МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1: Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot x_1$, где $x_1 \not\vdots\, 2;\ x_1 \not\vdots\, 3;\ x_1 \not\vdots\, 5$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot x_2$, где $x_2 \not\vdots\, 2;\ x_2 \not\vdots\, 3;\ x_2 \not\vdots\, 5$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot x_3$, где $x_3 \not\vdots\, 2;\ x_3 \not\vdots\, 3;\ x_3 \not\vdots\, 5$

По условию:

$$\left.\begin{aligned} ab &\vdots\, 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &\vdots\, 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &\vdots\, 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &2^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2} \cdot x_1 \cdot x_2 \vdots\, 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ &2^{\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_2+\gamma_3} \cdot x_2 \cdot x_3 \vdots\, 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ &2^{\alpha_1+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_3} \cdot x_1 \cdot x_3 \vdots\, 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2 &\geq 6 \\ \beta_1+\beta_2 &\geq 15 \\ \gamma_1+\gamma_2 &\geq 11 \\ \alpha_2+\alpha_3 &\geq 14 \\ \beta_2+\beta_3 &\geq 21 \\ \gamma_2+\gamma_3 &\geq 13 \\ \alpha_1+\alpha_3 &\geq 16 \\ \beta_1+\beta_3 &\geq 25 \\ \gamma_1+\gamma_3 &\geq 28 \end{aligned}\right) \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) &\geq 6+14+16 = 36 \\ 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) &\geq 15+21+25 = 61 \\ 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) &\geq 11+13+28 = 52 \end{aligned}\right) \Rightarrow$$

↑ это достаточные условия для делимости

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 18 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 31 \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 26 \end{cases}$$ (в силу того что $a;\ b$ и $c \in \mathbb{N}$ => сумма степеней целая) =>

$$\Rightarrow abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \geq 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26} \Rightarrow$$

=> Ответ: $2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26}$

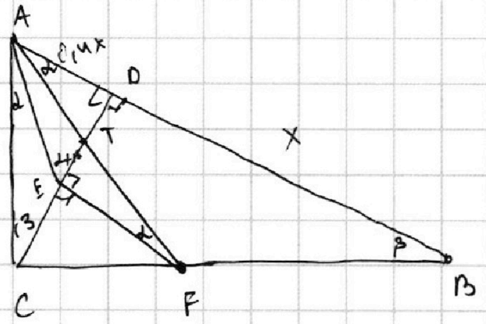
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2



CA – касательная к описанной окружности ΔAEF =>
=> По теореме о хорде и касательной
$\angle EAC = \angle AFE = \alpha$

Пусть $\angle B = \beta$

CD – высота в Δ ABC => $\angle CDA = 90$

$\angle B = \beta$
$\angle C = 90^\circ$ } => $\angle CAD = 90 - \beta$ } =>

=> $\angle ACD = \beta$

EF ∥ AB (по условию)
BD ⊥ CD } => EF ⊥ CD

$\angle AED = \angle EAC + \angle ECA$ (как внешний в Δ ACE) =>

=> $\angle AED = \alpha + \beta$

CD – высота => $\angle ADC = 90^\circ$
$\angle ACD = \beta$ (по док.) } => $\angle CAD = 90 - \beta$

$\angle AED = \alpha + \beta$
$\angle CDA = 90^\circ$ } => $\angle DAE = 90 - \alpha - \beta$ (по сумме углов Δ ADE)
$\angle CAE = \alpha$ (по док.)
$\angle CAB = 90 - \beta$ (по док.)

EF ⊥ CD => $\angle DEF = 90^\circ$
$\angle TFE = \alpha$ (по док.) } => $\angle ETF = 90 - \alpha$ (по сумме углов ΔTEF) } =>

$\angle ETF = 90 - \alpha$ => $\angle ATD$ (как вертикальный к $\angle ETF$) $= \angle ETF =$
$= 90 - \alpha$
$\angle ADT = 90^\circ$ по док.) } => $\angle TAD = \alpha$ (по сумме углов Δ ATD)

$\angle TAD = \alpha = \angle EAC = \alpha$
$\angle ACE = \beta = \angle ABF = \beta$ (по док.) => ΔAEC ~ ΔAFB (по двум углам)
=> смотр. след. лист

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (продолжение)

$\triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$

Пусть $DB = x$

Из условия $AB : BD = 1,4$; $DB = x$ $\Rightarrow AB = 1,4x \Rightarrow AD = 0,4x$

$DB = x$
$AD = 0,4x$
CD – высота в прямоугольном $\triangle CAB$ $\Rightarrow CD = \sqrt{0,4x \cdot x} = x\sqrt{0,4}$

