



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Найти:  $\min(abc)$

Решение:

$$\text{м.к. } ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}, \quad \text{но}$$

$$\text{но ОТА: } abc : 2^A \cdot 7^B$$

$$\alpha \Rightarrow 2 \geq \max(17; 15; 23) = 23$$

$$\beta \Rightarrow \max(11; 18; 39) = 39$$

$$\alpha \quad abc \geq 2 \cdot 7, \quad \text{м.к. } abc \geq \text{НОК}(2^{15} \cdot 7^{11}; 2^{17} \cdot 7^{18}; 2^{23} \cdot 7^{39})$$

$$\Rightarrow \text{минимальное значение } abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{ОТВЕТ: } 2^{23} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{b} \sim 2, \quad a, b \in \mathbb{N}$$
$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

Найти  $\max(m)$ ,  $\text{mod } m \begin{cases} (a+b) \\ (a^2 - 7ab + b^2) \end{cases} \equiv 0$

Решение:

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\begin{cases} (a+b) \equiv 0 \pmod{m} & \textcircled{1} \\ ((a+b)^2 - 9ab) \equiv 0 \pmod{m} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow (a+b)^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\textcircled{2} \quad (a+b)^2 - 9ab \equiv 0 \pmod{m} \quad \parallel$$
$$9ab \equiv (a+b)^2 \pmod{m} \quad \parallel$$
$$9ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0$$
$$a \equiv -b \Rightarrow 9ab \equiv -9b^2 \equiv 0; 9b^2 \equiv 0$$

аналогично:  $9ab \equiv -9a^2 \equiv 0; 9a^2 \equiv 0$

$a$  и  $b$  не имеют общих делителей

$$\Rightarrow \text{если } m > 9, \text{ то } \left(b^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$$\left(a^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$\Rightarrow a$  и  $b$  должны иметь общие делители

т.к.  $9b^2 \equiv 0$  и  $9a^2 \equiv 0$

$$\Rightarrow m \leq 9$$

$\Rightarrow$  максимальное возможное  $m = 9$

Пример:

$$a=4, b=5: \frac{4+5}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81 - 180} = \frac{9}{-99}$$

можно сократить на 9.

Ответ:  $m = 9$ .

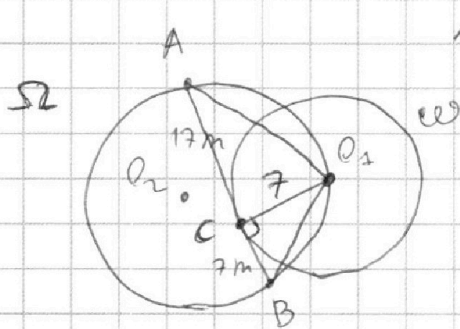
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.

Доказано: окружности  $\omega$  и  $\Omega$

$$R_{\omega} = 7; R_{\Omega} = 13,$$

$$AC : CB = 17 : 7,$$

AB касается  $\omega$  в т. C

и  $\Omega$  - в т. C

Найти: AB

Решение:

1) Пусть  $AC = 17m$ , тогда  $CB = 7m \Rightarrow m > 0$   
 $\Rightarrow AB = 24m$

2)  $O_1C = 7$ , т.к.  $O_1C$  - радиус  $\omega$

и  $O_1C \perp AB$ , т.к. радиус к касательной.

3) рассм. н/у  $\Delta AO_1C$ :

по т. Пифагора:  
 $AO_1^2 = AC^2 + O_1C^2$ ;

$$AO_1 = \sqrt{289m^2 + 49}; \sin \angle O_1AC = \frac{O_1C}{AO_1} = \frac{7}{\sqrt{289m^2 + 49}}$$

4) рассм. н/у  $\Delta CO_1B$ :

по т. Пифагора:

$$O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2$$

$$O_1B = \sqrt{49 + 49m^2} = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

5) рассм.  $\Delta AO_1B$ :

