МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть a_p, b_p, c_p — степени вхождения в разложение на прост. множители чисел a, b и c соотв. простого числа p, тогда:

$ab \vdots 2^{15} 7^{11} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_7 + b_7 \geq 11 \end{cases}$

Аналогично для bc и ac; получаем:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_7 + b_7 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ b_7 + c_7 \geq 18 \\ a_2 + c_2 \geq 23 \\ a_7 + c_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 15 + 17 + 23 = 55 \\ 2a_7 + 2b_7 + 2c_7 \geq 11 + 18 + 39 = 68 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 28 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 34 \text{ (но т.к. } a_7 + c_7 \geq 39\text{, то } a_7 + b_7 + c_7 \geq 39) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Степень вхождения двойки в разл. $abc \geq 28$, а семёрки ≥ 39. Заметим, что при $abc = 2^{28} 7^{39}$ (т.е. мин. возм. при таких условиях) существует подходящая тройка a, b, c:

$a = 2^{10} 7^{11}$, $b = 2^5$, $c = 2^{13} 7^{28}$ и

$ab = 2^{15} 7^{11} \vdots 2^{15} 7^{11}$, $bc = 2^{18} 7^{28} \vdots 2^{17} 7^{18}$ и

$ac = 2^{23} 7^{39} \vdots 2^{23} 7^{39}$

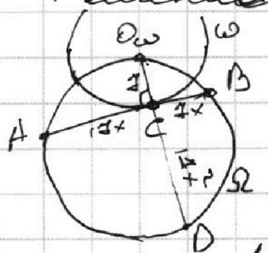
Ответ: $2^{28} 7^{39}$

№ 3

Дано: ω, Ω – окр., центр ~~ω~~ ω лежит на Ω, $A, B \in \Omega$, $AB \cap \omega = C$, $\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

Найти: AB – ?

Решение: Пусть O_ω – центр ω, D – пересечение продолжения $O_\omega C$ за точку C и Ω, тогда $AC \cdot CB = O_\omega C \cdot CD$. Положим $AC = 17x$, а $CB = 7x$, тогда: $17 \cdot 7x^2 = 7 \cdot CD$ $\Rightarrow CD = 17x^2$. Т.к. прямоуг. треугольники $\triangle O_\omega CB$ и $\triangle ACD$ подобны (по двум катетам), то их площади тоже подобны с коэфф. $\frac{17^2}{7^2}$ $\Rightarrow$



$S_{ACD} = \frac{17^2}{7^2} S_{O_\omega CB} \Leftrightarrow 17^2 x^3 = 17^2 \cdot \frac{7^2}{7^2} x = 17^2 x \Rightarrow x = 1$ $(x > 0)$, т.е. $AB = 17x + 7x = 17 + 7 = 24$

Ответ: ~~AB~~ 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \overset{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\cancel{3-\sqrt{3}}}] \cup [\overset{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\cancel{3+\sqrt{3}}}; +\infty) \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1+\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$

~~Обозначим за a~~ Пусть $3x^2-6x+2 = a$ и

$3x^2+3x+1 = b$, тогда заметим, что $a - b =$

$= 1 - 9x$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 - 9x \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - 9x \Leftrightarrow 9x = 2\sqrt{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x \in [1+\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow 81x^2 = 4(3x^2+3x+1)$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 1248$

$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$ $\left[\begin{array}{l} \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{6+2\cdot 9}{69} < 1 \quad \notin \text{ОДЗ} \\ \frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{6-2\cdot 8}{69} < 0 \\ \notin \text{ОДЗ} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ корней нет

Ответ: $\varnothing$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, т.к. $ax+y-8b=0$ – кас., то:

$$\begin{cases} \dfrac{|a\cdot 0+0-8b|}{\sqrt{a^2+1}}=1 \\ \dfrac{|a\cdot 0+12-8b|}{\sqrt{a^2+1}}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64b^2=a^2+1 \\ 144-192b+64b^2=4(a^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 64b^2=a^2+1 \\ (2b+1)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ 64b^2=a^2+1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\pm\sqrt{15} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ a=\pm\sqrt{47} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Все подходящие значения пар-ра a это

