2 \text{ — несократимо, } a, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

Найти $\max(m)$, $\text{mod } (a+b) \equiv m$
и $(a^2-7ab+b^2) \equiv m$

Решение:

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\begin{matrix} (a+b) \equiv m & \text{и} & ((a+b)^2-9ab) \equiv m \\ \textcircled{1} & & \textcircled{2} \end{matrix}$$

$$\textcircled{1} \quad a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow (a+b)^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\textcircled{2} \quad (a+b)^2-9ab \equiv 0 \pmod{m} \quad \parallel$$

$$9ab \equiv (a+b)^2 \pmod{m} \quad 9ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0$$

$$a \equiv -b \Rightarrow 9ab \equiv -9b^2 \equiv 0; 9b^2 \equiv 0$$

аналогично: $9ab \equiv -9a^2 \equiv 0; 9a^2 \equiv 0$

a и b не имеют общих делителей

$$\Rightarrow \text{если } m > 9, \text{ то } \left(b^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$$\left(a^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$\Rightarrow a$ и b должны иметь общие делители
т.к. $9b^2 \equiv 0$ и $9a^2 \equiv 0$

$$\Rightarrow m \leq 9$$

$\Rightarrow$ максимальное возможное $m = 9$

Пример:

$$a=4, b=5: \frac{4+5}{(4+5)^2-9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81-180} = \frac{9}{-99}$$

можно сократить на 9.

Ответ: $m = 9$

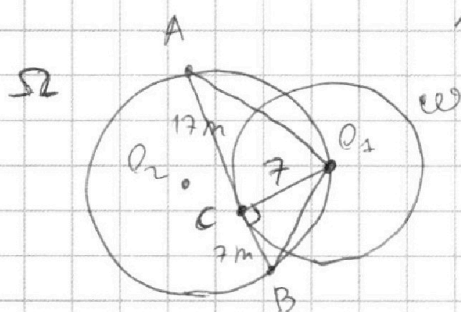
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.

Дано: окр-ты ω и Ω

$$R_{\omega} = 7; R_{\Omega} = 13,$$

$$AC : CB = 17 : 7,$$

AB касается ω в т. C

уге AB - нуге Ω

Найти: AB

Решение:

1) Пусть $AC = 17m$, тогда $CB = 7m \Rightarrow m > 0$
 $\Rightarrow AB = 24m$

2) $O_1C = 7$, т.к. O_1C - радиус ω

и $O_1C \perp AB$, т.к. радиус к касательной.

3) рассм. н/у ΔAO_1C :
 по т. Пифагора:

$$AO_1^2 = AC^2 + O_1C^2;$$

$$AO_1 = \sqrt{289m^2 + 49}; \sin \angle O_1AC = \frac{O_1C}{AO_1} = \frac{7}{\sqrt{289m^2 + 49}}$$

4) рассм. н/у ΔCO_1B :
 по т. Пифагора:

$$O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2$$

$$O_1B = \sqrt{49 + 49m^2} = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

5) рассм. ΔAO_1B :

т.к. вписан в окр-ть Ω

$\Rightarrow$ по т. синусов:

$$2 \cdot R_{\Omega} = \frac{O_1B}{\sin \angle O_1AB};$$

$$2 \cdot 13 = \frac{7 \cdot \sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{289m^2 + 49}}{\sqrt{(m^2 + 1)(289m^2 + 49)}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26 = \sqrt{(m^2+1)(289m^2+49)}$$

Замечаем $t = m^2; t \geq 0$:

$$26 = \sqrt{(t+1)(289t+49)} \quad \uparrow^2$$

$$676 = 289t^2 + 49t + 289t + 49$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 4 \cdot (28561 + 4 \cdot 627 \cdot 289 =$$

$$= 4 (28561 + 181203) = 4 \cdot 458^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} \quad (0 - 1) \text{ км}$$
$$t_2 = \frac{-338 + 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{916 - 338}{2 \cdot 289} = \frac{578}{578} = 1$$

Одн. замечаем:

$$m^2 = 1$$

$m, k \geq 0$, то $m = 1$

$$AB = 24m = 24 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

~~$$3 \cdot \frac{36 + 312 + 24\sqrt{78}}{69 - 69} = 6 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$~~

по ОЗЗ:

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \mid \cdot 69$$

$$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 + 23\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} - 23) \vee 63$$

<0 >0

$$\text{т.к. } 2\sqrt{26} < 23 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} - 23) < 63$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \mid \cdot 69$$

$$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 - 23\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} + 23) \vee 63 \uparrow^2 \quad \text{т.к. ОЗЗ равен } > 0$$

$$3 \cdot (4 \cdot 26 + 529 + 4\sqrt{26}) \vee 3969 \mid : 3$$

$$633 + 4\sqrt{26} \vee 1323$$

$$4\sqrt{26} \vee 690 \mid : 2$$

$$2\sqrt{26} \vee 345$$

$$404 \vee 2\sqrt{26} < 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12 < 345$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{26} < 345$$

~~$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$~~

$$\Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \vee \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$\Rightarrow$ является решением ур. 9

Ответ: $\frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ 81X^2 = 12X^2 + 12X + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ 69X^2 - 12X - 4 = 0 \end{cases}$$

$$69X^2 - 12X - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$$

$$X_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \begin{cases} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

$$X_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$X_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69};$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$\vee 0 \quad | \cdot 69$$

$$6 - 2\sqrt{78} < 0 \quad | : 2$$

$$3 < \sqrt{78} \quad |^2, \text{ т.к. обе части } > 0$$

$$9 < 78$$

$$9 < 78$$

$\Rightarrow$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$\Rightarrow X_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} - \text{не уф. условию } X \geq 0$$

$\Rightarrow$ не подходит.

Проверка:

$$X_1 = \frac{1}{9} : \sqrt{8 \cdot \frac{1}{27} - 6 \cdot \frac{1^3}{9} + 2^2} = \sqrt{8 \cdot \frac{1}{27} + 3 \cdot \frac{1^3}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1 - 18 + 54}{27}} = \sqrt{\frac{1 + 9 + 27}{27}}$$

$$\sqrt{\frac{37}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$0 = 0$ - верно

$$\Rightarrow X_1 = \frac{1}{9} - \text{является решением ур-я.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

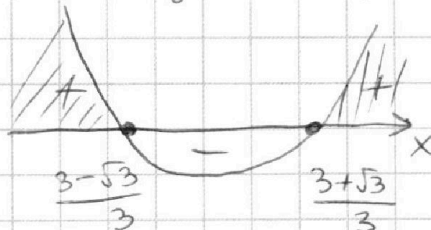
$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

корни:

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$



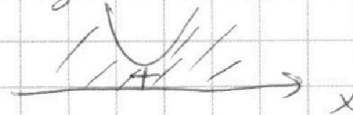
$$x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$$(2) \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

корни:

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3$$

$\Rightarrow$ корней нет



$\Rightarrow$ при всех x :
 $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$$\text{Объединим (1) и (2): } x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 81x^2 + 2x\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

$$-81x^2 + 9x = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x(1 - 9x) - 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(1 - 9x)(9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$1 - 9x = 0$$

$$9x = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{9}$$

$$\text{или } 9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x = 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 81x^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

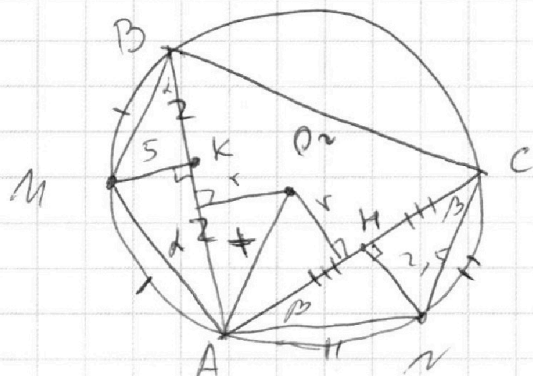
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 7.

Дано: $\triangle ABC$, $g(N; AC) = 2,5$; $g(M; AB) = 5$

Найти: AO_2 , где O_2 — центр
вписанной окружности.



Решение:

1) ~~Пусть~~ Пусть $AO_2 = x$.

