



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Найти: $\min(abc)$

Решение:

м.к. $ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$, $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$, то

но ОТА: $abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

т.е. $2 \geq \max(17; 15; 23) = 23$

$\Rightarrow abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$, т.е.: $abc \geq \text{НОК}(2^{15}; 2^{17}; 2^{23})$

\Rightarrow наименимальное значение $abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$

ОТВЕТ: $2^{23} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~2

$\frac{a}{b}$ — несократимая; $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

Найти $\max(m)$, для $(a+b) \leq m$
 $a (a^2 - 7ab + b^2) \leq m$

Делаем:

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\stackrel{(1)}{(a+b) \leq m} \quad \stackrel{(2)}{a (a^2 - 7ab + b^2) \leq m}$$

$$\Rightarrow \stackrel{(1)}{a+b \equiv 0 \pmod{m}} \Rightarrow \stackrel{(2)}{(a+b)^2 - 9ab \equiv 0 \pmod{m}}$$

$$\stackrel{(2)}{9ab \equiv (a+b)^2 \pmod{m}} \quad \stackrel{\text{||}}{9ab \equiv 0 \pmod{m}}$$

$$a+b \stackrel{m}{\equiv} 0 \\ a \stackrel{m}{\equiv} -b \Rightarrow 9ab \stackrel{m}{\equiv} -9b^2 \stackrel{m}{\equiv} 0; 9b^2 \stackrel{m}{\equiv} 0 \\ \text{ следовательно: } 9ab \stackrel{m}{\equiv} -9a^2 \stackrel{m}{\equiv} 0; 9a^2 \stackrel{m}{\equiv} 0$$

a и b не имеют общих делителей

$$\Rightarrow \text{если } m > 9, \text{ то } \left(b^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$$\left(a^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$\Rightarrow a$ и b должны иметь общих делителей

$$\text{т.к. } 9b^2 \stackrel{m}{\equiv} 0 \text{ и } 9a^2 \stackrel{m}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow m \leq 9$$

\Rightarrow максимальное возможное $m = 9$:

Пример: $\frac{4+5}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81 - 180} = -\frac{9}{99}$

и это соответствует 9.

Ответ: $m = 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

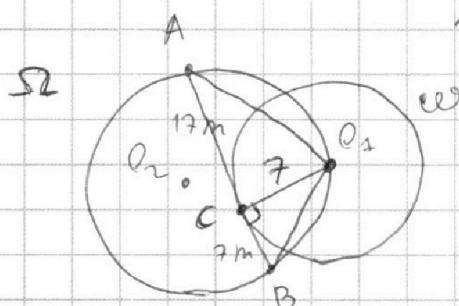
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.

Дано: окр -та в ω и S_2

$$R_w = 7; R_{S_2} = 17,$$

$$AC : CB = 17 : 7,$$

AB касается в C т. C

чл AB - круж S_2

Найти: AB

Демонстрировать:

1) Руково $AC = 17$ м, може $CB = 7$ м $\Rightarrow m > 0$
 $\rightarrow AB = 24$ м

2) $O_1C = 7$, м.к. O_1C - радиус w

и $O_1C \perp AB$, м.к. радиус к касательной

3) рассл. в/г $\triangle AO_1C$:

$$AO_1^2 \stackrel{\text{но } 7, \text{ найдено}}{=} AC^2 + O_1C^2;$$

$$AO_1 = \sqrt{289m^2 + 49}; \sin \angle O_1AC = \frac{O_1C}{AO_1} = \frac{7}{\sqrt{289m^2 + 49}}$$

4) рассл. в/г $\triangle CO_1B$:

но 7, найдено:

$$O_1B^2 = O_1C^2 + OB^2$$

$$O_1B = \sqrt{49 + 49m^2} = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

5) рассл. $\triangle AO_1B$:

