



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание №1

Пусть

x_a - степень в-ой 2 входит в разложение a на множители

x_b - степень в-ой 2 входит в разложение b на множители

Аналогично x_c

y_a - степень в-ой 3 входит в разложение a на множители

аналогично y_b, y_c

z_a - степень в-ой 5 входит в разложение a на множители $\Rightarrow$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \Rightarrow x_a + x_b \geq 9 \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow$$

~~$$x_b + x_c \geq 14$$~~

$$y_a + y_b \geq 23$$

$$x_b + x_c \geq 14$$

$$y_b + y_c \geq 13$$

~~$$z_a + z_b \geq 23$$~~

$$z_b + z_c \geq 13$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow$$

$$x_a + x_c \geq 19$$

$$y_a + y_c \geq 18$$

$$z_a + z_c \geq 30$$

$\Rightarrow$

~~$$2(x_a + y_b + y_c) \quad 2(x_a + x_b + x_c) \geq 28 + 14 = 42$$~~

$$\Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 21$$

~~$$2(y_a + y_b + y_c) \geq 23 + 18 = 41 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 20,5 \Rightarrow$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_a + y_b + y_c \geq 21, \text{ т.к. } y_a \in \mathbb{N}, y_b \in \mathbb{N}, y_c \in \mathbb{N}$$

$$y_a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$y_b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$y_c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\text{Аналогично } 7a + 7b + 7c \geq \frac{13+30}{2} \Rightarrow \geq 20,5$$

$$7a + 7b + 7c \geq 21$$

$$a+b \geq 2, \quad x_a + x_b + x_c \geq 2, \quad y_a + y_b + y_c \geq 2, \quad 7a + 7b + 7c \geq 21$$

$$2 \quad 21 \quad 21 \quad 21 \quad \left(\text{Достигается при:} \right)$$

Ответ:

$$\text{При } y_a + y_b + y_c = 20,5 \Rightarrow$$

$$y_c \geq 10,5$$

$$y_b \geq 3,5$$

$$y_a \geq 7,5$$

$$\text{Условие } y_c + y_a + y_b \in \mathbb{N}, \text{ а также}$$

$$y_a \geq 2, \quad y_a + y_b + y_c \geq 20,5$$

$$(1) \begin{cases} y_a + y_b \geq 10 \\ y_b + y_c \geq 13 \\ y_a + y_c \geq 18 \end{cases} \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & z_a + z_b + z_c \geq 27 \\ & z_a + z_b \geq 10 \\ & z_b + z_c \geq 13 \\ & z_a + z_c \geq 30 \Rightarrow z_a \\ & z_a \geq 0 \\ & z_b \geq 0 \Rightarrow \\ & z_c \geq 0 \end{aligned} \quad z_a + z_b + z_c \geq 29.5 \Rightarrow$$

$z_b + z_a + z_c \geq 30$. При $z_a = z_c = 15, z_b = 0$
система (2) верна $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} abc &: 2^{11} 3^{11} 5^{30} \geq \\ abc &\geq 2^{11} 3^{11} 5^{30}, \text{ что} \\ \text{достигается при } a &= 2^7 3^8 5^{15} \\ b &= 2^2 3^3 5^0 \\ c &= 2^{12} 3^{10} 5^{15} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (abc)_{\min} = 2^{11} 3^{11} 5^{30}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При $y_a + y_b + y_c = 21$ нельзя подобрать
такие y_a, y_b, y_c , что $y_a, y_b, y_c \in \mathbb{N}_{\neq 0}$

и выполняются (1), т.к. тогда
у систем

$$\begin{cases} y_a + y_b = 11 \\ y_b + y_c = 13 \\ y_a + y_c = 18 \end{cases}, \quad \begin{cases} y \\ y \\ y \end{cases}$$

$$y_a + y_b + y_c \geq \frac{10 + 13 + 18}{2} = 20.5$$

$$y_a, y_b, y_c \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 21$$

Аналогично

$$z_a + z_b + z_c \geq \frac{27}{3} \Rightarrow z_a + z_b + z_c \geq 30, \quad \text{т.к. } z_a + z_b + z_c \geq 27$$

$$abc: \quad \begin{array}{ccc} x_a + x_b + x_c & y_a + y_b + y_c & z_a + z_b + z_c \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \geq$$

$$\begin{array}{ccc} 2^{21} & 3^{21} & 5^{30} \\ 2 & 3 & 5 \end{array}, \quad \text{что достигается}$$

$$\text{при } a = \begin{array}{ccc} 2^{27} & 3^8 & 5^1 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}$$

$$b = \begin{array}{ccc} 2^2 & 3^3 & 5^1 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}$$

$$c = \begin{array}{ccc} 2^{12} & 3^{10} & 5^1 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