ок вписан в окружность  $\Omega$

$\Rightarrow$  по т. синусов:

$$2 \cdot R_{\Omega} = \frac{O_1B}{\sin \angle O_1AB}$$

$$2 \cdot 13 = \frac{7 \cdot \sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{289m^2 + 49}}{\sqrt{(m^2 + 1)(289m^2 + 49)}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26 = \sqrt{(m^2+1)(289m^2+49)}$$

Замечаем  $t = m^2; t \geq 0$ :

$$26 = \sqrt{(t+1)(289t+49)} \quad \uparrow^2$$

$$676 = 289t^2 + 49t + 289t + 49$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 4 \cdot (28561 + 4 \cdot 627 \cdot 289 =$$

$$= 4 (28561 + 181203) = 4 \cdot 458^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} \quad (0 \rightarrow) \text{ не берем}$$
$$t_2 = \frac{-338 + 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{916 - 338}{2 \cdot 289} = \frac{578}{578} = 1$$

Одн. замечаем:

$$m^2 = 1$$

$$m, k \ m > 0, \text{ то } m = 1$$

$$AB = 24m = 24 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

~~$$\frac{36 + 24 + 24\sqrt{78}}{69 + 69} = 6 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$~~

по ОЗЗ:

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \mid \cdot 69$$

$$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 + 23\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} - 23) \vee 63$$

$< 0 \qquad > 0$

$$\text{м.к. } 2\sqrt{26} < 23 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} - 23) < 63$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \mid \cdot 69$$

$$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 - 23\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} + 23) \vee 63 \quad \uparrow^2 \quad \text{м.к. } 0 \text{ } \text{всмы} > 0$$
$$3 \cdot (4 \cdot 26 + 529 + 4\sqrt{26}) \vee 3969 \quad | : 3$$

$$633 + 4\sqrt{26} \vee 1323$$

$$4\sqrt{26} \vee 690 \quad | : 2$$

$$2\sqrt{26} \vee 345$$

$$404 \vee 2\sqrt{26} < 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12 < 345$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{26} < 345$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \vee \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$\Rightarrow$  является решением уравнения

Ответ:  $\frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} X \geq 0 \\ 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$$

$$x_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \begin{cases} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$x_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69};$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0 \quad \vee 0 \quad | \cdot 69$$

$$6 - 2\sqrt{78} < 0 \quad | : 2$$

$$3\sqrt{78} > 6, \text{ т.к. обе части } > 0$$

$$9 > 78$$

$$9 < 78$$

$$\Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \text{ не угод. условию } x \geq 0$$

$\Rightarrow$  не подходит.

Проверка:

$$x_1 = \frac{1}{9} : \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27} - 6 \cdot \frac{1^3}{9} + 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27} + 3 \cdot \frac{1^3}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1 - 18 + 54}{27}} = \sqrt{\frac{1 + 9 + 27}{27}}$$

$$\sqrt{\frac{37}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$0 = 0$  - верно

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{9} \text{ является решением ур-я.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

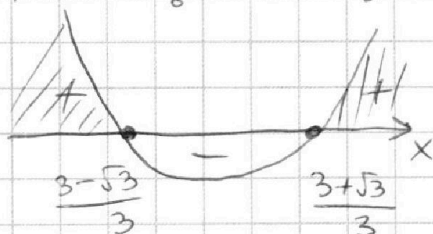
$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

дискр:

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$



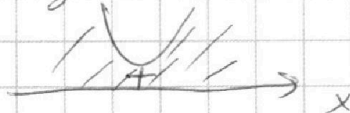
$$x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$$(2) \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

дискр:

$$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3$$

$\Rightarrow$  корней нет



$\Rightarrow$  при всех  $x$ :

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\text{Объединим (1) и (2): } x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 81x^2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

$$-81x^2 + 9x = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x(1 - 9x) - 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(1 - 9x)(9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$1 - 9x = 0$$

$$9x = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{9}$$

$$\text{или } 9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x = 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 81x^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