ок смеси в окр -та S_2

\rightarrow по Т. синусов:

$$2 \cdot R_{S_2} = \frac{O_1B}{\sin \angle O_1AB};$$

$$2 \cdot 13 = \frac{7 \cdot \sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{289m^2 + 49}}{7} = \sqrt{(m^2 + 1)(289m^2 + 49)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26 = \sqrt{(m^2+1)(289m^2+49)}$$

Заменка $t = m^2; t \geq 0$:

$$26 = \sqrt{(t+1)(289t+49)} \quad |^2$$

$$676 = 289t^2 + 49t + 289t + 49$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$\Delta = 4 \cdot \{ 28561 + 4 \cdot 627 \cdot 289 =$$

$$= 4 (28561 + 181203) = 4 \cdot 458^2$$

$$t_1 = \frac{-338 + 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{916 - 338}{2 \cdot 289} = \frac{578}{578} = 1$$

Од. заменка:

$$m^2 = 1$$

$m, k, m > 0$, то $m = 1$

$$AB = 24m = 24 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\cancel{\frac{36+3\sqrt{2}+2\sqrt{78}}{69-69} - 6 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69}}$$

№ 083:

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3+\sqrt{3}}{3} | \cdot 69$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{69+23\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26}-23) \vee 63 \cancel{> 0}$$

$$\text{м.н. } 2\sqrt{26} < 23 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26}-23) < 63$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \leftarrow \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$\cancel{\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3-\sqrt{3}}{3} | \cdot 69}$$

$$6+2\sqrt{78} \vee 69-23\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26}+23) \vee 63 |^2 \text{ м.н. о.вр. ваконе } > 0 \\ 3 \cdot (4\cdot 26 + 529 + 4\sqrt{26}) \vee 3969 | : 3$$

$$633 + 4\sqrt{26} \vee 1323$$

$$4\sqrt{26} \vee 690 | : 2$$

$$2\sqrt{26} \vee 345 \cancel{>}$$

$$4\sqrt{26} \vee 2\sqrt{26} < 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12 < 345$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{26} < 345$$

$$\cancel{\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

⇒ является лемниском $y_1 \cdot y_2$

○ Тверд. $\frac{1}{9}; \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Delta = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 70 = 1248$$
$$x_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \begin{cases} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$x_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69};$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} > 0 / \cdot 69$$

$$6 - 2\sqrt{78} > 0 / : 2$$

$$3\sqrt{78} > 1^2, \text{ m.k. оно всегда} > 0$$

$$9 < 78$$

$$9 < 78$$

$$\Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} - \text{не удовлетворяет условию } x \geq 0$$

\Rightarrow не подходит.

Проверка:

$$x_1 = \frac{1}{9} : \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\cancel{\sqrt{\frac{1 - 18 + 54}{27}}} = \sqrt{\frac{1 + 9 + 27}{27}}$$

$$\sqrt{\frac{37}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$0 = 0$ - верно

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{9} - \text{является решением ур - я.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

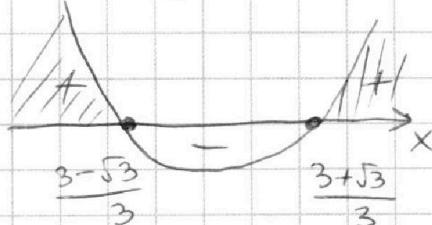
ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$

(1) $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

решен:

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$



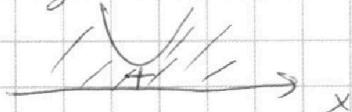
$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

(2) $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

решен:

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3$$

\Rightarrow квадратичный корень



\Rightarrow при всех x :

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

Объединение (1) и (2): $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 81x^2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

$$-81x^2 + 9x = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x(1 - 9x) - 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(1 - 9x)(9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$1 - 9x = 0$$

или

$$9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 81x^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$



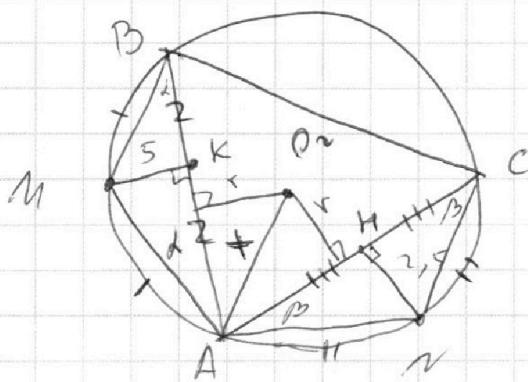
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7.