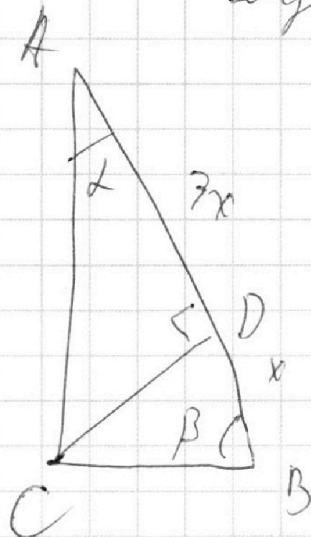
6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2



$$AB:DB = 3x:x = 3:1$$

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\triangle BCD \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow$$

$$BC^2 = BD \cdot AB = 4x^2 \Rightarrow$$

$$BC = 2x \Rightarrow$$

$$\alpha = \beta = 30^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\{ \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\{ \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = t$$

$$\{ \arcsin(\sin t) = t$$

$$- \frac{5\pi}{2} \leq \arcsin(\sin t) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{Пусть } t \in [-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin t) = t + 2\pi \Rightarrow$$

$$\cancel{t = t + 2\pi}$$

$$t + 10\pi = t$$

$$\cancel{t = -\frac{\pi}{2}}$$

$$4t = -10\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = -3\pi$$

$$\text{Аналогично } t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow t = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi$$

Всему четному p -й $f(t) = t$ и

$$g(t) = \arcsin(\sin t)$$

$$\text{Пусть } t \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$\arcsin(\sin t) = -\pi - t \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-5\pi - 5t = t$$

$$6t = -5\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Аналогично } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Пусть } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\cos(5t) = t \Rightarrow$$

$$5t = t \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; 0; -\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-3\pi; 2\pi; -\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-3\pi; 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



окружности в 7 точках не пересекает не будет

$\triangle OQR \sim \triangle OO_1Q \Rightarrow O_1$ делит OO_1 в отношении $3:2 \Rightarrow$

$$O_1 \left(\frac{18}{5}; 0 \right)$$

любая прямая, вида $y=kx+b$, проходящая через O , кривая

$\begin{cases} \text{tg } \alpha_2 \geq k \\ \text{tg } \alpha_1 \leq k \end{cases}$ не пересекает окружности в 7 точках

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{2}{6 \cdot \frac{18}{5}} = \arcsin \frac{10}{12} =$$

$$\arcsin \frac{5}{6} = \alpha, \alpha \in \left[\alpha; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{11}{35}} \Rightarrow$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \sqrt{\frac{25}{11}}$$

$$\alpha_2 = \pi - \arcsin \frac{3}{18} = \pi - \arcsin \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$\text{tg } \alpha_2 = -\sqrt{\frac{25}{11}} \Rightarrow$ угловой коэф. прямой вида $ax+by-3b=0$

k

$$k = -\frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-2\sqrt{\frac{25}{11}}; 2\sqrt{\frac{25}{11}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

