



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~1: Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot x_1$, где $x_1 \not\equiv 2; x_1 \not\equiv 3; x_1 \not\equiv 5$
 $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot x_2$, где $x_2 \not\equiv 2; x_2 \not\equiv 3; x_2 \not\equiv 5$
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot x_3$, где $x_3 \not\equiv 2; x_3 \not\equiv 3; x_3 \not\equiv 5$

Требуется:
$$\left. \begin{aligned} ab &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2} \cdot x_1 \cdot x_2 &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ 2^{\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_2+\gamma_3} \cdot x_2 \cdot x_3 &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ 2^{\alpha_1+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_3} \cdot x_1 \cdot x_3 &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &\geq 6 \\ \beta_1 + \beta_2 &\geq 13 \\ \gamma_1 + \gamma_2 &\geq 11 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &\geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 &\geq 21 \\ \gamma_2 + \gamma_3 &\geq 13 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &\geq 16 \\ \beta_1 + \beta_3 &\geq 25 \\ \gamma_1 + \gamma_3 &\geq 28 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) &\geq 6 + 14 + 16 = 36 \\ 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) &\geq 13 + 21 + 25 = 59 \\ 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) &\geq 11 + 13 + 28 = 52 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &\geq 18 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &\geq 31 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &\geq 26 \end{aligned} \right. \left(\begin{aligned} &\text{в силу макс } a, b, c \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \text{минимальный результат} \end{aligned} \right)$$

то минимальное
значение для делителей

$$\Rightarrow abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \geq 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

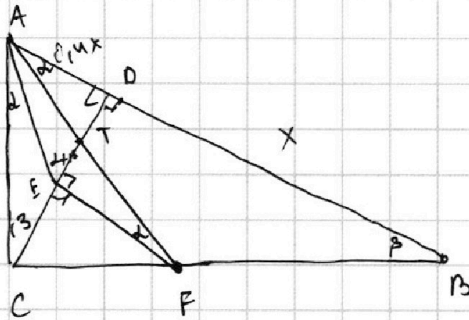
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~2



Окружность
 $CD \perp AB$ - высота $\Delta ABC \Rightarrow \angle CDA = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ То же самое ΔAEF и $CD \perp EF$
 $\angle EAC = \angle AFE = \alpha$

Пусть $\angle B = \beta$

$CD \perp AB \Rightarrow \angle CDA = 90^\circ$
 $\angle B = \beta$
 $\angle C = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle CAD = 90^\circ - \beta$

$\Rightarrow \angle ACB = \beta$

$EF \parallel AB$ (по условию) $\Rightarrow EF \perp CD$
 $BD \perp CD$

$\angle AED = \angle EAC + \angle ECA$ (или внешний ΔACE) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AED = \alpha + \beta$

$CD \perp AB \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$
 $\angle ACD = \beta$ (погр.) $\Rightarrow \angle CAD = 90^\circ - \beta$

$\angle AED = \alpha + \beta$
 $\angle CAD = 90^\circ - \beta$
 $\Rightarrow \angle DAE = 90^\circ - \alpha - \beta$ (по сумме углов ΔADE)
 $\angle CAE = \alpha$ (погр.)
 $\angle CAB = 90^\circ - \beta$ (погр.)

$EF \perp CD \Rightarrow \angle DEF = 90^\circ$
 $\angle TFE = \alpha$ (погр.) $\Rightarrow \angle ETF = 90^\circ - \alpha$ (по сумме углов ΔTEF)

$\angle ETF = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ATD$ (или вертикальный $\angle ETF$) $\Rightarrow \angle ATF =$
 $= 90^\circ - \alpha$
 $\angle ADT = 90^\circ$ (погр.) $\Rightarrow \angle TAD = \alpha$ (по сумме углов ΔATD)