$\pm\sqrt{15}$ и $\pm\sqrt{47}$

Ответ: $-\sqrt{47}, -\sqrt{15}, \sqrt{15}, \sqrt{47}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 6

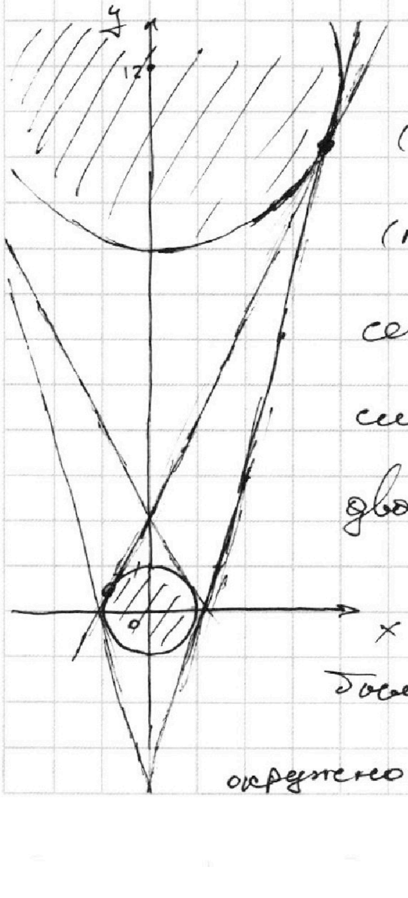
Заметим, что нер-во $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0$ эквивалентно системе нер-в:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+(y-12)^2 \ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+(y-12)^2 \le 16 \end{cases} \end{array}\right.$$ ~~- решением этой системы~~

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+(y-12)^2 \le 16 \end{array}\right.$$ — два круга с центрами в $(0;0)$ и $(0;12)$ радиуса 1 и 4 соотв.

Ур-не $ax+y-8b=0$ при разл. ~~пар~~ пар-ах a и b задаёт всевозможные прямые.



У прямой и круга либо ноль, либо ~~не~~ одна (касание), либо бесконечно много (прямая проходит через круг) точек пересечения. Поэтому для того чтобы система из условия имела ровно два решения, ~~нужно~~ необходимо и достаточно, чтобы прямая $ax+y-8b=0$ была общей касательной граничных окружностей кругов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = n\,2^{15}7^{11}$

$bc = m\,2^{17}7^{18}$

$ac = k\,2^{23}7^{39}$

$2ab - 2(a+b) = a(b-1) + b(a-1)$

$abc = (2^{15+17+18}\,7^{11+18+39})^{1/2} = 2^{25}7^{34}$

$ab = n\,2^{15}7^{11}$ $\quad na + mb = 1$

$abc = \sqrt{nmk}\,2^{25}7^{34}$

$c = \sqrt{\frac{mk}{n}}\,2^{10}7^{23}$

$a = \sqrt{\frac{nk}{m}}\,2^{8}7^{16}$

$b = \sqrt{\frac{nm}{k}}\,2^{7}7^{10}$

$ab = a'b^2 = n\,2^{15}7^{11}$

$bc = c'b^2 = m\,2^{17}7^{18}$

$ac = a'c'b^2 = k\,2^{23}7^{39}$

$c \vdots a \vdots b \Rightarrow$

$\cancel{abc = r\,2^{23}7^{39} \Rightarrow r \vdots k}$, и $kb = r$

и $\cancel{abc = kb\,2^{23}7^{39}}$

$ab = 2^{15}7^{16}$

$bc = 2^{17}7^{18}$

$ac = 2^{23}7^{39}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 15 \\ a_7 + b_7 = 16 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ b_7 + c_7 = 18 \\ a_2 + c_2 = 23 \\ a_7 + c_7 = 39 \end{cases}$