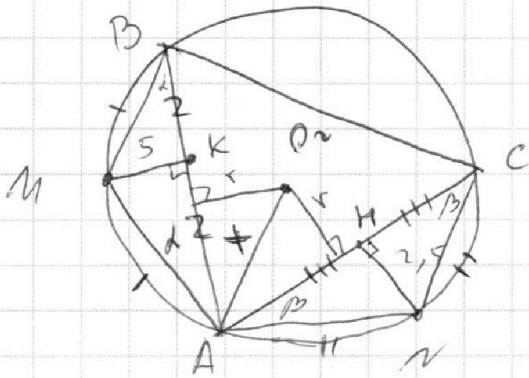
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 7.

Даны:  $\triangle ABC$ ,  $g(N; AC) = 2,5$ ;  $g(M; AB) = 5$

Найти:  $AO_2$ , где  $O_2$  - центр  
вписанной окружности.



Решение:

1) ~~Пусть~~ Пусть  $AO_2 = x$ .

2) Пусть  $\angle MCA = \angle BCM = \alpha$ ,  $\angle ANA = \angle NBC = \beta$

тогда  $\angle MBA = \angle BAN = \alpha$ , т.к. опущенные на  
равные дуги и дуги те опущенные  
 $\angle BCM$  и  $\angle MCA$

аналогично:  $\angle CAN = \angle ACN = \beta$

3) ~~Пусть~~ Пусть  $g(M; AB) = MK$ ,

а  $g(N; AC) = NH$

4) рассм.  $\triangle CNH$ :

$$\text{отн. } \tan \beta = \frac{NH}{HC}; \quad \frac{HN}{HC} = \frac{HC}{\tan \beta}$$

т.к.  $\triangle ANC$  -  $\triangle O$ , т.к.  $\angle AN = \angle CN \Rightarrow AN = CN$

$$\text{т.к. } H - \text{сердце } AC \Rightarrow AC = 2 \cdot HC = \frac{2 \cdot NH}{\tan \beta} = \frac{5}{\tan \beta}$$

5) аналогично в  $\triangle AMB$ :

$K$  - середина  $AB$

$$\Rightarrow BK = \frac{1}{2} AB = 2 \cdot BK$$

рассм.  $\triangle MBK$ :

$$\tan \alpha = \frac{MK}{BK}; \quad BK = \frac{MK}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2 \cdot MK}{\tan \alpha} = \frac{10}{\tan \alpha}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) по т. Синусов:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\frac{10}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin 2\beta} \quad | :5$$

$$\frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\beta}$$

$$2 \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha, \text{ так как } \alpha, \beta \in (0, \pi/2)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

7) по т. Косинусов в  $\triangle MKC$ :

$$\sin \beta = \frac{KN}{CN}; \quad CN = \frac{KN}{\sin \beta}$$

8) по т. Косинусов в  $\triangle MKA$ :

$$\sin \alpha = \frac{MK}{AM}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{KN \cdot AM}{CN \cdot MK} = \frac{2,5 \cdot AM}{5 \cdot CN} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \cdot AM = 5\sqrt{2} \cdot CN$$

$$AM = \sqrt{2} \cdot CN$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$= 4(28561 + 101203) = 4 \cdot 129764 = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} 114244 \overline{) 4} \\ \underline{4} \\ 34 \\ \underline{32} \\ 22 \\ \underline{20} \\ 74 \\ \underline{74} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times 627 \\ \hline 1710 \\ + 5700 \\ + 17100 \\ \hline 179764 \end{array}$$

$$\sqrt{129764} = 358$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 110 \\ \hline 1100 \\ + 11000 \\ \hline 12100 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 500^2 &= 250000 \\ 300^2 &= 90000 \\ 350^2 &= (300+50)^2 = 90000 + 2 \cdot 50 \cdot 300 + 2500 = 120000 + 1500 = 121500 \end{aligned}$$