$\angle TAD = \alpha = \angle EAC = \alpha$ (погр.) $\Rightarrow \Delta AEC \sim \Delta AFB$ (по двум углам)
 $\angle ACE = \beta = \angle ABF = \beta$
 $\rightarrow$ считай, что все

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (продолжение)

$$\triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$$

Пусть $DB = x$

Из условия $AB : BD = 1,4$ } $\Rightarrow AB = 1,4x \Rightarrow AD = 0,4x$
 $BD = x$

$DB = x$
 $AD = 0,4x$
 CD - высота в прямоугольнике ACB } $\Rightarrow CD = \sqrt{0,4x \cdot x} = x\sqrt{0,4}$

$AD = 0,4x$
 $CD = x\sqrt{0,4}$ } $\Rightarrow$ по п. теорема $AC = \sqrt{0,4^2 x^2 + 0,4x^2} = x\sqrt{0,16 + 0,4} = x\sqrt{0,56}$

$DB = x$
 $CD = x\sqrt{0,4}$ } $\Rightarrow$ по п. теорема $CB = \sqrt{0,4x^2 + x^2} = x\sqrt{1,4}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$ (по п.) $\Rightarrow \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{EC}{FB}$

$\angle FEC = 90^\circ$ (так как $FE \perp CD$)
 $\angle BDC = 90^\circ$ (по п.)
 $\angle C$ - общий для $\triangle CEF$ и $\triangle CDB$ } $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ (по 2 углам)
 $\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{x\sqrt{0,4}} = \frac{CB - FB}{CB} = \frac{x\sqrt{1,4} - FB}{x\sqrt{1,4}}$

Пусть $CE = a$
 $FB = b$ } $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{x\sqrt{0,4}} = \frac{x\sqrt{1,4} - b}{x\sqrt{1,4}} \\ \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1,4}a = x\sqrt{1,4} - \sqrt{0,4}b \\ \sqrt{0,56}b = 1,4a \end{cases}$

$\Rightarrow b \frac{\sqrt{0,56} \cdot 1,4}{1,4} = x\sqrt{1,4} - 0,4b \Rightarrow b(\frac{\sqrt{0,56}}{1,4} + \sqrt{0,4}) = x\sqrt{1,4} \cdot 0,4$
 $\Rightarrow$ найдем b и a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 12 (продолжение)

$$b \cdot \left(\sqrt{\frac{0,56}{1,4}} + \sqrt{0,4} \right) = x \sqrt{1,4 \cdot 0,4} \Rightarrow b \cdot (2\sqrt{0,4}) = x \sqrt{1,4 \cdot 0,4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b = x \sqrt{1,4} \Rightarrow b = x \frac{\sqrt{1,4}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} \cdot \frac{\sqrt{1,4}}{2} x = x \frac{\sqrt{0,4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE = x \frac{\sqrt{0,4}}{2}$$

$$FB = x \frac{\sqrt{1,4}}{2} \Rightarrow CF = CB - FB = x \sqrt{1,4} - x \frac{\sqrt{1,4}}{2} = \frac{x \sqrt{1,4}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{По ПП. Из треугольника } EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = x \sqrt{\frac{1,4}{4} - \frac{0,4}{4}} = x \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$CE = x \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CEF} = EF \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{2} \cdot \frac{x}{2} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{8}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 0,4x \cdot \sqrt{0,4}x = x^2 \cdot \frac{0,4 \cdot \sqrt{0,4}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{\frac{0,4}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{0,4}{2} \cdot 8 = 4 \cdot 0,4 = 1,6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9x - 2x \Rightarrow \arccos(\cos(\frac{x}{2} - x)) = \frac{9x - 2x}{10}$$

$$\arccos(\cos(\frac{x}{2} - x)) \in [0; \pi] \text{ тогда пусть } \arccos(\cos(\frac{x}{2} - x)) = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \in [0; \pi] \\ \cos(\frac{x}{2} - x) = \cos(d) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \in [0; \pi] \\ \cos(\frac{x}{2} - x) - \cos(d) = 0 \quad (1) \end{array} \right.$$

$$(1): \cos(\frac{x}{2} - x) - \cos d = 0 \Rightarrow -2 \sin \frac{\frac{x}{2} - x + d}{2} \cdot \sin \frac{\frac{x}{2} - x - d}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{x}{2} - x + d}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\frac{x}{2} - x + d}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x}{2} + d - 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{x}{2} - d - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\text{Из этих уравнений получаем } d = \frac{9x - 2x}{10}.$$