дано: $\triangle ABC$, $\angle(N; AC) = 2\alpha$; $\angle(M; AB) = \beta$

Найти: AD_2 , где D_2 - центр
вписанной окружности.

Доказательство:

1) ~~Пусть~~ пусть $AD_2 = x$.

2) Пусть $\angle MCA = \angle MCB = \gamma$, $\angle ANC = \angle NBC = \theta$

тогда $\angle MBA = \angle BAC = \alpha$, т.к. опирающиеся на
одинаковые дуги и наименее две опирающиеся
 $\angle BCA = \angle MCA$

аналогично: $\angle CAN = \angle ACN = \eta$

3) Доказать $\angle MKB = MK$,

$$\text{а } \angle MKN = NH$$

4) Доказать $\triangle CNK$:

$$\text{откуда } \frac{\angle MK}{MK} = \frac{\angle NK}{NK}; \frac{HN}{NK} = \frac{HC}{NK} \Rightarrow \frac{HN}{NK} = \frac{\angle NK}{\angle MK}$$

т.к. $\triangle ANC$ - $\text{rt}\triangle$, т.к. $\angle CAN = \angle CNA \Rightarrow AN = CN$

т.к. H - середина $AC \Rightarrow AC = 2 \cdot NK = \frac{2 \cdot NK}{\tan \beta} = \frac{5}{\tan \beta}$

5) Доказать $\triangle ANC$:

K - середина AB

$$\Rightarrow BK = AK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$$

доказать $\angle MKB = \angle NBC$:

$$\frac{\angle MK}{MK} = \frac{\angle NK}{NK}; \frac{\angle NBC}{BC} = \frac{\angle MK}{NK}$$

$$\Rightarrow \angle NBC = \frac{2 \cdot MK}{NK} = \frac{10}{5} = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) и 7. Следует:

$$\frac{AB}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\frac{10}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{5}{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin^2 \beta} \quad | : 5$$

$$\frac{2}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cancel{\sin \alpha} \cdot \cancel{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \cancel{\sin \beta} \cdot \cancel{\sin^2 \beta}}$$

$$2 \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha, \text{ т.к. } \alpha, \beta \in \langle 0^\circ, 45^\circ \rangle$$

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

7) параллелограмм:

$$\sin \beta = \frac{MN}{CN} ; CN = \frac{MN}{\sin \beta}$$

8) параллелограмм АМК:

$$\sin \alpha = \frac{MK}{AM}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{MN \cdot AM}{CN \cdot MK} = \frac{2,5 \cdot AM}{5 \cdot CN} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \cdot AM = 5\sqrt{2} \cdot CN$$
$$AM = \sqrt{2} \cdot CN$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 4(28561 + 101203) = 4 \cdot 129764 = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} 114244 \\ - 2 \\ \hline 34 \\ - 32 \\ \hline 2 \\ - 2 \\ \hline 4 \\ - 24 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ 578 \\ + 939 \\ \hline 109203 \\ 28561 \\ \hline 129764 \end{array}$$

$$\sqrt{129764} = 3$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{r} 110 \\ \times 110 \\ \hline 000 \\ 110 \\ \hline 1100 \end{array} & 500^2 = 250000 \\ & \begin{array}{r} 110 \\ \times 110 \\ \hline 000 \\ 110 \\ \hline 1100 \end{array} & 300^2 = 90000 \\ & \begin{array}{r} 110 \\ \times 110 \\ \hline 000 \\ 110 \\ \hline 1100 \end{array} & 350^2 = (300+50)^2 = 30000 + 2 \cdot 50 \cdot 300 + 50^2 = 120000 + 15000 = 125000 \\ & \begin{array}{r} 110 \\ \times 110 \\ \hline 000 \\ 110 \\ \hline 1100 \end{array} & 125000 + 1500 = 126500 \end{aligned}$$