$AD = 0,4x$; $CD = x\sqrt{0,4}$ $\Rightarrow$ Из т. Пифагора $AC = \sqrt{0,4^2x^2 + 0,4x^2} = x\sqrt{0,16+0,4} = x\sqrt{0,56}$

$DB = x$; $CD = x\sqrt{0,4}$ $\Rightarrow$ Из т. Пифагора $CB = \sqrt{0,4x^2 + x^2} = x\sqrt{1,4}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$ (по док.) $\Rightarrow \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{EC}{FB}$

$\angle FEC = 90^\circ$ (так как $FE \perp CD$)
$\angle BDC = 90^\circ$ (по док.)
$\angle C$ – общий для $\triangle CEF$ и $\triangle CDB$
$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{x\sqrt{0,4}} = \frac{CB - FB}{CB} = \frac{x\sqrt{1,4} - FB}{x\sqrt{1,4}}$

Пусть $CE = a$, $FB = b$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{x\sqrt{0,4}} = \frac{x\sqrt{1,4} - b}{x\sqrt{1,4}} \\ \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1,4}\,a = x\sqrt{1,4\cdot 0,4} - \sqrt{0,4}\,b \\ \sqrt{0,56}\,b = 1,4a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\,\frac{\sqrt{0,56\cdot 1,4}}{1,4} = x\sqrt{1,4\cdot 0,4} - \sqrt{0,4}\,b \Rightarrow b\left(\sqrt{\frac{0,56}{1,4}} + \sqrt{0,4}\right) = x\sqrt{1,4\cdot 0,4}$

→ смотрите обрат. листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (продолжение)

$$b\left(\sqrt{\frac{0{,}56}{1{,}4}}+\sqrt{0{,}4}\right)=x\sqrt{1{,}4\cdot 0{,}4}\Rightarrow b\left(2\sqrt{0{,}4}\right)=x\sqrt{1{,}4\cdot0{,}4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b=x\sqrt{1{,}4}\Rightarrow b=x\frac{\sqrt{1{,}4}}{2}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{0{,}56}}{1{,}4}\cdot\frac{\sqrt{1{,}4}}{2}x=x\frac{\sqrt{0{,}4}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE=x\frac{\sqrt{0{,}4}}{2}$$

$$FB=x\frac{\sqrt{1{,}4}}{2}\Rightarrow CF=CB-FB=x\sqrt{1{,}4}-x\frac{\sqrt{1{,}4}}{2}=\frac{x\sqrt{1{,}4}}{2}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ По т. Пифагора $EF=\sqrt{CF^2-CE^2}=x\sqrt{\frac{1{,}4}{4}-\frac{0{,}4}{4}}=x\cdot\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$

$$CE=x\cdot\frac{\sqrt{0{,}4}}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\triangle CEF}=EF\cdot CE\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot x\frac{\sqrt{0{,}4}}{2}\cdot\frac{x}{2}=x^2\cdot\frac{\sqrt{0{,}4}}{8}$$

$$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 0{,}4x\cdot\sqrt{0{,}4}\cdot x=x^2\cdot\frac{0{,}4\cdot\sqrt{0{,}4}}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{\frac{0{,}4}{2}}{\frac{1}{8}}=\frac{0{,}4}{2}\cdot 8=4\cdot 0{,}4=1{,}6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Rightarrow \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{9\pi-2x}{10}$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \in [0;\pi]$ Тогда пусть $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \in [0;\pi] \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in [0;\pi] \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos\alpha = 0 \ (1) \end{cases}$$

$$(1):\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos\alpha = 0 \Rightarrow -2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2} = \pi n, n\in Z \\ \frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2} = \pi k, k\in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n, n\in Z \\ x = \frac{\pi}{2}-\alpha-2\pi k, k\in Z \end{array}\right.$$

При этом из исходного получаем $\alpha = \frac{9\pi-2x}{10}$.

Разберем 2 случая:

$$1)\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n, n\in Z \\ \alpha = \frac{9\pi-2x}{10} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n = \frac{9\pi-10\alpha}{2}, n\in Z \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi+2\alpha-4\pi n = 9\pi-10\alpha, n\in Z \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\alpha = 8\pi+4\pi n, n\in Z \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi+\pi n}{3}, n\in Z \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi+\pi n}{3} \geq 0 \\ \frac{2\pi+\pi n}{3} \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+n \geq 0 \\ 2+n \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq -2 \\ n \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\in\{-2;-1;0;1\} \Rightarrow \alpha\in\left\{0;\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\pi\right\} \Rightarrow x\in\left\{4\pi+\frac{\pi}{2};\ 2\pi+\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$2)\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}-\alpha-2\pi k, k\in Z \\ \alpha = \frac{9\pi-2x}{10} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}-\alpha-2\pi k = \frac{9\pi-10\alpha}{2}, k\in Z \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$$