$a = 2^{10}7^{11}$

$b = 2^{5}$

$c = 2^{13}7^{28}$

$\begin{cases} c_2 - a_2 = 1 \\ c_2 + a_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 12 \\ a_2 = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} c_7 - a_7 = 7 \\ c_7 + a_7 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_7 = 23 \\ a_7 = 16 \end{cases}$

$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_7 + b_7 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ b_7 + c_7 \geq 18 \\ a_2 + c_2 \geq 23 \\ a_7 + c_7 \geq 39 \end{cases}$$

$a_2 + 2b_2 + c_2 \geq 32$

$2b_2 \geq 9$

$b_2 \geq 5 \Rightarrow a_2 \geq 10$

$b_2 \geq 9$

$a_2 \geq 10$

28

$a_2 + b_2 + c_2 \geq$

$a_7 + b_7 + c_7 \geq 34$

1248	2
624	2
312	2
156	2
78	2
39	3
13	13

$2^{28} \cdot 7 = abc$

$c = 2^{13} 7^{28} \Rightarrow b = 2^{4} 7 \Rightarrow a = 2^{5}$

$\gcd(a, b) = 1$

$\gcd(a^2 - 7ab + b^2, a + b)$

$= \gcd(5ab, a+b)$

$17^2 x^3 = \frac{17^2}{7^2} \cdot 7^2 x^2$

$\Rightarrow x = 1$

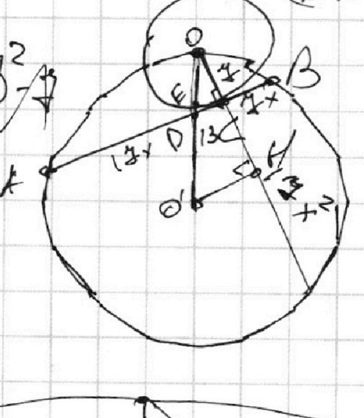
$DC^2 = DE \cdot (DE + 2EO) = (DE + EO)^2 - 9$

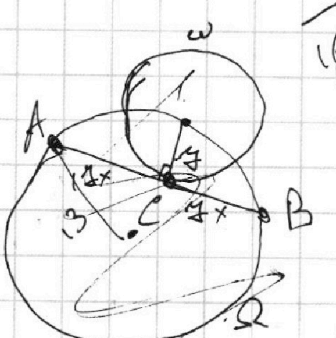
$= DE^2 + 2 DE \cdot EO = DE^2 + 2DE \cdot EO + EO^2 - 9$

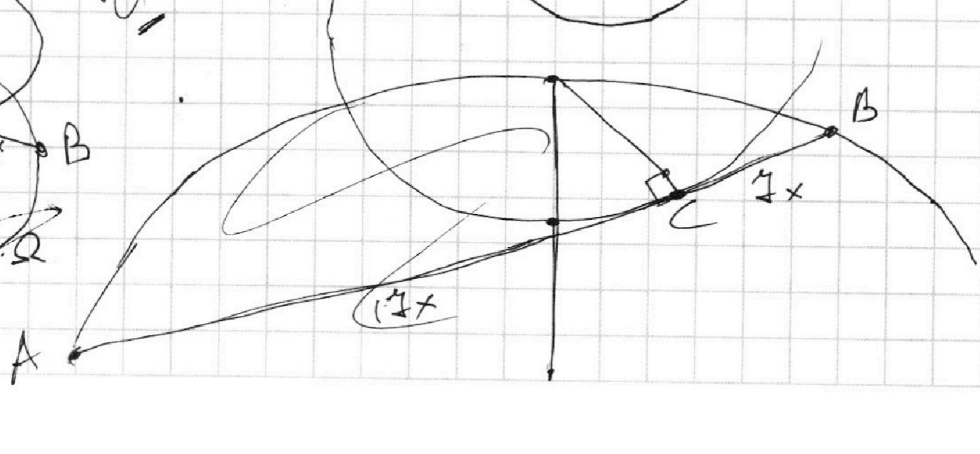
$\Rightarrow EO = $

$DC^2 = DE \cdot (DE + 14) = (DE + 7)^2 - 7$

$O'H = \sqrt{169 - \frac{17x^2}{2}}$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{6+12\sqrt{78}}{65}$ $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=$