$$289 = 17^2$$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 209 \\ \underline{209} \\ 0 \end{array} = 3 \cdot 209 = 3 \cdot 11 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 11 \\ \hline 190 \\ + 110 \\ \hline 209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 352 \\ 352 \\ \hline 704 \\ + 1760 \\ + 10580 \\ \hline 123904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 360 \\ 360 \\ \hline 216 \\ + 1080 \\ \hline 129600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 382 \\ 382 \\ \hline 764 \\ + 2772 \\ + 10860 \\ \hline 139044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 13 \\ \underline{12} \\ 10 \end{array} = 13^2, 2$$

$$m^2 = \frac{-338 + 2\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19}}{2 \cdot 17^2} = \frac{17\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}{17^2}$$

$$m = \frac{\sqrt{17\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}}{17}$$

$$\begin{array}{r} \times 338 \\ 338 \\ \hline 2704 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 149 \\ 149 \\ \hline 1391 \\ + 596 \\ + 1490 \\ \hline 07 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28561 \\ \times 4 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$AN = 2C = 4$$

$$9 \cdot 20 = 180$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $ab : 2^{15} 7^{11}$ ,  $bc : 2^{17} 7^{18}$ ,  $ac : 2^{23} 7^{39}$   
 $abc = 2^{\alpha} 7^{\beta} = 2^{23} 7^{39}$   
 $\alpha = \max(15, 17, 23) = 23$   
 $\beta = \max(11, 18, 39) = 39$

$\min(abc)$

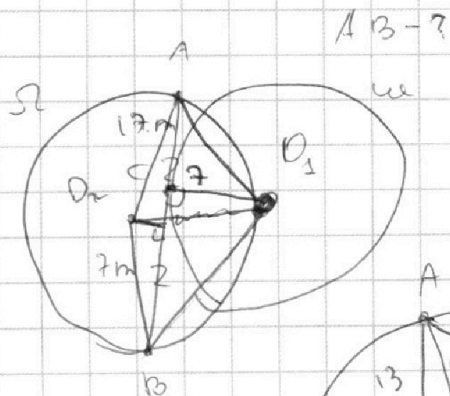
НОД, м.к.

2)  $\frac{a}{b}$  — несократима  
 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$   
 $\log(a; b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$   
 $(a-b)^2 + 5ab$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab}$   
 $(a+b)^2 - 9ab$   
 $\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a+b}{ab}$

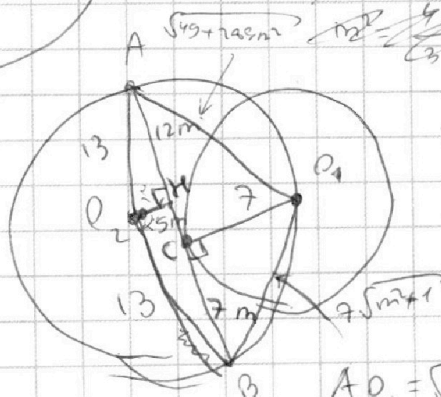
$\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a+b}{ab}$



$R_{\omega} = 7; R_{\Omega} = 13$

3) 
$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 17 \\ \hline 2304 \\ + 2304 \\ \hline 5712 \\ + 1014 \\ \hline 6726 \end{array}$$

$6^26 - 49 = 677 \rightarrow 627$



$6^26 - 49 = 677 \rightarrow 627$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$\cos \angle O_1 O_2 B = \dots$

$A O_1 = \sqrt{49 + 289m^2}$   
 $\Rightarrow \sin \angle O_1 A C = \frac{7}{\sqrt{49 + 289m^2}}$

$O_1 B = \sqrt{49m^2 + 49} = 7\sqrt{m^2 + 1}$

$26 = 2 \cdot 13 = \frac{7\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{49 + 289m^2}}{7} = \sqrt{m^2 + 1} (49 + 289m^2) ?$