$$289 = 17^2$$

$$\begin{array}{r} 627 \\ \times 13 \\ \hline 1884 \\ 127 \\ \hline 209 \\ - 2 \\ \hline 27 \\ - 2 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 352 \\ \times 352 \\ \hline 704 \\ 1760 \\ + 1058 \\ \hline 123304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 360 \\ \hline 720 \\ 108 \\ \hline 129600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 362 \\ \times 362 \\ \hline 724 \\ 2172 \\ + 1086 \\ \hline 132044 \end{array}$$

$$338 \begin{array}{r} 2 \\ \times 13 \\ \hline 668 \\ - 338 \\ \hline 132 \end{array} = 13^2 \cdot 2$$

$$m = \frac{-338 + \sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19}}{2 \cdot 17^2} = \frac{17 \sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}{17^2}$$

$$m = \frac{\sqrt{17 \sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}}{17}$$

$$\begin{array}{r} 28561 \\ \times 4 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 149 \\ \times 149 \\ \hline 1341 \\ 596 \\ + 149 \\ \hline 07 \end{array}$$

$$AN = AC = 11$$

$$9 \cdot 20 = 180$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) ab : 2^{15} 7^{11}, \quad bc : 2^{17} 7^{18} \quad ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$abc = 2^{10} 7^3 = 2^{23} 7^{39}$$

$\min(abc)$

KOK, m.k.

2) $\frac{a}{b}$ - коэффициент
 $a < b$, вер

$$\log(a/b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$(a-b)^2 + 5ab$$

$$\frac{a}{b} \leftarrow \frac{b}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab}$$

$$(a+b)^2 - 9ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a+b}{ab}$$

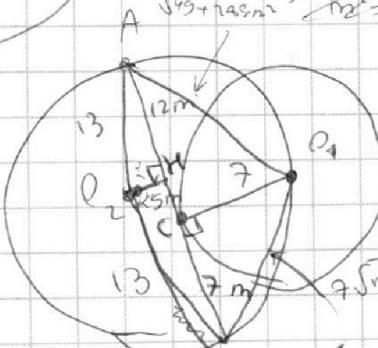
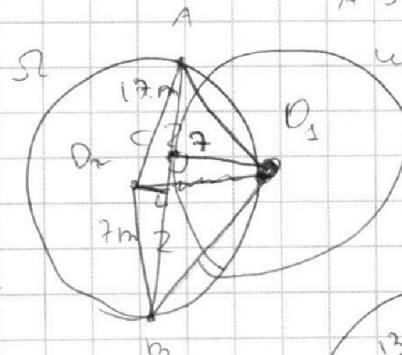
$$ab : (a+b) ?$$

$$\min(a+b) : ab ?$$

$$\frac{ab}{a+b}$$

AB-?

$$P_{AB} = 7; P_{AC} = 13$$



$$\begin{array}{r} 330 \\ \times 330 \\ \hline 990 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$626 - 49 = 677 \cdot 50 = 627$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\cos(\angle O_2 B) = \frac{1}{2}$$

$$2G = 2 \cdot 13 = \frac{26}{\sin(\angle O_2 AC)} \approx \frac{26}{\sqrt{1+289t^2}}$$

$$t = m^2$$

$$676 = (t+1)(49+289t) = 49t + 289t^2 + 49 + 289t^2$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0; t = \frac{-338 \pm \sqrt{114244 + 4 \cdot 289 \cdot 627}}{2 \cdot 289} =$$

$$AO_1 = \sqrt{49 + 289m^2}$$

$$\Rightarrow \sin(\angle O_1 AC) = \frac{7}{\sqrt{49 + 289m^2}}$$

$$O_1 B = \sqrt{49m^2 + 49} = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{m^2 + 1}(49 + 289m^2)$$