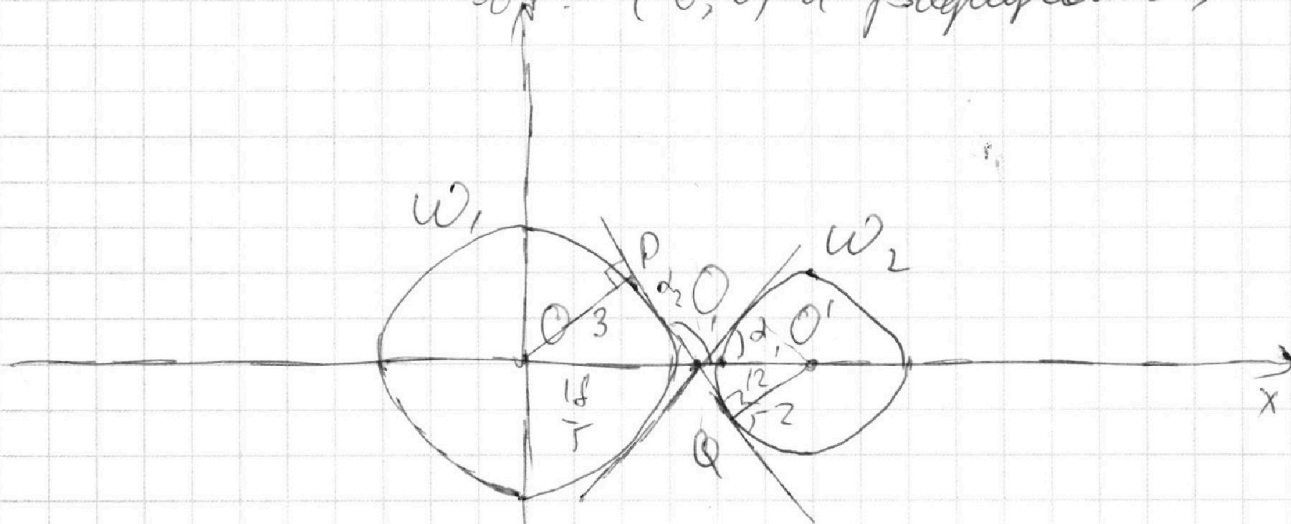
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4
график уравнение $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 17x + 32) = 0$
~~Определить~~ - 2 окружности:

Окружность ω_1 - с центром в т. $(0; 0)$
и радиусом 3, другая - с центром
в т. $(6; 0)$ и радиусом 2 $\Rightarrow$



Путь O_1 - точка пере-
сечения обеих касательных ω_1 и ω_2

Заметим, что если прямая проходит
через O_1 и не пересекает обе
окружности в 2 точках, то и касательная
прямая, ей параллельная, не



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание №5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 2743 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3'' - 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y > 0$$

$$x > 0$$

Пусть $u = \log_3 x$
 $v = \log_3 5y \Rightarrow$

$$(2) \begin{cases} u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0 \\ v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(4) \begin{cases} u^5 + 3,5 + 8u = 0 \\ v^5 - 3,5 + 8v = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} f(u) &= u^5 + 3,5 + 8u \\ g(v) &= v^5 - 3,5 + 8v \end{aligned}$$

$$f'(u) = 5u^4 + 8 > 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R})$$

$$f'(v) = 5v^4 + 8 > 0 \quad (\forall v \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$f(u), g(v)$ - возрастают на $\mathbb{R}$ ⇒
система имеет единственное
решение. Заметим, что
если $u = c, v = -c$, при-
чем $c^5 + 3,5 + 8c = 0$, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пара $(c; -c)$ - решение систе-
мы

Расс- и р-ю $f(t) = +5 - 3,5 + 8t$

$f(t)$ - непрерывна на $\mathbb{R}$

$f(0) = -3,5$
 $f(+4) = 6,5 \Rightarrow$ на $[0; 4]$ ур-ние

$f(t) = 0$ имеет хотя бы 1 корень
(теорема Больцано-Вейерштрасса) $\Rightarrow$

этот корень - единственный, т.к.

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) > 0 \Rightarrow$

Пункт 60-корень ур-ние $f(t) =$
 $+5 - 3,5 + 8t = 0 \Rightarrow$

пара $(c_0; -c_0)$ - ед. решение
системы (1) - так же ед. решение
системы (2) ($c_0 \neq 0$ т.к. $f(0) \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\log(-c_0) = 0 = \log_3 1 \Rightarrow$$

$$1 \cdot xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

x_a

x_b

x_c

y_a

y_b

y_c

z_a

z_b

z_c

$$x_a + x_b = 9$$

$$x_b + x_c = 14$$

$$x_a + x_c = 19$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$\Rightarrow 2(x_a + x_b + x_c) = 21 \cdot 2$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$x_c = 12$$