$676 = (t+1)(49 + 289t) = 49t + 289t + 49 + 289t^2$

$289t^2 + 338t - 627 = 0; D = 114244 + 4 \cdot 289 \cdot 627 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{4}{3}$ ,  $m = 1$   
 $16 - 27 = -9$

$a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $m = 4$   
 $25 - 36 = -9$

$\frac{4}{5} = \frac{9}{81-9 \cdot 4 \cdot 5}$ ,  $m = 9$

$a \equiv -b$   
 $a^2 \equiv b^2 \Rightarrow 81a^2b^2 \equiv 81b^4$

если  $a: k, 70$   
 и  $b: k \Rightarrow k = 1$

$-9b^2 \equiv 0 \Rightarrow 9b^2: m$   
 $9a^2 \equiv 0 \Rightarrow 9a^2: m$   
 $\Rightarrow a^2: \frac{m}{9}, b^2: \frac{m}{9}$

$9b^2 = km$   
 $\Rightarrow 3b = \sqrt{mk}$

$a^2 + 2ab + b^2 \equiv 0$   
 $\equiv 2(a^2 + ab) = 2a(a+b) \equiv 0$

$9ab = mp$   
 $9a^2 = l(m)$   
 $9b^2 = j(m)$

$9(a^2 + b^2) \equiv 0 = km$ , если  $mk > 9$   
 $9(a^2 + b^2) \equiv$

$9ab \equiv 9 \equiv 0$   
 $\Rightarrow m \leq 9$   
 $\Rightarrow \max(m) = 9$

$m \cdot k(a; b) = 1, 70$

$a^2 = \frac{ml}{9}; b^2 = \frac{mj}{9}$

если  $(a^2; m) \geq 2$   
 $(9; 9) = 1$   
 $9 \cdot 9 = 81$   
 $m: 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



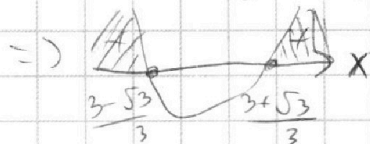
$$4) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D_1 = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$D_2 = 9 - 4 \cdot 3(x^2 + x)$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$1 - 9x \geq 0: 1 - 9x + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 9x^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$-81x^2 + 9x = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{\dots}$$

$$9x(9x - 9) - 2 \cdot (9 - 9x) \cdot \sqrt{\dots} = 0$$

$$(1 - 9x) (9x - 2 \cdot \sqrt{\dots}) = 0$$

$$9x = 2 \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (x \geq 0)$$

$$81x^2 = 4x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 69 = 1248$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ + 16 \\ \hline 494 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{69 \cdot 2}$$

$$\begin{array}{r} 1248 | 4 \\ - 49 \\ \hline 0 \\ \hline 3024 | 2 \\ - 23 \\ \hline 0 \\ \hline 52 \\ - 37 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$8 \pm \sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$3 \pm \sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$2 \pm \sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$3 \pm \sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$2 \sqrt{3}$$

$$4 \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 345 \\ 1345 \\ \hline 935 \end{array}$$

$$+ 1725$$

$$+ 1380$$

$$+ 1035$$

$$179025 (-) \text{ не подходит}$$

$$+ \text{не подходит}$$

$$6 + 2\sqrt{78} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}$$

$$6 + 2\sqrt{78} \sqrt{69} + 23\sqrt{3}$$

$$9 \pm 3\sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$+ \rightarrow 3: 12 \sqrt{6269}$$

$$9 - 3\sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$2 \sqrt{78} \sqrt{63} + 23\sqrt{3}$$

$$64 \sqrt{9 \cdot 3} = 22$$

$$\rightarrow 5 \cdot x \frac{1}{3}$$

$$1223$$

$$- 623$$

$$690$$

$$+ 633$$

$$1323$$

$$1720 - 16 = 1104$$

$$1248 | 16$$

$$- 112$$

$$128 - 6$$

$$- 128$$

$$0$$

$$\times 13$$

$$78$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 70 \\ \hline 10080 \end{array}$$