→ смотр. сл. лист

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3 (продолжение)

$$\Rightarrow \pi - 2\alpha - 4\pi k = 9\pi - 10\alpha, \quad \alpha \in [0; \pi]; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8\pi + 4\pi k}{8} = \frac{2\pi + \pi k}{2} = \pi + \frac{\pi k}{2} \in [0; \pi]; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi + \frac{\pi k}{2} \geq 0 \\ \pi + \frac{\pi k}{2} \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{k}{2} \geq 0 \\ 1 + \frac{k}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + k \geq 0 \\ 2 + k \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \cancel{0} -2 \\ k \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0\} \Rightarrow \alpha \in \{0; \tfrac{\pi}{2}; \pi\} \Rightarrow x \in \{\tfrac{\pi}{2} + 4\pi; 2\pi; -\tfrac{\pi}{2}\}$$

В итоге получаем решения:

$$\left[\begin{array}{l} x = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} \\ x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi + 4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \\ x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \end{array}\right) \Rightarrow$$

Ответ: $\frac{9\pi}{2}; \frac{15\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

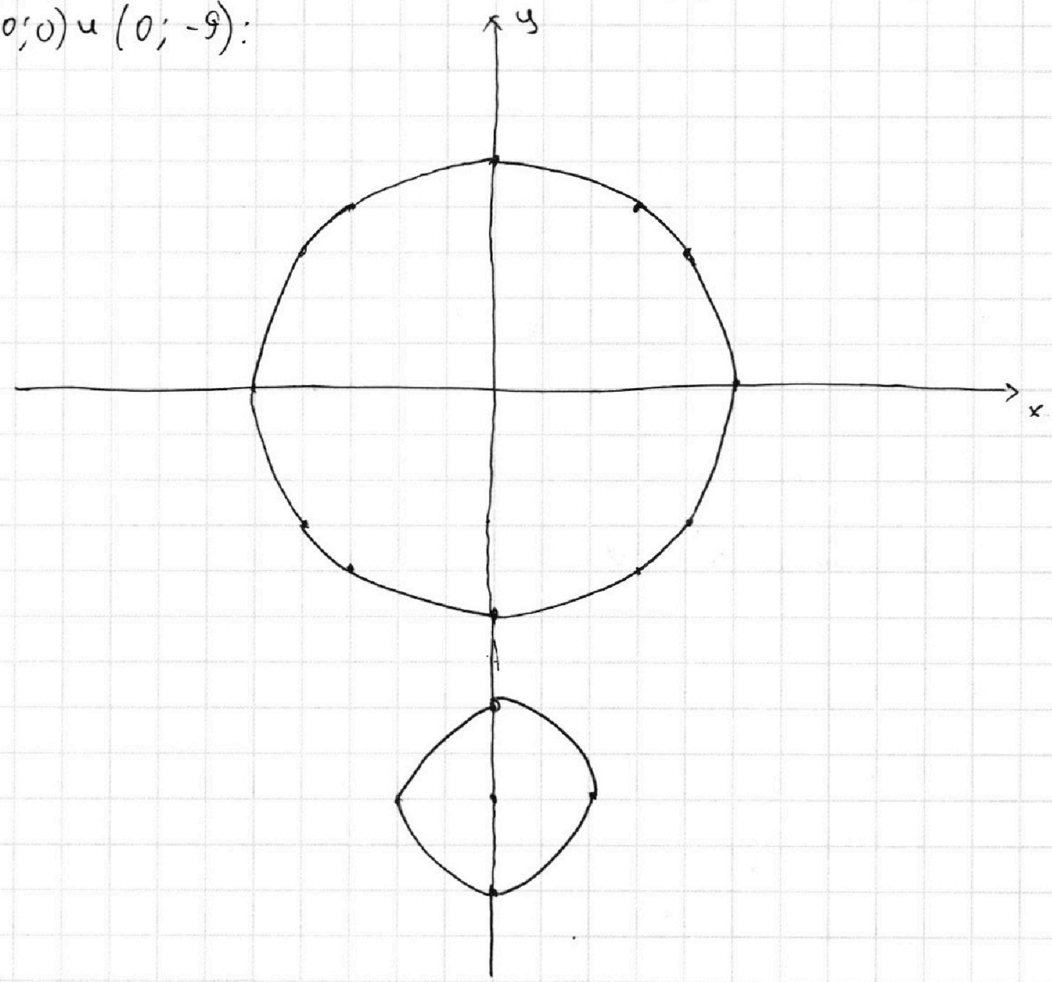
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right. \quad (2) \end{cases}$$

Изображение (2) на графике – это две окружности с центрами (0;0) и (0; -9):



При этом $5x + 6ay - b = 0$ – это линия.