2) Пусть $\angle MCA = \angle BCM = \alpha$, $\angle ANB = \angle NBC = \beta$

тогда $\angle MBA = \angle BAN = \alpha$, т.к. опущенные на
равные дуги хорды те опущенные
 $\angle BCM$ и $\angle MCA$

аналогично: $\angle CAN = \angle ACN = \beta$

3) ~~рассм.~~ Пусть $g(M; AB) = MK$,

а $g(N; AC) = NH$

4) рассм. $\triangle CNK$:

$$\text{отв } \tan \beta = \frac{NK}{NC}; \quad NK = NC \cdot \tan \beta$$

т.к. $\triangle ANC$ — $\triangle$, т.к. $\angle AN = \angle CN \Rightarrow AN = CN$

$$\text{т.к. } K - \text{середина } AC \Rightarrow AC = 2 \cdot KC = \frac{2 \cdot NK}{\tan \beta} = \frac{5}{\tan \beta}$$

5) аналогично в $\triangle AMB$:

K — середина AB

$$\Rightarrow AB = 2 \cdot BK$$

рассм. $\triangle MBK$:

$$\tan \alpha = \frac{MK}{BK}; \quad BK = \frac{MK}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2 \cdot MK}{\tan \alpha} = \frac{10}{\tan \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$= 4(28561 + 101203) = 4 \cdot 129764 = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} 114244 \overline{) 4} \\ \underline{4} \\ 34 \\ \underline{32} \\ 22 \\ \underline{20} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ + 5780 \\ + 93400 \\ \hline 101203 \\ + 28561 \\ \hline 129764 \end{array}$$

$$\sqrt{129764} = 352$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 110 \\ \hline 000 \\ + 1100 \\ \hline 12100 \end{array}$$

$$500^2 = 250000$$

$$300^2 = 90000$$

$$350^2 = (300 + 50)^2 = 90000 + 2 \cdot 300 \cdot 50 + 2500 = 120000 + 2500 = 122500$$

$$289 = 17^2$$

$$627 \overline{) 3} = 3 \cdot 209 = 3 \cdot 11 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 209 \\ \underline{209} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 352 \\ \times 352 \\ \hline 704 \\ + 1760 \\ + 10580 \\ \hline 123904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 360 \\ \hline 216 \\ + 1080 \\ \hline 129600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 362 \\ \times 362 \\ \hline 724 \\ + 2172 \\ + 10860 \\ \hline 131044 \end{array}$$

$$338 \overline{) 2} = 13^2 = 169$$

$$m = \frac{-338 + 2\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19}}{2 \cdot 17^2} = \frac{17\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}{17^2}$$

$$m = \frac{\sqrt{17 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}{17}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 338 \\ \hline 2204 \\ + 10140 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 149 \\ \times 149 \\ \hline 1341 \\ + 5960 \\ \hline 22101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28561 \\ \times 4 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$AN = 2C = 4$$

$$9 \cdot 20 = 180$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $ab : 2^{15} 7^{11}$, $bc : 2^{17} 7^{18}$, $ac : 2^{23} 7^{39}$
 $abc = 2^{20} 7^{39}$
 $L = \max(15, 17, 23) = 23$
 $B = \max(11, 18, 39) = 39$

$\min(abc)$

1)

НОД, м.к.

2) $\frac{a}{b}$ — несократима
 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$
 $\text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

$(a-b)^2 + 5ab$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab}$

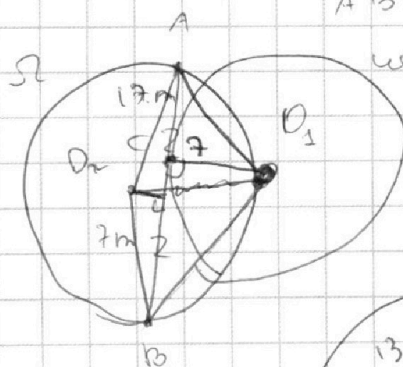
$(a+b)^2 - 9ab$

$ab : (a+b) ?$
 $\text{НОД}(a+b) : ab ?$

$\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a+b}{ab}$

$\frac{ab}{a+b}$

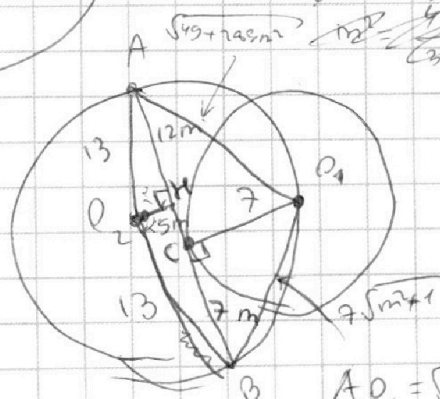
$AB = ?$



$R_{\omega} = 7; R_{\omega} = 13$

3) $\begin{array}{r} 338 \\ \times 17 \\ \hline 2304 \\ + 1074 \\ \hline 5746 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$