Рассмотрим 2 случая:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x}{2} + d - 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{9x - 2x}{10} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x}{2} + d - 2\pi n = \frac{9x - 10d}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2d - 4\pi n = 9x - 10d, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12d = 8x + 4\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{2x + \pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x + \pi n}{3} \geq 0 \\ \frac{2x + \pi n}{3} \leq \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + n \geq 0 \\ 2 + n \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \geq -2 \\ n \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow n \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow d \in \{0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi\} \Rightarrow x \in \{4\pi + \frac{\pi}{2}; 2\pi + \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\}$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x}{2} - d - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{9x - 2x}{10} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x}{2} - d - 2\pi k = \frac{9x - 10d}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right. \Rightarrow \text{аналогично}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

$$\Rightarrow J - 2d - 4JK \geq 9J - 10d, \quad d \in [0; 7]; K \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{8J + 4JK}{8} = \frac{2J + JK}{2} = J + \frac{JK}{2} \in [0; 7]; K \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J + \frac{JK}{2} \geq 0 \\ J + \frac{JK}{2} \leq 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{K}{2} \geq 0 \\ 1 + \frac{K}{2} \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + K \geq 0 \\ 2 + K \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K \geq -2 \\ K \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K \in \{-2; -1; 0\} \Rightarrow d \in \left\{ 0; \frac{J}{2}; J \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{J}{2} + 4d; 2J; -\frac{J}{2} \right\}$$

Возможные целочисленные решения:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4J + \frac{J}{2} = \frac{9J}{2} \\ x = 2J + \frac{J}{6} = \frac{13J}{6} \\ x = \frac{J}{2} + \frac{2J}{3} = \frac{5J + 4J}{6} = \frac{9J}{6} = \frac{3J}{2} \\ x = -\frac{J}{2} \\ x = 2J \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ответ: } \frac{9J}{2}; \frac{13J}{6}; \frac{3J}{2}; -\frac{J}{2}; 2J$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