$$x_b = 2$$

$$x_a = 7$$

$$2(y_a + y_b + y_c) \geq 10 + 13 + 18 = 28 + 13$$

$$y_a + y_b + y_c \geq \frac{28 + 14}{2} = 21$$

$$z_a + z_b + z_c \geq \frac{10 + 13 + 30}{2} = 20 + 6,5 \geq 27$$

$$(abc)_{\min} = 2^{21} 3^{24} 5^{27}$$

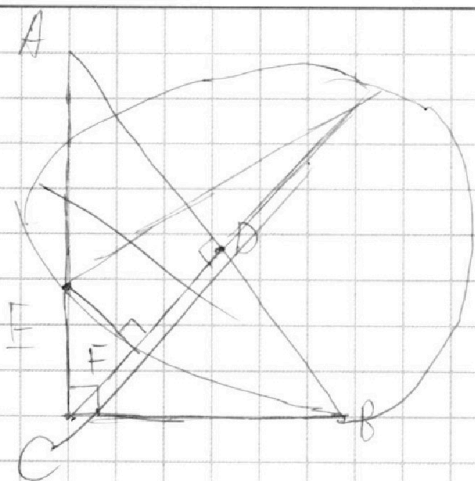
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 =$$

$$\frac{1}{2} \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8$$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$t = 1$$

$$t = -1$$

$$t = -1$$

$$2 +$$

$$+$$

$$-2 - 16 + 7 = 0$$

$$f'(t) = 10t^4 + 16 =$$

$$f''(t) = 40t^3 - 8$$

↑ поменьше

$$2(5t^4 +$$

$$f(t) = \text{возрастающий}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

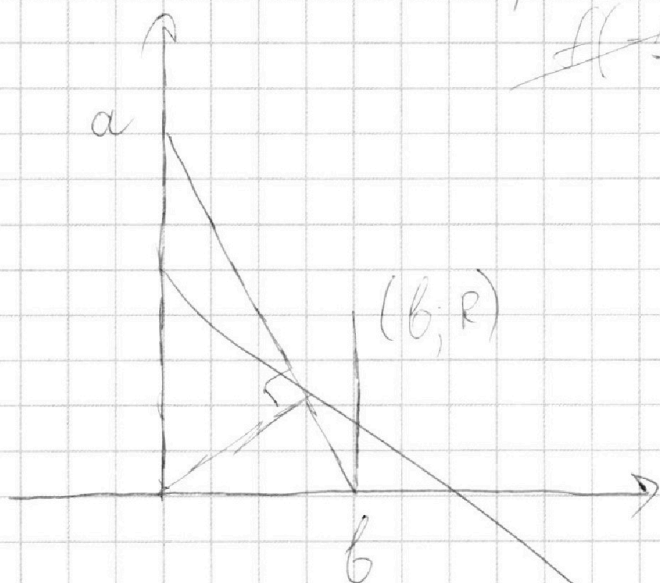
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2 + 5 + 16 + 7 = 0$$

корни отрицательные
 ~~$f(-1)$~~



$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

$$\frac{y}{a} = 1 - \frac{x}{b}$$

$$y = a - \frac{xa}{b}$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{b}{a}x \text{ - высота}$$

$$\text{или: } (x-b)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$y^2 + b^2 - 2Ry + R^2 = R^2$$

$$y^2 - 2Ry + b^2 = 0$$

$$(y-R)^2 = R^2 - b^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2 3^5} - 8 \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^{11} - 8 \end{cases} \Rightarrow xy$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$$\log_3^4 5y - 3,5 \log_{5y} 3 = -8$$

$$\log_3^4$$

$$\begin{aligned} & u^4 - v^4 + 3,5 \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) = 0 \\ & (u+v) \end{aligned}$$

$$u^4 + 3,5u + 8 = 0$$

$$v^4 - 3,5v + 8 = 0$$

$$u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0$$

$$u^5 + 3,5 + 8u = 0$$

$$v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0$$

$$v^5 - 3,5 + 8v = 0$$

$$u^5 + v^5 + 8(u+v) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

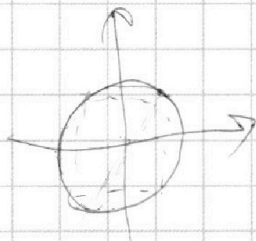
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{2} - 5$$

$$7\pi - 5 \arccos(\cos x) = x$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \Rightarrow$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = t$$

$$5 \arcsin(\sin t) = t$$

$$\arcsin(\sin t) =$$

$$\arcsin(\sin t) =$$

$$7\pi - \pi(2k+1) - x$$

$$2\pi k + x$$

$$5(2\pi k + t) = t$$

$$10\pi k = t$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\sin t) = t$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$-\frac{5}{2}\pi \leq t \leq \frac{5}{2}\pi$$

$$\arcsin(\sin t) = t \Rightarrow 5t = t \Rightarrow t = 0$$

$$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin t) = \frac{\pi}{2} - t, \text{ г.к.}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t \Rightarrow$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$5(\frac{\pi}{2} - t) = t$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5t = t$$

$$5\pi = 6t$$

$$t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$t \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