$6^26 - 49 = 677 \Rightarrow 627$



$\begin{array}{r} 338 \\ \times 17 \\ \hline 2304 \\ + 1074 \\ \hline 5746 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$

$\begin{array}{r} 338 \\ \times 17 \\ \hline 2304 \\ + 1074 \\ \hline 5746 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$

$\cos \angle O_1 B = \frac{858}{17}$

$AO_1 = \sqrt{49 + 289m^2}$

$\Rightarrow \sin \angle O_1 A C = \frac{7}{\sqrt{49 + 289m^2}}$

$O_1 B = \sqrt{49m^2 + 49} = 7\sqrt{m^2 + 1}$

$26 = 2 \cdot 13 = \frac{7\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{49 + 289m^2}}{2} = \sqrt{m^2 + 1} (49 + 289m^2) ?$

$676 = (t+1)(49 + 289t) = 49t + 289t^2 + 49 + 289t^2$

$289t^2 + 338t - 627 = 0; D = 114244 + 4 \cdot 289 \cdot 627 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad m = 1, \quad \frac{16-27}{9} = -\frac{11}{9}$$

$$a = 2, \quad b = 3, \quad m = 1, \quad \frac{25-9 \cdot 6}{29} = -\frac{29}{29} = -1$$

$$\frac{4}{5} = \frac{9}{81-9 \cdot 4 \cdot 5}, \quad m = 9, \quad a = -b$$

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 b^2 = 81 b^4$$

если $a: k, 70$
и $b: k \Rightarrow k = 1$

$$\begin{aligned} -9b^2 &\equiv 0 \Rightarrow 9b^2: m \\ 9a^2 &\equiv 0 \Rightarrow 9a^2: m \\ &\Rightarrow a^2: \frac{m}{9}, b^2: \frac{m}{9} \end{aligned}$$

$$9b^2 = km \Rightarrow 3b = \sqrt{mk}$$

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &\equiv 0 \\ &= 2(a^2 + ab) = 2a(a+b) \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9ab &= km \\ 9a^2 &\equiv km \\ 9b^2 &\equiv km \end{aligned}$$

$$9(a^2 + b^2) \equiv 0 = km, \text{ если } mk > 9, (a^2 + b^2; mk) \geq 2$$

$$\begin{aligned} 9ab &\equiv 9 \equiv 0 \\ \Rightarrow m &\leq 9 \\ \Rightarrow \max(m) &= 9 \end{aligned}$$

$$m \cdot k(a; b) = 1, \text{ то}$$

$$a^2 = \frac{m}{9}; b^2 = \frac{m}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{если } (a^2; m) &\geq 2 \\ (9; 9) &= 1 \\ 9 \cdot 9 &\equiv 0 \\ m &\leq 9 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

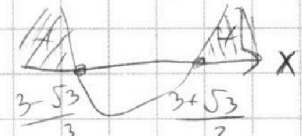
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$\Delta_1 = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$
 $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$\Delta_2 = 9 - 4 \cdot 3(x^2 + x)$
 $1 - 9x \geq 0: 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$

$\Rightarrow$ 

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$
 $3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$
 $-9x^2 + 9x = 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{\dots}$
 $9x(9x - 2) - 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{\dots} = 0$
 $(1 - 9x)(9x - 2\sqrt{\dots}) = 0$
 $9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (x \geq 0)$
 $81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$
 $69x^2 - 12x - 4 = 0$
 $\Delta = 144 + 4 \cdot 69 = 1248$
 $x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138}$

$x = \frac{1}{9}$

$12 - 4\sqrt{6 \cdot 13} > 0$
 $\sqrt{6 \cdot 13}$

$6 + 2\sqrt{78} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$
 $6 + 2\sqrt{78} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$
 $9 \pm 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$
 $9 - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$
 $64 \sqrt{9 \cdot 3} = 22$