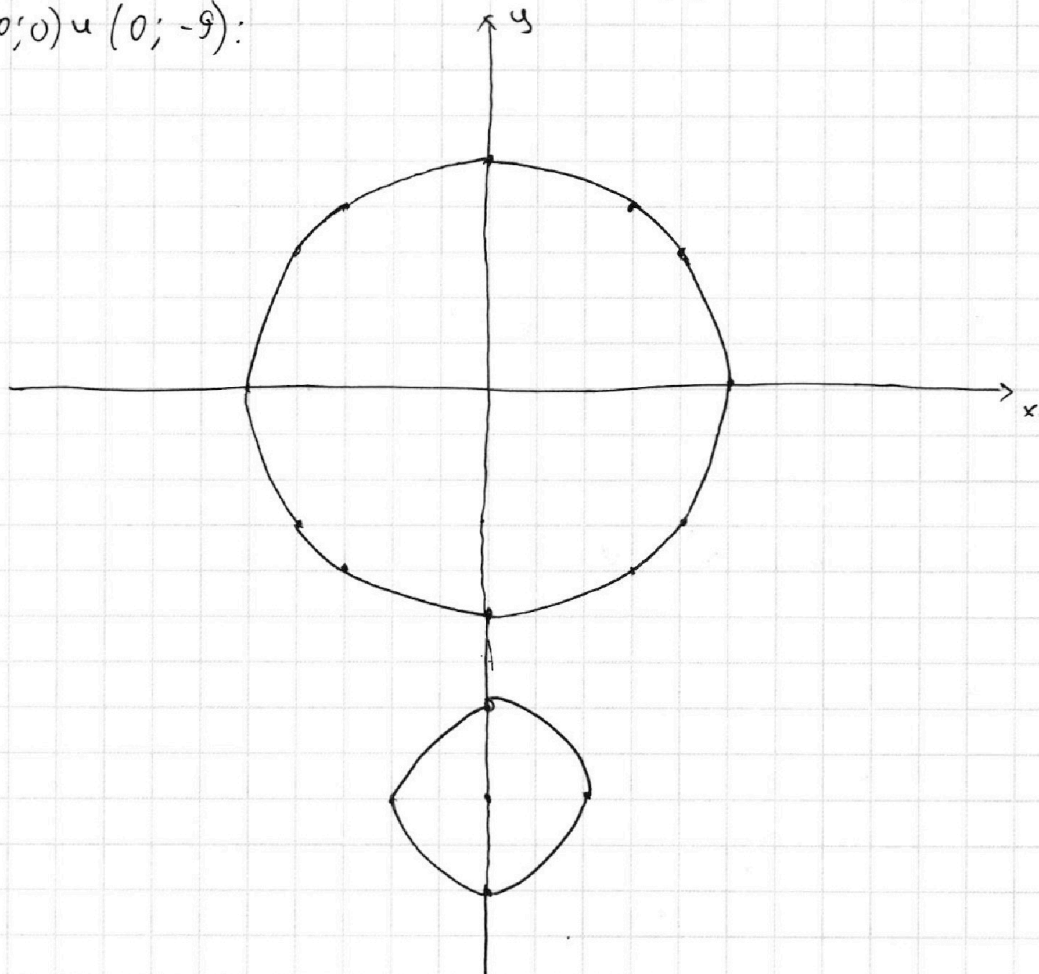


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Уравнение (2) на графике — это две окружности (улыбки
(0;0) и (0; -9):



Для этих $5x + 6ay - b = 0$ — это линия.

Рассмотрим два случая $a=0$ и $a \neq 0$:

1) $a=0 \Rightarrow 5x = b$

$x = \frac{b}{5}$, очевидно, что найдем b , такое, что будет

быть пересекать обе окружности по 2 пка: найти $b=0$.

$\rightarrow$ Сложиме образом

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение)

2) $a \neq 0$ или

$$y = \frac{b + 5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$$

$\Rightarrow$ выбирая b или 0 или

получим все возможные значения $\frac{5}{6a}$.

Тогда $\frac{5}{6a}$ принимает все значения на множестве целых чисел $\neq 0$.

Заметим, что график имеет не более 2 точек пересечения с окружностью $\Rightarrow$ Если решение 4, то график

пересекает окружность ~~каждо~~ ^{каждо} из 2 окружностей по 2 раза.

В силу целочисленности координат точек (x, y)

расположил только график (исключив все возможные, так как в силу целочисленности координат точек окружности координаты точек (x, y) не могут быть дробными с целочисленными координатами).

Проведем окружность $\frac{1}{2}$ радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в начале координат $O(0,0)$ и окружность $\frac{1}{2}$ радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(0,1)$:

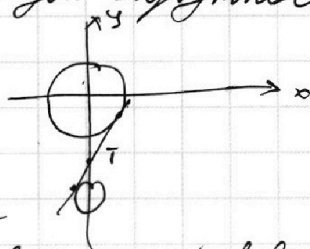
Она пересекает ось OY

в точке T , тогда заметим, что

все возможные значения

даются точками U и V на

где U и V — точки касания окружностей.



$\Rightarrow$ Сложив все...