$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$1=\frac{|a\cdot 0+0-8b|}{\sqrt{a^2+1}}$

$\gcd(5ab, a+b)=$

$=\gcd(5ab-5a-5b, a+b)=$

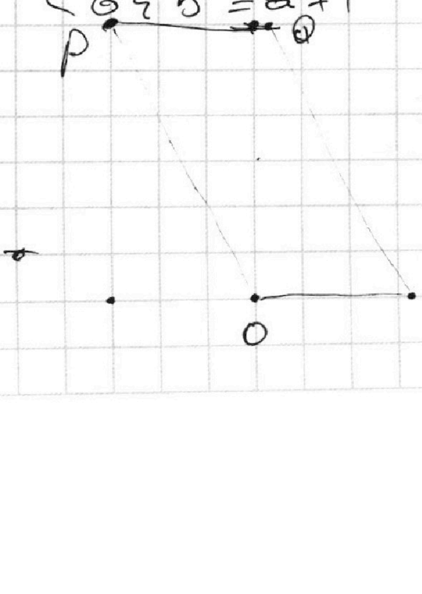
$8|b|=\sqrt{a^2+1}$ $64b^2=a^2+1$

$$\begin{cases}(12-8b)^2=4a^2+4\\64b^2=a^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}144-192b+64b^2=4a^2+4\\64b^2=a^2+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3\cdot64b^2+192b-144=0\\64b^2=a^2+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4b^2+4b-3=0\\64b^2=a^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2b+1)^2=4\\64b^2=a^2+1\end{cases}\rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}b=\frac12\\b=-\frac32\end{array}\right.\\64b^2=a^2+1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=\frac12\\a=\pm\sqrt{15}\end{cases}\\\begin{cases}b=-\frac32\\a=\pm\sqrt{47}\end{cases}\end{array}\right.$$



$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{14-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$

$=\frac{14}{x_2-x_1}-2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3-\sqrt{3}] \cup [3+\sqrt{3}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 3-\sqrt{3}] \cup [3+\sqrt{3}; +\infty)$

$\frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$

$\sqrt{3(x-1)^2-\cancel{10}} - \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = 1-9x$

$t = x - \frac{1}{4}$

$(3x^2+(\cancel{6x-2}\ 2-6x))(3x^2+(3x+1))$

$\sqrt{3(t-\frac{3}{4})^2-10} - \sqrt{3(t+\frac{3}{4})^2+\frac{3}{4}} = 9x^4+3x^2(3+3x)+$

$+(3x+1)(2-6x) =$

$\cancel{6x^2-3x+3}$ $1-9x$

$2\sqrt{a} = -9x$

$= 9x^4+9x^2(x+1)+$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} = 1-9x$

$+2-18x^2 =$

$a - b = 1-9x$

$= 9x^4+9x^3-9x^2+2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b} = 1$

$a = 1-2\sqrt{b}+b$

$a+b+2\sqrt{ab} = 1$

$a-b = 1-2\sqrt{b} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

$1-9x = 1-2\sqrt{b}$

$\cancel{\sqrt{a}} = 1-\sqrt{b}$

$x-9x = x-2\sqrt{b} \Rightarrow x \geq 0$ ОДЗ

$4b = 81x$

$69^2 = 70^2-140+1$

$12x^2+12x+4 = 81x$

4761

$= 4761$

$12x^2-69x+4=0$

$\frac{4761 - 192}{4569}$ $16 \cdot 12 = 192$

$69 \cdot 16 = 414, 69, 1104$

$x = \frac{69 \pm \sqrt{69^2-16 \cdot 12}}{24} = \frac{69 \pm \sqrt{4569}}{24}$

$4569 | 3$
923

$\cancel{12/12+1.23}$

$69x^2+24x+8=0$

$144+1104=1248$

$2^6 \cdot 3^2 - 2^5 \cdot 3 \cdot 23$

$2^5 \cdot 3(2 \cdot 3 - 23)$