Рассмотрим два случая $a=0$ и $a \neq 0$:

1) $a=0 \Rightarrow 5x = b$

$x = \frac{b}{5}$, очевидно, что найдётся b такое, что прямая будет пересекать обе окружности по 2 раза: пример $b=0$.

-> Смотрите обратно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4 (продолжение)

2) $a \neq 0$

$$y = \frac{b+5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$$

Заметим, что выбирая a мы фиксируем наклон прямой, а после этого, выбирая b, определим точку пересечения с осью Y =>

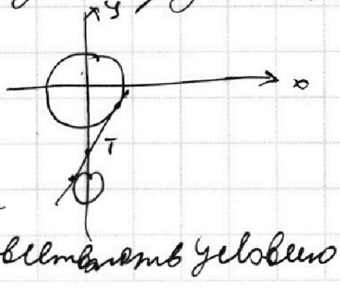
=> выбирая b мы можем получить все прямые с наклоном $-\frac{5}{6a}$.

При этом $-\frac{5}{6a}$ может принимать все значения на множестве действительных чисел кроме 0.

Заметим, что прямая имеет не более 2 точек пересечения с окружностью => Если решений 4, то прямая пересекает ~~[illegible]~~ каждую из 2 окружностей по 2 раза.

В силу симметричности картинки относительно прямой OY рассмотрим только прямые с положительным наклоном, так как в силу симметрии подходящие отрицательные наклоны будут совпадать по модулю с положительными наклонами.

Проведём общую внутреннюю касательную с положительным наклоном к двум окружностям:



Она пересекла ось OY в точке T, тогда заметим, что все прямые имеющие больший наклон и проходящие через T будут удовлетворять условию задачи.

→ смотри след. лист

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 4 (продолжение)

А прямые имеющие меньший наклон, чем общая касательная не будут удовлетворять условию ни при каких b, так как в точке T они не имеют решений, а при ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ перемещении прямой вверх она отдаляется от малой окружности => с ней решений не будет, и аналогично перемещение вниз и отдаление от большой окружности. При этом сама касательная подходит тоже не сложно => не подходит, так как имеет всего 2 решения в T, а при ~~[illegible]~~ перемещении теряет одну у окружностей.

Найдём наклон касательной:

$y = kx + b$ - уравнение касательной

Она имеет одно пересечение с большой окружностью =>

$\Rightarrow \begin{cases} y = kx+b \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ имеет одно решение $\Rightarrow$ $x^2+(kx+b)^2=25$

$x^2+k^2x^2+2kbx+b^2=25 \Rightarrow x^2(k^2+1)+2kbx+b^2-25=0$

$D = 4k^2b^2-4(k^2+1)(b^2-25)$ 1 решение $\Rightarrow$ $4(k^2b^2-k^2b^2+25k^2-b^2+25)=0$

$25k^2-b^2+25=0$

Она имеет одно пересечение с малой окружностью:

$\begin{cases} y = kx+b_1 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{cases}$ имеет 1 решение $\Rightarrow$ $x^2+k^2x^2+b_1^2+81+2kxb_1+18kx+18b_1=4$

$x^2(1+k^2)+x(2kb_1+18k)+b_1^2+18b_1+\cancel{2k}\,77=0$

$D=(2kb_1+18k)^2-4(1+k^2)(b_1^2+18b_1+77)$ 1 решение $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{k^2b_1^2}+81k^2+\cancel{2}kb_1\cdot\overset{9}{\cancel{18}}k-b_1^2-18b_1-77-\cancel{k^2b_1^2}-18bk^2-77k^2=0$

-> Смотрите оборот листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение)

$$\begin{cases} 25k^2 - b_1^2 = -25 \\ 4k^2 - b_1^2 - 18b_1 - 77 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 = \frac{b_1^2 + 18b_1 + 77}{4} \\ 25k^2 = b_1^2 - 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}(b_1^2 + 18b_1 + 77) = b_1^2 - 25$$

$$25b_1^2 + 25\cdot 18b_1 + 25\cdot 77 = 4b_1^2 - 100 \Rightarrow 21b_1^2 + 25\cdot 18b_1 + 25\cdot 84 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7b_1^2 + 25\cdot 6b_1 + 25\cdot 27 = 0$$

$$D = 25^2\cdot 6^2 - 4\cdot 7\cdot 25\cdot 27 = 25(25\cdot 36 - 4\cdot 7\cdot 27) = 100(25\cdot 9 - 7\cdot 27) =$$

$$= 100\cdot 36 \Rightarrow b_1 = \frac{-25\cdot 6 \pm 60}{14} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = \frac{-150+60}{14} = \frac{-90}{14} = -\frac{45}{7} \\ b_1 = \frac{-210}{14} = -\frac{30}{2} = -15 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k^2 = \frac{15^2 - 25}{25} = \frac{15^2}{25} - 1 = 8 \\ k^2 = \frac{(\frac{45}{7})^2 - 25}{25} = \frac{45^2}{7^2\cdot 25} - 1 = \frac{81}{49} - 1 = \frac{81-49}{49} = \frac{81-50+1}{49} = \frac{32}{49} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = \pm\sqrt{8} \\ k = \pm\sqrt{\frac{32}{49}} \end{array}\right.$$