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 14 (продолжение)

В прямые меньшие меньший концы, чем образ
касательная не могут удовлетворять условию касания
в, так как в точке T они не имеют касательной, а при T касательная
касательная перпендикулярна радиусу в точке T она образует с ней
касательную окружности $\Rightarrow$ С ней касательная не может, а касательная
касательная перпендикулярна радиусу и образует с ней касательную
Окружность в T две точки касания касательная касательная
касательная не может $\Rightarrow$ не касательная, так как имеет касательную
касательная в T , а при T касательная перпендикулярна радиусу
касательная окружности.

Найдем касательную касательную:

$y = kx + b$ - уравнение касательной

Она имеет одно пересечение с большой окружностью $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (kx + b)^2 = 25 \\ x^2 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 25 \Rightarrow x^2(k^2 + 1) + 2kbx + b^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

имеет одно решение

$$D = 4k^2b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 25) \Rightarrow 4(k^2b^2 - k^2b^2 + 25k^2 - b^2 + 25) = 0$$

решение

$$25k^2 - b^2 + 25 = 0$$

Она имеет одно пересечение с малой окружностью:

$$\begin{cases} y = kx + b_1 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + k^2x^2 + b_1^2 + 4 - 2kxb_1 + 4kx + 4b_1 = 4 \\ x^2(1 + k^2) + x(2kb_1 + 4k) + b_1^2 + 4b_1 = 0 \end{cases}$$

имеет 1 решение

$$\Rightarrow k^2b_1^2 + 4k^2 + 2kb_1 \cdot 4k - b_1^2 - 4b_1 - 4 = 0 \Rightarrow k^2b_1^2 + 8k^2 + 8kb_1 - b_1^2 - 4b_1 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ считаем обратным путем

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение)

$$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \quad \text{или} \quad \frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{5}{6} < \frac{a\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a > \frac{-35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{-35}{6\sqrt{32}}; 0 \right)$$

Теперь знаем, что мы рассматриваем отрицательные значения параметра. Тогда от оси OY и всевозможные наклоны будут $-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$ наименьшее значение достигается $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right)$$

Итого получаем, что решением $a = 0$; $a \in \left(\frac{-35}{6\sqrt{32}}; 0 \right)$; $a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left(\frac{-35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{\frac{1}{3}}^3 (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0,54 > 0 \Rightarrow y > 0 \\ 0,54 \neq 1 \Rightarrow y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,54) + \frac{1}{\log_{11} (0,54)} = \frac{-\frac{13}{3}}{\log_{11} 0,54} - 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = \log_{11} x$$

$$b = \log_{11} 0,54$$

$$\begin{cases} 4a - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} - 5 \\ 4b + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{b} - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a \quad (1) \\ 4b^2 + 1 = -\frac{13}{3} - 5b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1): 4a^2 + 5a - 5\frac{1}{3} &= 0 \\ 12a^2 + 15a - 16 &= 0 \Rightarrow D = 225 + 4 \cdot 12 \cdot 16 = 225 + 768 = 993 \\ a &= \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24} \Rightarrow \log_{11} x = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2): 4b^2 + 5b + 1 + \frac{13}{3} &= 0 \\ 12b^2 + 15b + 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$(1): a^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a$$

$$a^5 + 5a - 6 + \frac{2}{3} = 0$$

$$3a^5 + 15a - 18 + 2 = 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3} - 5 \quad (1) \\ b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} - 5 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2): 3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0 \\ (a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^3a + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{a+b} = 0 \quad (1)$$

$$a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^3a + 5 = 0$$

→ проверяется eq. не в

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача ~5 (прямые)

(1): $a + b = 0$

$b = -a$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ -3a^5 - 15a + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a^5 + 15a - 16 = 0$$

но уравнение имеет решение, так как
 $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{15}{2} - 16 < 0$ и $3 \cdot 1 + 15 - 16 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ На отрезке от $\frac{1}{2}$ до 1 есть корень.