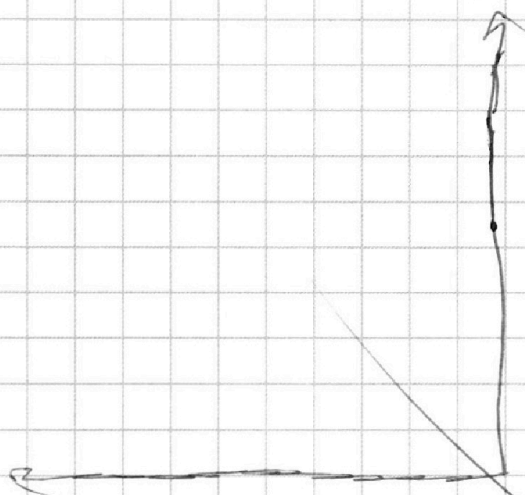
$$\arcsin(\sin t) = t - 2\pi$$

$$5(t - 2\pi) = t$$

$$5t - 10\pi = t$$

$$4t = 10\pi$$

$$t = \frac{5}{2}\pi \Rightarrow x = 2\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(u+v) \cdot u$$

$$7a + 27b + 7c \geq 26 \geq 30$$

$$26 > 30$$

$$u^5 + v^5 + f(u+v) = 0$$

$$f(u) = u^5 + 3,5 + fu = 0$$

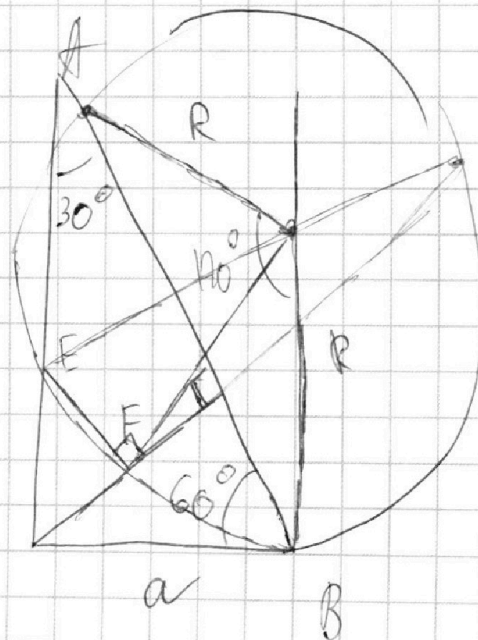
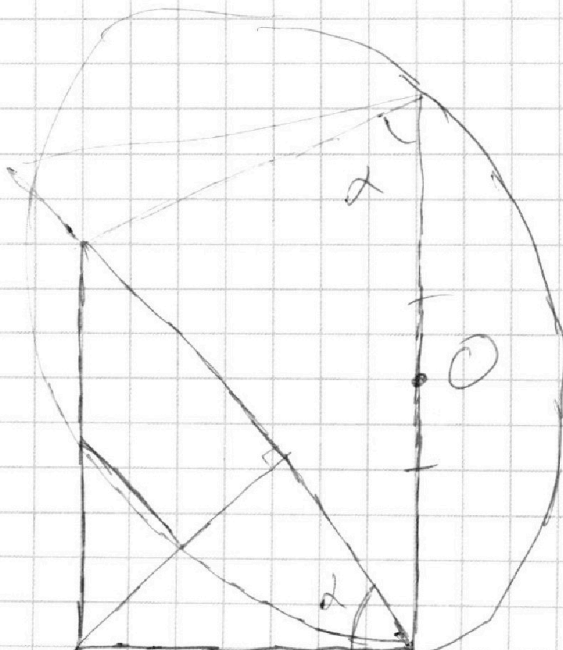
$$g(v) = v^5 - 3,5 + gv = 0$$

$$f(u) > 0$$

$$f, g'(v) > 0 \Rightarrow \text{из знаков } (u, v) \Rightarrow$$

$$u+v=0 - \text{невозможно} \Rightarrow$$

$$u+v=0 \Rightarrow \frac{1}{5}$$





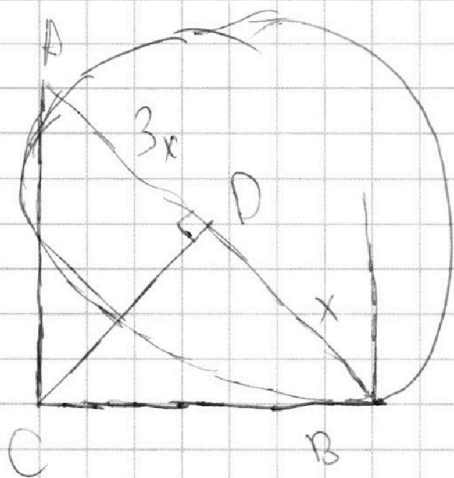
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4x = AC