$x = \frac{1}{9}: 3 \cdot \frac{1}{81} - 8 \cdot \frac{1}{9} + 2 = 3 \cdot \frac{1}{81} + \frac{1}{9} + x$
 $1 = 1$
 $28 = 80 + 24 = 104$

$-21x^2 + 9x = 9x(1 - 9x)$
 $144 \cdot 70 = 10080 - 144 = 9936$
 $78 = 26 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$
 $1248 = 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$
 $1 - 18 = -17 + 54 = 37$
 $54 - 17 = 44 - 7 = 37$



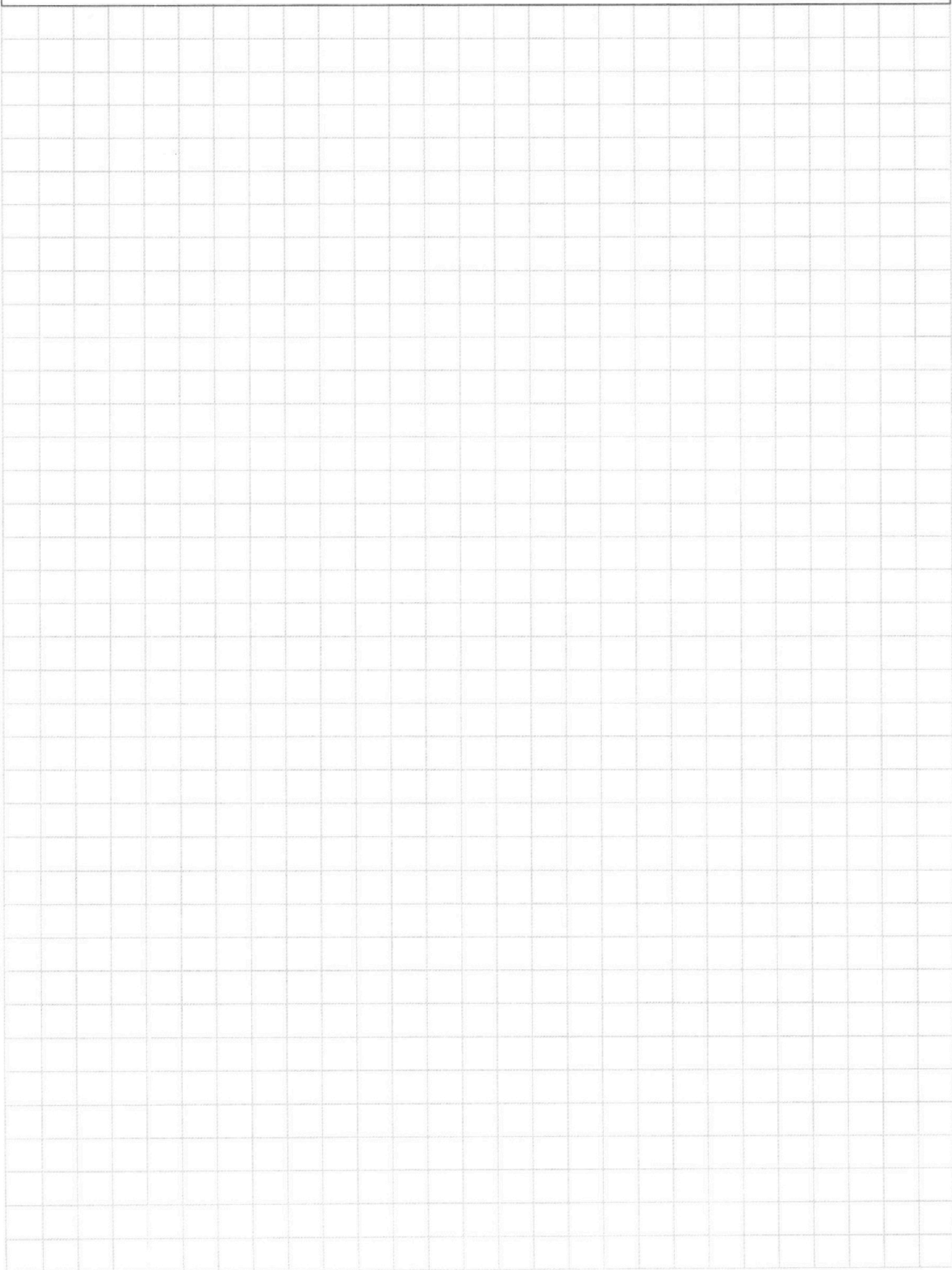
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