оба уравнения
 имеют и общий

$a + b = 0 \Rightarrow \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0 \Rightarrow \log_{11} \frac{1}{2}xy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy = 1$

$xy = 2 \Rightarrow 2$ - одно из возможных значений

(2): $a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 5 = 0$

Пусть $a + b = d$

$$\begin{aligned} a^4 - a^3d + a^4 + a^2d^2 + a^4 - 2da^3 - a^2d^3 - \\ - a^4 + 3a^3d + 3a^2d^2 + d^4 + a^4 - d^3a - a^2d^2 + \\ + d^2a^3 + 5 = 3a^4 - a^3d + 5a^2d^2 - 2d^3a + 5d^4 + \\ + d^4 + a^4 - d^3a - a^2d^2 + d^2a^2 + 5 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~6

Выведем уравнения прямых, ограничивающих $\square$:

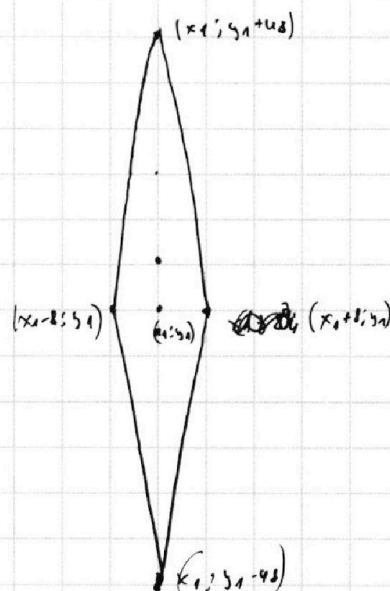
О и Р образуют прямую: $y = -\frac{90}{15}x = -6x$

О и Q образуют прямую: $y = 0$

Р и Q образуют: $y = 90$

А и Q образуют: $y - 6(x - 17) = -6x + 17 \cdot 6 = 102 - 6x$

Заметим, что если зафиксировать точку $x_1; y_1$, то точки $(x_2; y_2)$
будут ограничены в такой области:



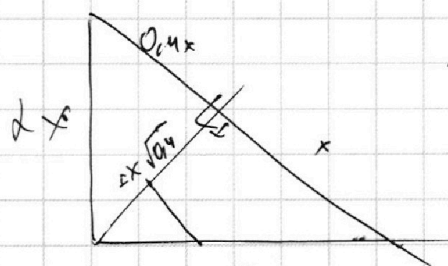
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$$

$$80 - 15 - 2$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB} = \frac{CD - FB}{FB}$$

$$\frac{CE}{CD - CE} =$$

$$\frac{56}{100} = \frac{10}{44}$$

$$\frac{56}{100} = \frac{10}{44}$$

$$\frac{56}{100}$$

$$a = 0$$

$$x \cdot \frac{0.4}{5} - \frac{0.4}{5} = \frac{0.4}{x \cdot 5 - 5} = 4$$

$$0 \neq 0$$

$$x \cdot 5 - 9 = 609$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 15 + 9 + 2x \\ s &= h + 2x \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} h &= 15 + 9 + 2x \\ s &= h + 2x \end{aligned} \right\}$$

$$0 = (15 + 9 + 2h + 2x)(s - h + 2x)$$

$$0 = 9 + 609 + x \cdot 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 11$$

$$bc: 2 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 13$$

$$ac: 2 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 28$$

$$abc_{min} = ? \quad d_1 + d_2 + d_3 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

$$a = 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1$$

$$b = 2 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2$$

$$c = 2 \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 15$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 21$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 15$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 11$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 36$$

$$2(\beta_2 + \beta_3) \geq 28$$

$$\frac{61}{2}$$

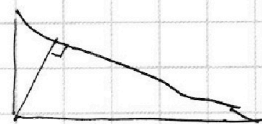
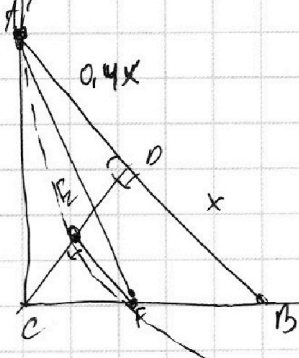
$$30,5$$