Но мы ищем общую внутреннюю касательную с положительным наклоном =>

$\Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ b_1 \in [-5; -7] \end{cases}$ – это отрезок оси Oy между окружностями [illegible]

Касательная внутренняя, она касается с разных сторон относительно линии центров => она пересекает Oy именно на этом отрезке.

$$\left.\begin{array}{l} -15 \notin [-5; -7] \\ -\frac{45}{7} \in [-5; -7] \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 = -\frac{48}{7} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm\sqrt{\frac{32}{49}} \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{32}}{7}$$

Значит нам подходят все прямые с наклоном большим, нежели у касательной по модулю $\Rightarrow -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow$ -> смотрите след. лист.

Задача №4 (продолжение)

$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$ ~~или~~ ~~$\frac{5}{6a}$ $\frac{\sqrt{32}}{7}$~~

$\Rightarrow a < 0$

$\left.\begin{array}{l} \frac{-5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \\ a < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-5}{6} < \frac{a\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a > \frac{-35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \left(\frac{-35}{6\sqrt{32}}; 0\right)$

При этом, как писалось выше, можно рассматривать положительный случай стороны от оси Oy и в силу симметрии наклоны вида $-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$ также удовлетворяют условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

Получаем, что подходят $a = 0$; $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; 0\right)$; $a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{\frac{1}{8}y^3}\left(11^{-13}\right) - 5 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0{,}5y > 0 \Rightarrow y > 0 \\ 0{,}5y \neq 1 \Rightarrow y \neq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{4}\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x} - 5 \\ \cancel{4}\log_{11}^4 (0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} = \frac{-\frac{13}{3}}{\log_{11} 0{,}5y} - 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$a = \log_{11} x$

$b = \log_{11} 0{,}5y$

~~$\Rightarrow \begin{cases} 4a - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a} - 5 \\ 4b + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{b} - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a \quad (1) \\ 4b^2 + 1 = -\frac{13}{3} - 5b \end{cases}$~~

~~$(1): 4a^2 + 5a - 5\frac{1}{3} = 0$~~

~~$12a^2 + 15a - 16 = 0 \Rightarrow D = 225 + 4\cdot 12\cdot 16 = 225 + 768 = 993$~~

~~$a = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24} \Rightarrow \log_{11} x = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24}$~~

~~$(2): 4b^2 + 5b + 1 + \frac{13}{3} = 0$~~

~~$12b^2 + 15b + 16 = 0$~~

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-\frac{2}{3}}{a} - 5 \quad (1) \\ b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-\frac{13}{3}}{b} - 5 \quad (2) \end{cases}$$

$(1):\ a^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a$

$a^5 + 5a - 6 + \frac{2}{3} = 0$

$3a^5 + 15a - 18 + 2 = 0$

$3a^5 + 15a - 16 = 0$

$(2):\ 3b^5 + 15b + 16 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3(a^5 + b^5) + 15(a + b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5) = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \quad (1) \\ a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5 = 0 \end{cases}$$

—> [illegible] ед. мест

Задача №5 (продолжение)

(1): $a+b=0$

$b=-a$

$\begin{cases} 3a^5+15a-16=0 \\ -3a^5-13a+16=0 \end{cases} \Rightarrow 3a^5+15a-16=0$

Эти оба уравнения сводятся к одному

Это уравнение имеет решения, так как $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{15}{2}-16<0$ и $3\cdot1+15-16>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ На отрезке от $\frac{1}{2}$ до 1 есть корень.