$$10080 - 144 = 9936$$

$$+ 144$$

$$78 = 26 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$$

$$1248 = 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$1 - 18 = -17 + 54 = 37$$

$$54 - 17 = 44 - 7 = 37$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 63 \\ \hline 189 \\ + 378 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{9}: 3 \cdot \frac{1}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9} + 2 = 3 \frac{1}{9} + 3 \frac{1}{9} + 4$$

$$1 = 1 (8)$$

$$2 \frac{8}{9} = 80 \frac{24}{27} = 80 \frac{8}{9}$$

$$- 81x^2 + 9x = 9x(1 - 9x)$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 70 \\ \hline 10080 \end{array}$$

$$10080 - 144 = 9936$$

$$+ 144$$

$$78 = 26 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$$

$$1248 = 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$1 - 18 = -17 + 54 = 37$$

$$54 - 17 = 44 - 7 = 37$$

$$x = \frac{1}{9}: 3 \cdot \frac{1}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9} + 2 = 3 \frac{1}{9} + 3 \frac{1}{9} + 4$$

$$1 = 1 (8)$$

$$2 \frac{8}{9} = 80 \frac{24}{27} = 80 \frac{8}{9}$$

$$- 81x^2 + 9x = 9x(1 - 9x)$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 70 \\ \hline 10080 \end{array}$$

$$10080 - 144 = 9936$$

$$+ 144$$

$$78 = 26 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$$

$$1248 = 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$1 - 18 = -17 + 54 = 37$$

$$54 - 17 = 44 - 7 = 37$$

$$x = \frac{1}{9}: 3 \cdot \frac{1}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9} + 2 = 3 \frac{1}{9} + 3 \frac{1}{9} + 4$$

$$1 = 1 (8)$$

$$2 \frac{8}{9} = 80 \frac{24}{27} = 80 \frac{8}{9}$$

$$- 81x^2 + 9x = 9x(1 - 9x)$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 70 \\ \hline 10080 \end{array}$$

$$10080 - 144 = 9936$$

$$+ 144$$

$$78 = 26 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$$

$$1248 = 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$1 - 18 = -17 + 54 = 37$$

$$54 - 17 = 44 - 7 = 37$$

$$\begin{array}{r} 109 \\ \times 23 \\ \hline 327 \\ + 1090 \\ \hline 2497 \end{array}$$