$$4 \cdot 6 + 18 = 61$$

$$24 + 28 = 30 \times 22 = 52$$

$$26$$

$$AK:MO = 1,4$$



$$x^2 + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{2}{x}$$

$$x^2 + 0 = \frac{2}{x}$$

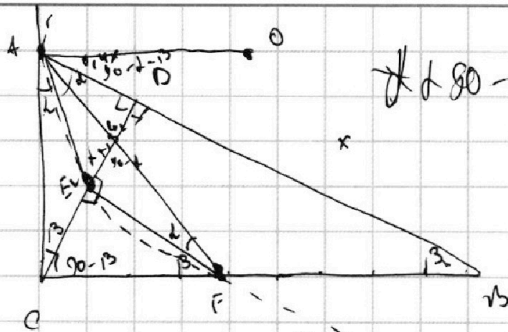
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha + 90 - \alpha - \beta$$

$$\arccos\left(\frac{9\alpha - 2x}{10}\right) = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$1) \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha - 2\pi n$$

$$2) \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\pi n - \alpha$$

$$\alpha = \frac{9\pi - 1x}{10}$$

$$10\alpha = 9\pi - 2x$$

$$2x = 9\pi - 10\alpha$$

$$x = \frac{9\pi - 10\alpha}{2}$$

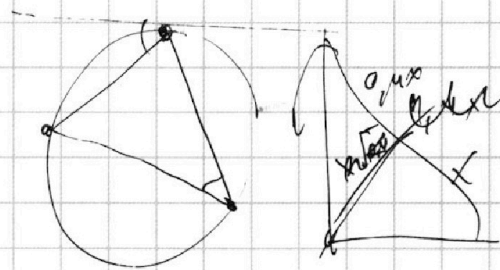
$$\frac{\pi}{2} + \pi - 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} + 0 + 4\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi$$



$$h = \sqrt{0.4x \cdot x}$$

$$\text{Есть } \frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi] \vee x \sqrt{0.4x}$$

$$\alpha \in [0, \pi]$$

$$-2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x - \alpha}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x + \alpha}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x - \alpha}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \frac{\pi}{2} + \alpha - 2\pi n = \frac{9\pi - 10\alpha}{2}$$