92

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$
$$c = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad m = 1.$$
$$a = 2, \quad b = 3, \quad m = 2$$
$$\frac{4}{5} = \frac{9}{25 - 9 \cdot 6} \quad m = 9.$$
$$(a+b)^2 - 9ab \stackrel{m}{=} 0$$
$$a+b \stackrel{m}{=} 0$$
$$-9ab \stackrel{m}{=} 0$$
$$9ab \stackrel{m}{=} 0 \stackrel{m}{=} a+b$$

$$9ab = km$$

$$\frac{4}{5} = \frac{9}{81 - 81 \cdot 9} \quad a \equiv -b$$
$$a^2 = b^2 \Rightarrow 81a^2b^2 = 81b^4$$

$$\text{если } a; k, 70$$

$$a \cdot b; k \Rightarrow k = 1$$

$$-9b^2 \equiv 0 \Rightarrow 9b^2 \stackrel{m}{=} 0$$

$$9a^2 \equiv 0 \Rightarrow 9a^2 \stackrel{m}{=} 0$$

$$\Rightarrow a^2; \frac{m}{9}, b^2; \frac{m}{9}$$

$$a^2 \quad 9b^2 = km \\ \text{или} \quad \Rightarrow 3b = \sqrt{mk}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \equiv 0$$

$$\equiv 2(a^2 + ab) = 2a(a+b) \equiv 0$$

$$9ab = km$$

$$9a^2 = km$$

$$9b^2 = km$$

$$9ab \stackrel{m}{=} 9 \stackrel{m}{=} 0$$

$$\Rightarrow m \leq 9$$

$$\Rightarrow \max(m) = 9$$

$$a^2 = \frac{m}{g}, b^2 = \frac{mg}{g}$$

если $(a^2; m) > 2$

, то $(9; g) = 1$:

если $g \neq 9$,

$\Rightarrow 2 \leq 9$

$m \leq 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & 4) \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \\
 & D_1 = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \quad D_2 = 9 - 4 \cdot 3(x^2 + x) \\
 & x_{1,2} = \frac{6 \pm 8\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \\
 & \Rightarrow \text{X-axis: } x = \frac{1}{9} \\
 & \text{Left side: } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1-9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\
 & \text{Right side: } 3x^2 - 6x + 2 = x^2 - 18x + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \Rightarrow 9x(9x - 9) - 2 \cdot (9x - 2 \cdot \sqrt{1}) = 0 \\
 & 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (x \neq 0) \\
 & 81x^2 - 12x^2 + 12x + 4 = 0 \\
 & D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 65 = 1248 \\
 & \text{Discriminant: } 1248 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 529 \\
 & \text{Roots: } x = \frac{1}{9} \pm \frac{\sqrt{13}}{3} \\
 & \text{Left side: } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\
 & \text{Right side: } 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \Rightarrow -9x = 5x \quad x = 0 \\
 & \text{Left side: } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\
 & \text{Right side: } 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \Rightarrow -9x = 5x \quad x = 0 \\
 & \text{Left side: } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\
 & \text{Right side: } 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \Rightarrow -9x = 5x \quad x = 0
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

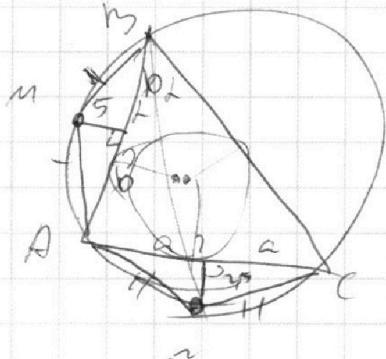
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