$$2497$$



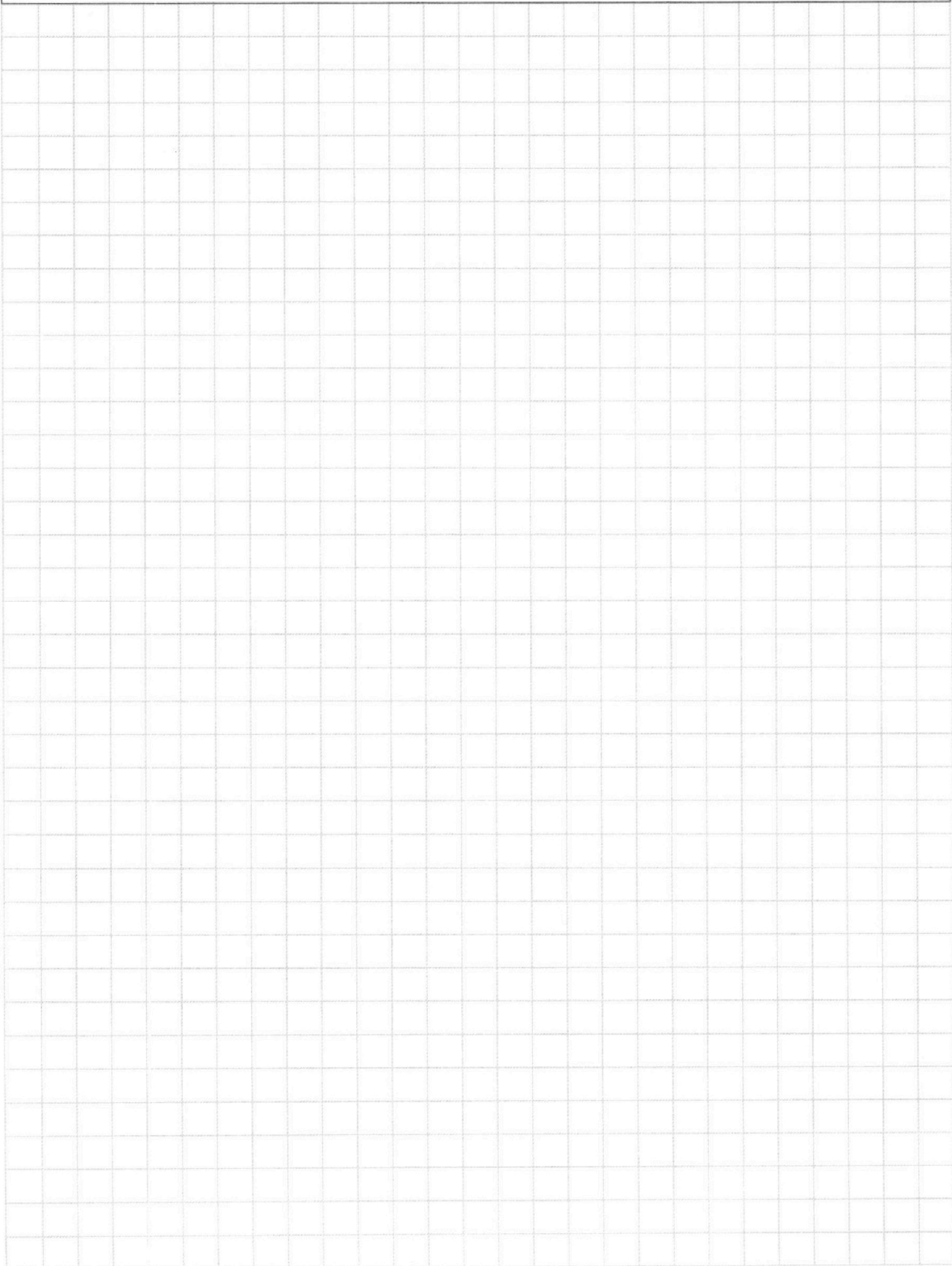
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



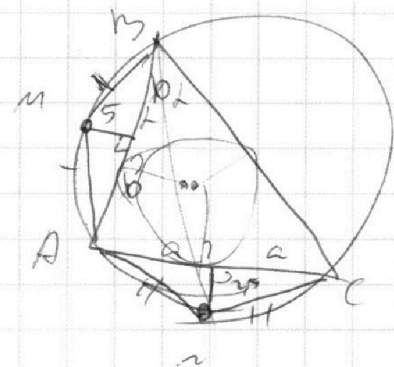
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



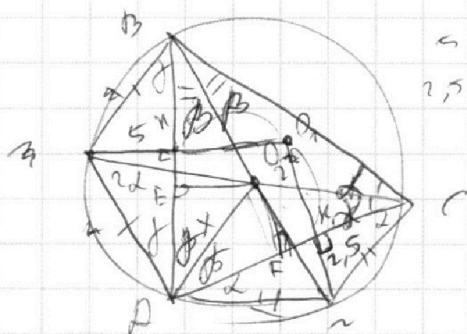
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



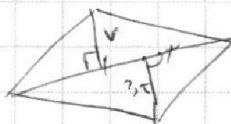
$AO_2 = 2$ ,  $O_2$  - центр вписанной окр. или  $\Gamma_2$

$\angle ABE = 2\alpha$ :

$\angle AN_2 \text{ и } \angle NC = 2\alpha$



$\angle KO_1 = \alpha, K \in \Gamma_1, \alpha$   
 $\alpha \rightarrow O_1, K = 2r \cdot \sin \alpha$