$$\pi + 2\alpha - 4\pi n = 9\pi - 10\alpha$$

$$12\alpha = 8\pi + 4\pi n$$

$$\alpha = \frac{2\pi + \pi n}{3}$$

$$\frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

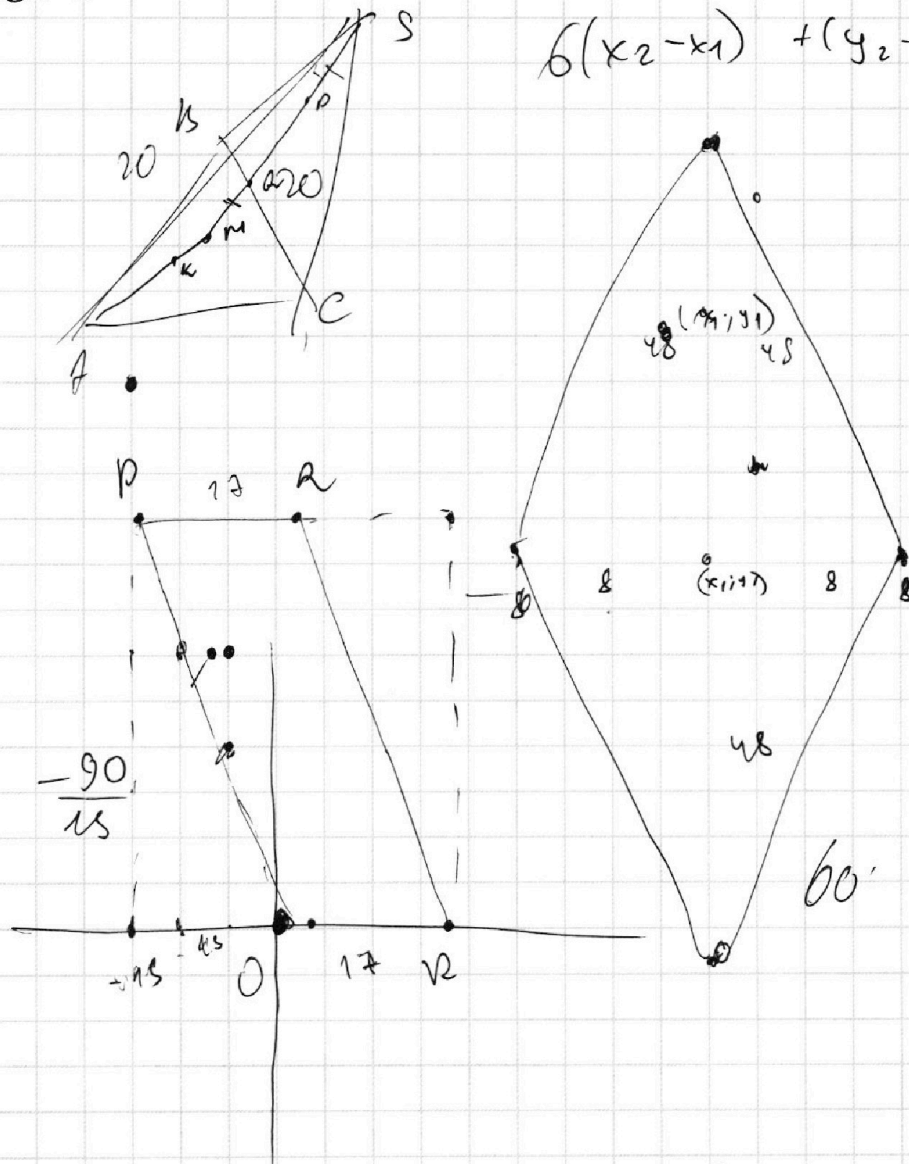
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$



$$y = -6(x-17) = 6x$$

$$a^4 - a^3 + a^4 + a^2 a^2 + a^4 - 2a^3 a^3 - a^2 a^3 - a^4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = (\log_{11} x^3 \frac{1}{121}) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{\frac{1}{4}y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$64 \cdot 12$$

$$640 + 128$$

$$\begin{array}{r} 1868 \\ 228 \\ \hline 893 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ -12 \\ \hline 52 \\ 64 \\ \hline 116 \\ 112 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$235 \neq 1817$$

$$351 \neq 351$$

$$260$$

$$331 \neq 71$$

$$280 + 51$$

$$+32$$

$$3 \cdot 331$$

$$300$$

$$3 \cdot \frac{1}{3} 5 + \frac{13}{3} = 16$$

$$228 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 16$$

$$a+b = \log_{11} x + \log_{11} y$$

$$b^5 + 1 + \frac{13}{3} + 5 = 0$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \mid a+b \\ a^5 + b^5 \\ \hline -b^5 - ba^4 \\ -ba^4 - b^5 \\ \hline b^5 + b^5 a^3 \end{array} (a+b) (a^4$$

$$(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4)(a+b) =$$

$$= a^5 - ba^4 + b^2a^3 - b^3a^2 + b^4a + ba^4 - b^2a^3 + b^3a^2 - b^4a + b^5$$

$$ab = c$$

$$a = \frac{c}{b}$$

$$\log_{11} x \cdot \log_{11} y = c$$

$$\log_{11} x = \frac{c}{\log_{11} y}$$

$$\begin{array}{l} (a^2 + b^2)^2 - a^2 b^2 - ba(a^2 + b^2) + 5 \\ (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ba) - a^2 b^2 + 5 \end{array}$$