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$3x \cdot 4x = AC^2$$

$$x\sqrt{12} = AC$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

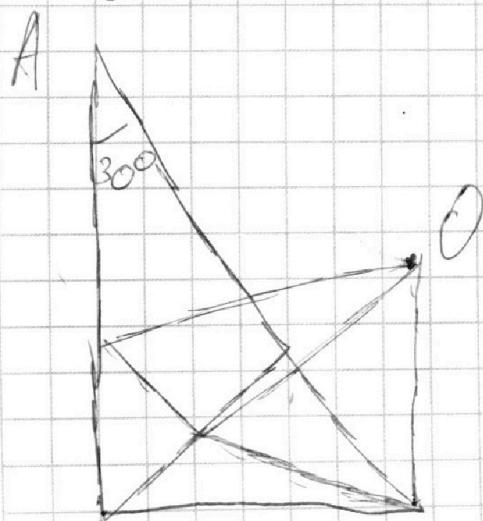
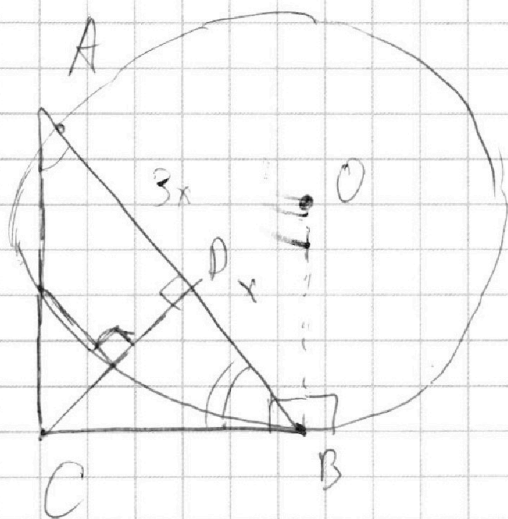
$$BC^2 = BD \cdot AB \Rightarrow$$

$$BC^2 = 4x^2$$

$$BC = 2x$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$\angle BAC = 30^\circ$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$11 \cdot 3 = 33$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 3^5 - 8$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{12}{2 \log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

$$\log_3 x = A$$

$$2 \log_3^5 x + 7 = -16 \log_3 x$$

$$2A^5 + 7 = -16A$$

$$2A^5 + 16A + 7 = 0$$

$$\log_3^4(5y) + 7 \log_{5y} 3 = \log_{5y} (3^4) - 8$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{7}{\log_3 5y} = \frac{4}{2 \log_3 5y} - 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

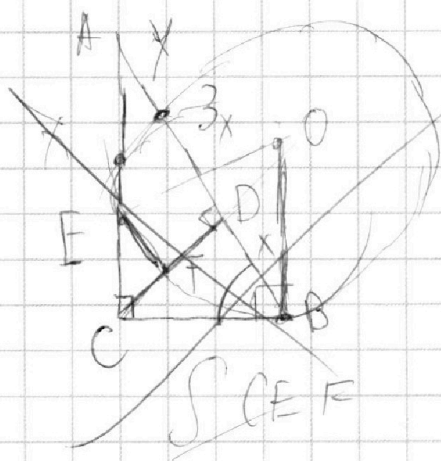
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



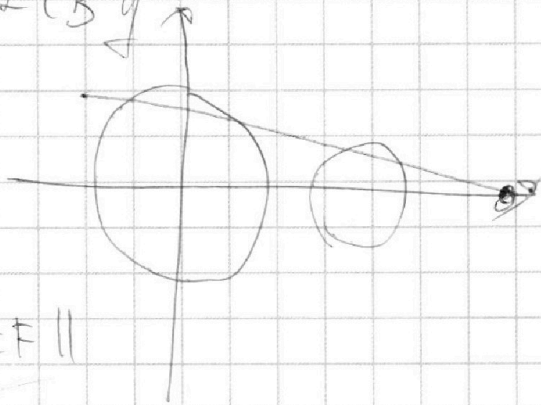
$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 343 - 8$$