$a+b=0 \Rightarrow \log_{11}x+\log_{11}0{,}5y=0 \Rightarrow \log_{11}\frac{1}{2}xy=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy=1$

$xy=2 \Rightarrow$ 2 – одно из искомых значений

(2): $a^4-ba^3+b^2a^2-b^3a+b^4+5=0$

Пусть $a+b=\alpha$

$\Rightarrow a^4-a^3(\alpha-a)+(\alpha-a)^2a^2-$
$-(\alpha-a)^3a+(\alpha-a)^4+5=$

$=a^4-a^3\alpha+a^4+a^2(\alpha^2+a^2-2\alpha a)-$
$-a(\alpha^3+a^3-3a^2\alpha-3\alpha^2a)+$
$+\alpha^4+a^4-\alpha^3a-a^3\alpha+\alpha^2a^2+5$

$a^4\cancel{-a^3\alpha}\cancel{+a^4}+a^2\alpha^2+a^4\cancel{-2\alpha a^3}-a\alpha^3-$
$-\cancel{a^4}\cancel{+3a^3\alpha}+3\alpha^2a^2+\alpha^4\cancel{+a^4}-\alpha^3a\cancel{-a^3\alpha}+$
$\cancel{+\alpha^2a^2}+5=3a^4-a^3\alpha+5a^2\alpha^2-2\alpha^3a+5+\alpha^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №6

Выведем уравнения прямых, ограничивающих ▱:

O и P образуют прямую: $y = -\frac{90}{15}x = -6x$

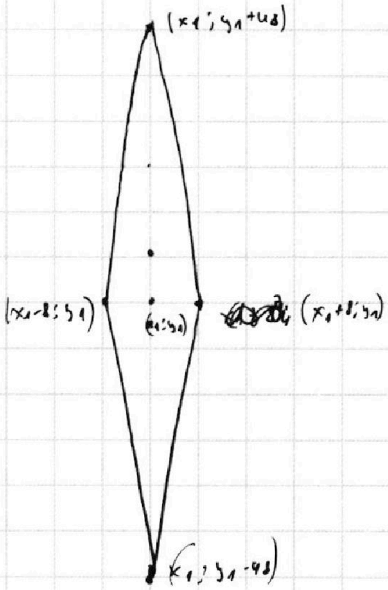
O и R образуют прямую: $y = 0$

P и Q образуют: $y = 90$

Q и R образуют: $y - 6(x - 17) = -6x + 17 \cdot 6 = 102 - 6x$

Заметим, что если зафиксировать точку $x_1;y_1$, то точки $(x_2;y_2)$

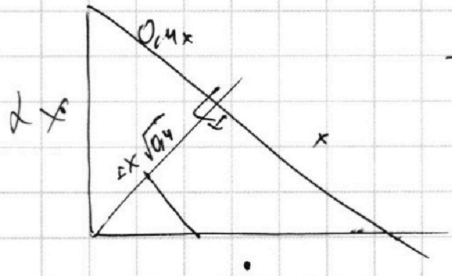
будут ограничены вот такой областью:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$$

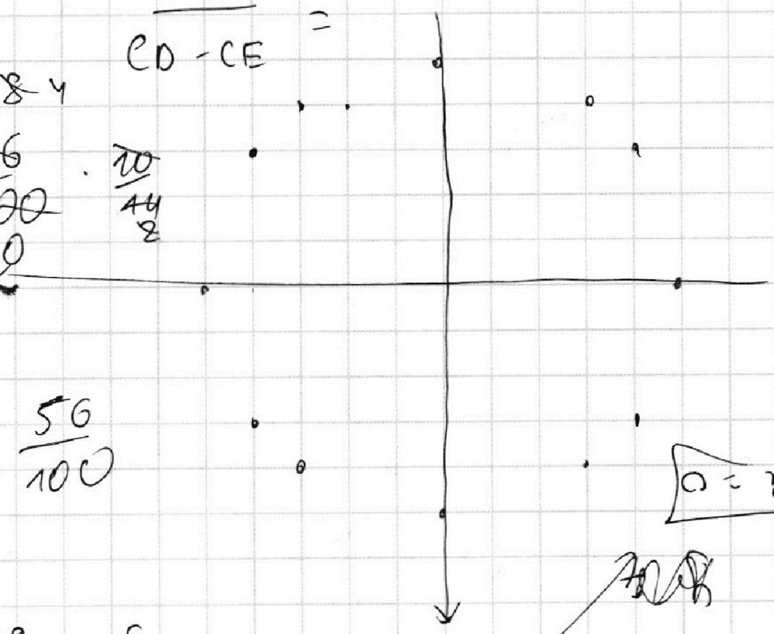
80 − 15 − α

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB} = \frac{CB-FB}{FB}$$

$$\frac{CE}{CD-CE} =$$

8 4

$$\frac{56}{100} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{44}}$$
10 8



$$\frac{56}{100}$$

$\boxed{a = 0}$

$$\begin{cases} 5x + 6ay + b = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+81=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{cases}$$

$6ay = b - 5x$ → $a \neq 0$

$$y = \frac{b-5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$6ay = b - 5x$