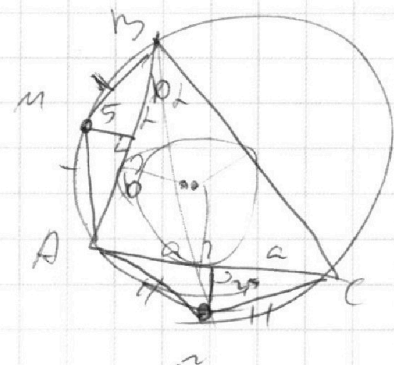
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

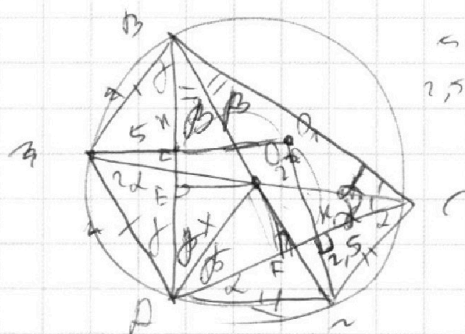
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



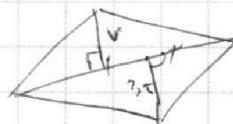
$AO_2 = 2$, O_2 - центр вписанной окружности

$\angle ABE = 2\alpha$

$\angle AKE \angle NC = 2\alpha$



$\angle KO_1 = 0,14 + 2,5$
 $2,5 + 0,14 = 2,64$



$AC = 2 \cdot 2,5 \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{KE}{KN}$; $KE = \cos \alpha \cdot KN$

$AB = 10 \cdot \cos \alpha$

$$\frac{10 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{5 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\frac{FG}{EF} = \cos \alpha = \frac{AC}{5} = \frac{PC}{O_2F} = \frac{FC}{r}$$

$$FC = \frac{AC \cdot r}{5} \quad 10 \cdot \sin^2 \alpha = 5 \sin^2 \alpha$$

$$BE = \frac{AB \cdot r}{10}$$

$$AF = AC - \frac{AC \cdot r}{5} = AE = AB - \frac{AB \cdot r}{10}$$

$$AC \left(1 - \frac{r}{5}\right) = AB \left(1 - \frac{r}{10}\right)$$

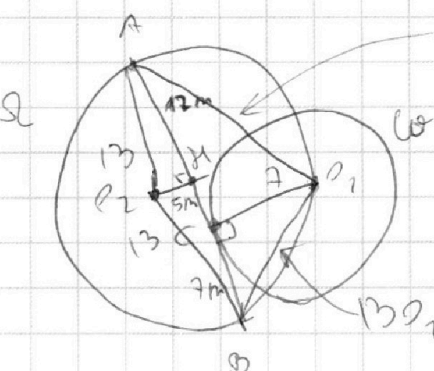
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_1 = \sqrt{289m^2 + 49}$$

$$\sin \angle O_1 AB = \frac{7}{\sqrt{289m^2 + 49}}$$

$$24m - 2$$

$$BO_1 = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

$$26 = \frac{7\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{289m^2 + 49}}{72}$$

$$m^2 = t$$

$$676 = 289t^2 + 289t + 49t + 49$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 4 \cdot 169^2 + 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 17 =$$

$$= 4(13^4 + 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 17)$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ -2 \\ \hline 13 \\ -12 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ + 1094 \\ + 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 150 \\ \times 150 \\ \hline 22500 - 200 = 22204 \end{array}$$

$$450^2 = 202500$$

$$\begin{array}{r} \times 452 \\ \times 452 \\ \hline (450+2)^2 = 202500 + 4 + 1800 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ (450+8)^2 = 202500 + 64 + 7200 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 184502 \\ - 8500 = 222002 \\ \hline 209764 \\ - 916 \\ - 338 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 627 \\ \times 289 \\ \hline 5643 \\ + 5096 \\ + 1254 \\ \hline 181203 \\ 45 \\ 45 \\ \hline + 225 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ + 578 \\ \hline 1734 \\ + 181203 \\ \hline 28561 \\ + 209764 \\ \hline 238325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ \times 2 \\ \hline 916 \end{array}$$