$AC = 2 \cdot 2,5 \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{KC}{r}; KC = \cos \alpha \cdot AN$

$AB = 10 \cdot \cos \alpha$

$\frac{10 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{5 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{AC}{5} = \frac{AB}{10 \cdot \sin 2\alpha} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$

$AC = \frac{AB \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = AB \cdot \cos \alpha$

$BE = \frac{AB \cdot r}{10}$

$AF = AC - \frac{AC \cdot r}{5} = AB \cdot \cos \alpha - \frac{AB \cdot \cos \alpha \cdot r}{5} = AB \cdot \cos \alpha \cdot \left(1 - \frac{r}{5}\right)$

$AC \left(1 - \frac{r}{5}\right) = AB \left(1 - \frac{r}{10}\right)$



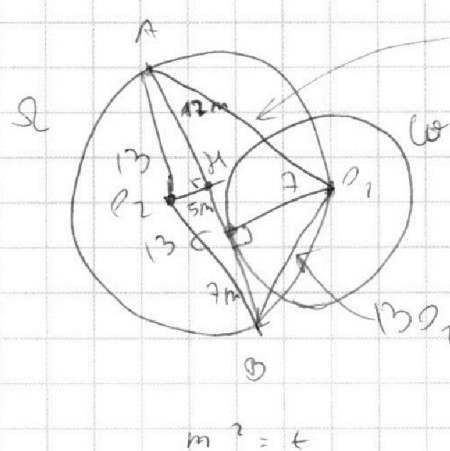
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_1 = \sqrt{205m^2 + 49}$$

$$\sin \angle O_1 AB = \frac{7}{\sqrt{205m^2 + 49}}$$

$$24m = ?$$

$$BO_1 = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

$$26 = \frac{7\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{205m^2 + 49}}{7}$$

$$m^2 = t$$

$$676 = 209t^2 + 209t + 49t + 49$$

$$209t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 4 \cdot 169^2 + 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 17 =$$

$$= 4(13^4 + 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 17)$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 3} \\ 2 \phantom{0} \\ \underline{13} \phantom{0} \\ -12 \phantom{0} \\ \underline{16} \phantom{0} \\ 19 \phantom{0} \\ \underline{18} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \\ \underline{9} \phantom{0} \\ 1 \phantom{0} \\ \underline{0} \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ 2 \phantom{0} \\ \underline{13} \phantom{0} \\ -12 \phantom{0} \\ \underline{12} \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 3} \\ 209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209 \overline{) 19} \\ 19 \phantom{0} \\ \underline{19} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 3} \\ 3 \phantom{0} \\ \underline{3} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{0} \times 169 \\ \phantom{0} \times 169 \\ \hline 1521 \\ + 1094 \\ + 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{0} \times 150 \\ \phantom{0} \times 150 \\ \hline 22500 - 200 = 22200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{0} \times 627 \\ \phantom{0} \times 285 \\ \hline 5843 \\ + 5096 \\ + 1254 \\ \hline 181203 \\ \phantom{0} \times 45 \\ \phantom{0} \times 45 \\ \hline 725 \\ \phantom{0} \times 170 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{0} \times 285 \\ \phantom{0} \times 627 \\ \hline 2023 \\ + 578 \\ \hline 1734 \\ + 181203 \\ \hline 28561 \\ \phantom{0} \times 452 \\ \phantom{0} \times 285 \\ \hline 209764 \\ \phantom{0} \times 285 \\ \phantom{0} \times 2 \\ \hline 378 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 450^2 = 202500 \\ \phantom{0} \times 452 \\ \phantom{0} \times 452 \\ \hline (450+2)^2 = 202500 + 4 + 1800 = \\ \phantom{0} \times 458 \\ \hline (450+2) \times 202500 + 64 + 7200 = \\ 209764 \\ \phantom{0} \times 916 \\ \phantom{0} \times 338 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{0} \times 452 \\ \phantom{0} \times 2 \\ \hline 916 \end{array}$$