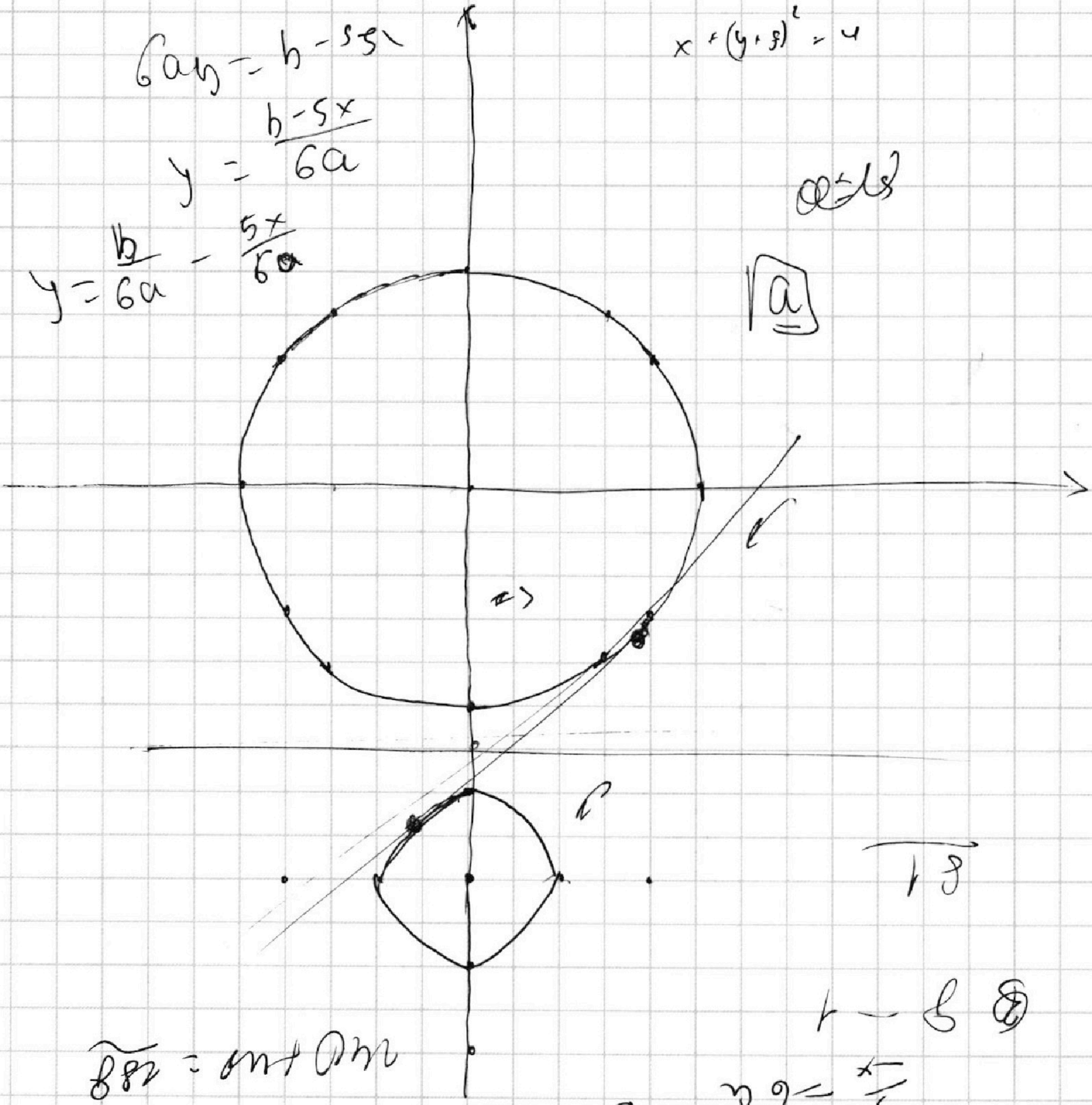
$y = \frac{b-5x}{6a}$

$y = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$

$x + (y+8)^2 = 4$

$a \neq 18$

$\boxed{a}$



81

8 — 1

140+148 = 188

$\frac{5}{-x} = -6a$

$\frac{5}{6a} = -x$

$-\frac{5}{6a} = x$

189+18

175

210+14 = 224

$\frac{27}{\cdot 7}$

150

$\frac{27}{\cdot 7}$
189

$\frac{25}{\cdot 8}$

225

$\frac{225}{-189}$

25+11=36

27 · 7 = 189

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^{6} \cdot 3^{15} \cdot 5^{11}$

$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$abc_{min} = ?\ 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\alpha_1+\alpha_2+\gamma_3}$

$\alpha_1+\gamma_2+\alpha_3 \to min$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1+\alpha_2 \geq 6$ $\quad\alpha_2+\alpha_3 \geq 14$ $\quad\alpha_1+\alpha_3 \geq 16$

$\beta_1+\beta_2 \geq 15$ $\quad\beta_2+\beta_3 \geq 21$ $\quad\beta_1+\beta_3 \geq 25$