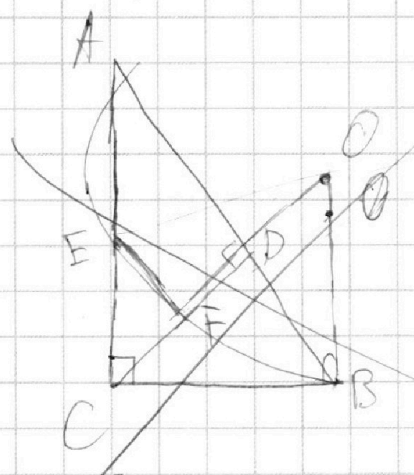
$$OB \perp CB$$

$$OB \perp OB \parallel AC$$

$$OB \perp CB \perp y$$



$$\triangle CEF \sim \triangle ABC$$



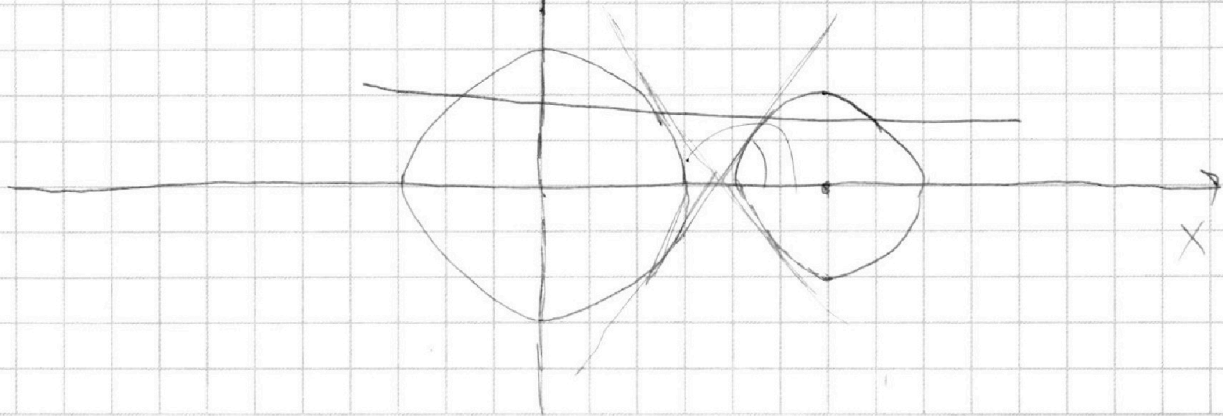
$$EF \parallel$$

y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 = 3^2 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$ax + 7y - 36 = 0$$