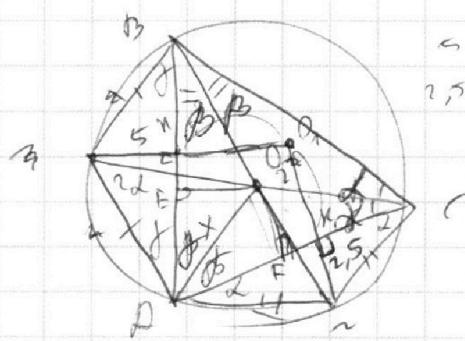
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_2 = 2, O_2 - \text{ц} \text{м} \text{ висяч} \text{ от } 7 \text{ и}$$

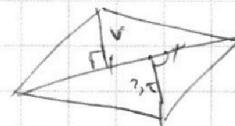
$$\angle ABE = 2x:$$

$$VA M + NC = 2x$$



$$\angle AKO_1 = 0, K + 2x$$

$$2x + O_1K = 2x O_1H$$



$$AC = 2 \cdot 2,5, \cos x = 5 \cdot \cos x$$

$$\cos x = \frac{AC}{AB}; HC = \cos x \cdot AH$$

$$AB = 10 \cdot \cos x$$

$$\frac{10 \cdot \cos x}{\sin x \cdot 5 + 2x} = \frac{5 \cdot \cos x}{\sin x \cdot x \cdot \sin x \cdot \cos x}$$

$$\frac{FG}{DE} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{AC}{AB} = \frac{O_2C}{O_2F} = \frac{FC}{r} \cdot \frac{r \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$FC = \frac{AC \cdot r}{5} \quad 10 \cdot \sin^2 x = 5 \sin^2 x$$

$$FO_2 = \frac{AB \cdot r}{10}; \quad \text{д} \beta$$

$$BF = AF = AC - \frac{AC \cdot r}{5} = AE = AB - \frac{AB \cdot r}{10}$$

$$AC \left(1 - \frac{r}{5}\right) = AB \left(1 - \frac{r}{10}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

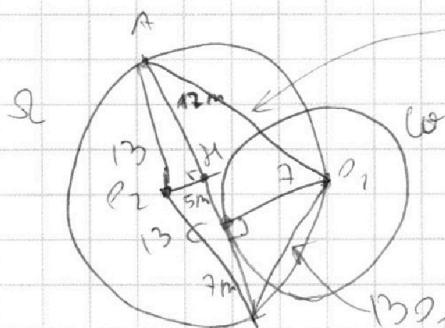
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_1 = \sqrt{289m^2 + 49}$$

$$\sin \angle O_1 A O_2 = \frac{7}{\sqrt{289m^2 + 49}}$$

$$74m - ?$$

$$MO_1 = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

$$m^2 = t$$

$$AB = \frac{2\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{289m^2 + 49}}{7}$$

$$676 = 289t^2 + 289t + 49t + 49$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

~~$$169$$~~

$$= 4(13^4 + 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 17)$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 2 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1527 \\ + 1094 \\ + 169 \\ \hline 28567 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \\ \times 3 \\ \hline 1881 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209 \\ \times 19 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 2 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$149$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 150 \\ \hline 22500 - 2250 = 22200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \\ \times 289 \\ \hline 5643 \\ + 15096 \\ + 11294 \\ \hline 181203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 627 \\ \hline 1734 \end{array}$$

$$450^2 = 202500$$

$$\begin{array}{r} 452 \\ \times 452 \\ \hline 1904 \end{array}$$

$$(450+2)^2 = 202500 + 4 + 1800 =$$

$$458$$

$$(450+2)^2 = 202500 + 64 + 7200 =$$

$$= 203764$$

$$184502 - 8 \cdot 500 = 7200$$

$$\begin{array}{r} 916 \\ - 338 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 452 \\ \hline 3125 \\ - 2500 \\ \hline 1250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2023 \\ + 578 \\ \hline 2501 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28567 \\ - 209764 \\ \hline - 81007 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 2 \\ \hline 578 \end{array}$$