$$y = \frac{3}{7}6 - \frac{a}{2}x$$





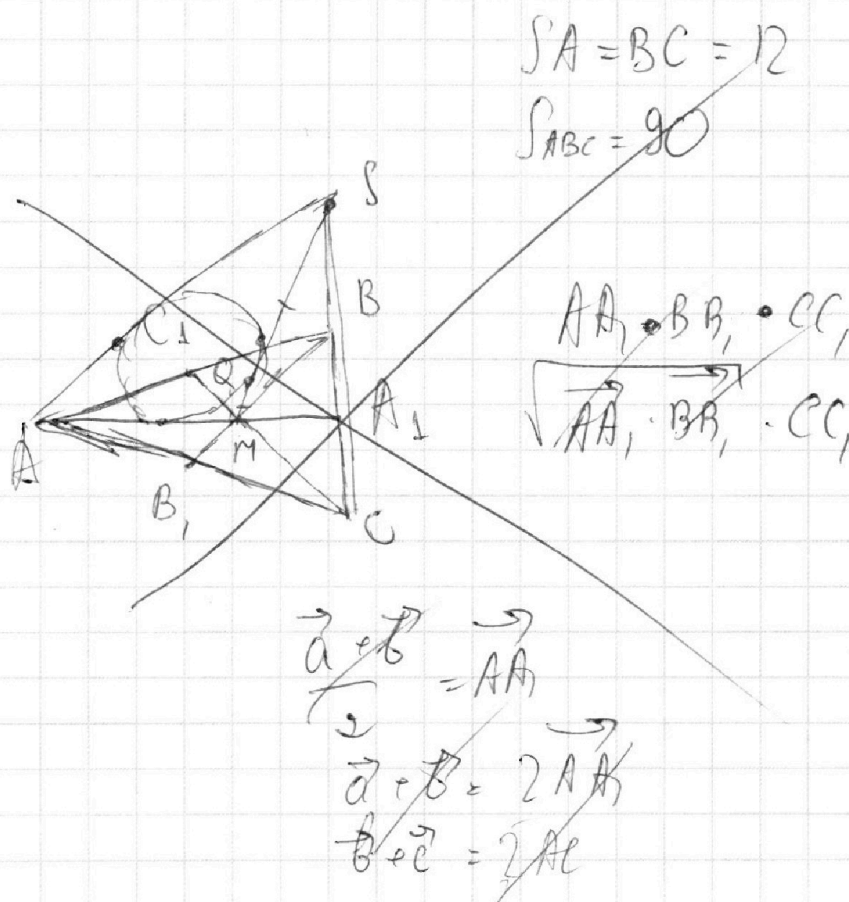
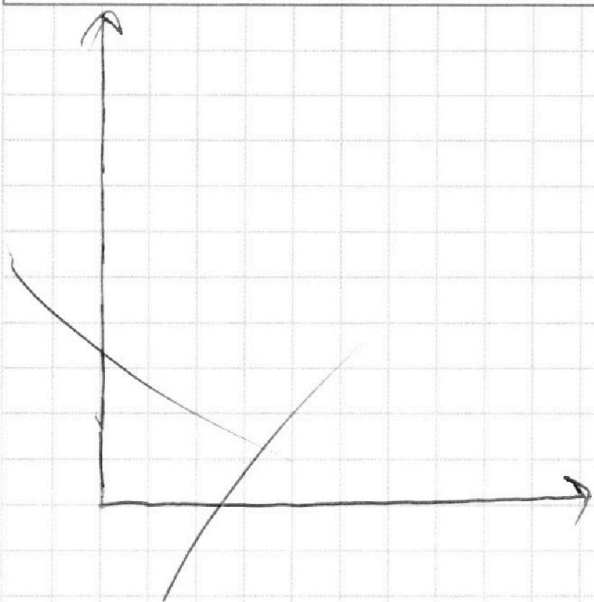
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y - 3b = 0 \Rightarrow$$

$$ax + 2y = 3b$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$ax + 2y = 3b$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$4x^2 + 4y^2 = 36$$

$$4x^2 + (3b - ax)^2 = 36$$

$$4x^2 + a^2x^2 + 6abx + 9b^2 = 36$$

$$(a^2 + 4)x^2 + 6abx + 9b^2 - 36 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3ab)^2 + (a^2 + 4)(36 - 9b^2) > 0$$

$$\frac{D}{4} = 9a^2b^2 + 36a^2 + 4 \cdot 36 - 9a^2b^2 - 36b^2$$

$$a^2 - b^2 > 4$$

↓

$$a^2 > b^2 - 4$$

$$a^2 - b^2 + 4 > 0$$

$$a^2 - b^2$$

$$a^2 > 4 - b^2$$

$$b^2 - 4 > -a^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y = 36$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$2(x-6)^2 + 4$$

$$4(x-6)^2 + 4y^2 = 16$$

$$4(x-6)^2 + (36-ax)^2 = 16$$

$$4(x^2 - 2x)$$

$$4(x-6)^2 + 4y^2 = 16$$

$$2x-6$$

$$4(x^2 - 12x + 36) + (36 - ax)^2 = 16$$

$$4x^2 - 48x + 4 \cdot 36 + 96^2 - 6abx + a^2x^2 = 16$$

$$x^2(a^2 + 4)$$

$$x^2(a^2 + 4) - x(48 + 6ab) + 96^2 + 4 \cdot 32$$

$$x^2(a^2 + 4) - 2x(24 + 3ab) + 96^2 + 4 \cdot 32$$

$$D = (24 + 3ab)^2 - (a^2 + 4)(96^2 + 4 \cdot 32)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 24^2 + 24 \cdot 6ab + 9a^2b^2 - (a^2 + 4)(9b^2 + 4) = 32$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$x_a = 7$$

$$x_a = 7$$

$$x_b = 2$$

$$x_b = 2$$

$$x_c = 12$$

$$x_c = 12$$

$$y_a + y_b + y_c = 21$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