$\gamma_1+\gamma_2 \geq 11$ $\quad\gamma_2+\gamma_3 \geq 13$ $\quad\gamma_1+\gamma_3 \geq 28$

54

1

≈54

11

0

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 36$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 18$

$\frac{61}{2}$

30,5

51

1

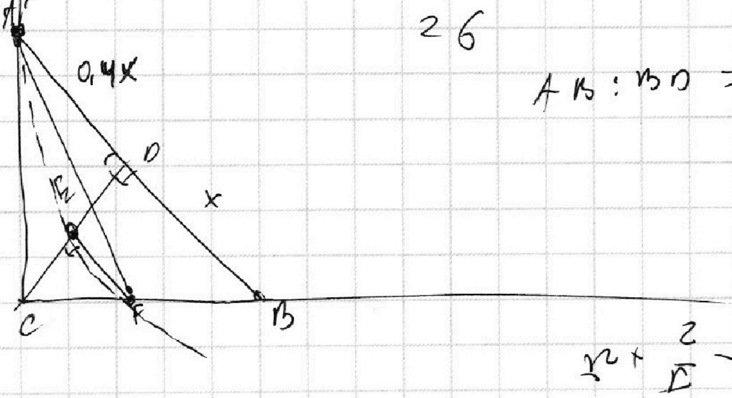
≈14

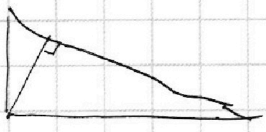
4 6 + 18 = 61

24+28 = 30+22 = 52

26

AB : BD = 1,4





$r^2 + \frac{2}{r} - \frac{2}{A}$

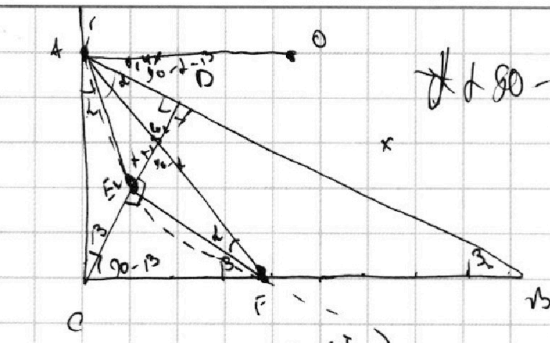
$A - \frac{2}{a}$

$rA+O - \frac{2}{A}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\cancel{\angle}\ \alpha 80-\alpha-\beta$

x

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$\arccos(\quad) = \frac{9\pi-2x}{10}$

$\frac{\pi}{2}-x$

$\sim\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) - \cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

1) $x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n$

2) $x = \frac{\pi}{2}-2\pi n-\alpha$

$\alpha = \frac{9\pi-2x}{10}$

$10\alpha = 9\pi-2x$

$2x = 9\pi-10\alpha$

$x = \frac{9\pi-10\alpha}{2}$

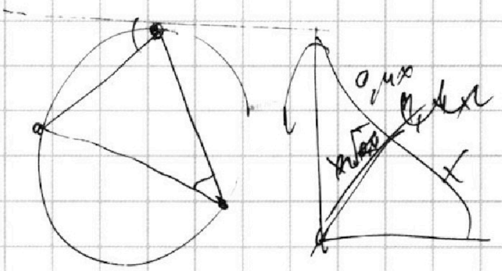
$\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\ \overline{\ \ 6\ \ }$

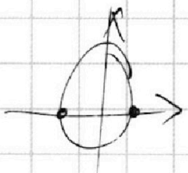
$\frac{\pi}{2}+\pi-2\pi$

$\frac{\pi}{2}-\pi$

$\frac{\pi}{2}+0+4\pi$

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2\pi$





$h = \sqrt{0{,}4x\pi - x}$ ~

Если $\frac{\pi}{2}-x \in [0;\pi]$ $\nu = x\sqrt{0{,}4}$

$\alpha \in [0;\pi]$

$-2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2}\right)=0\\ \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

1) $\frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n = \frac{9\pi-10\alpha}{2}$

$\pi+2\alpha-4\pi n = 9\pi-10\alpha$

$12\alpha = 8\pi+4\pi n$

$\alpha = \frac{2\pi+\pi n}{3}$

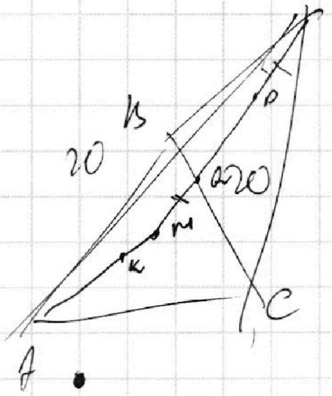
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

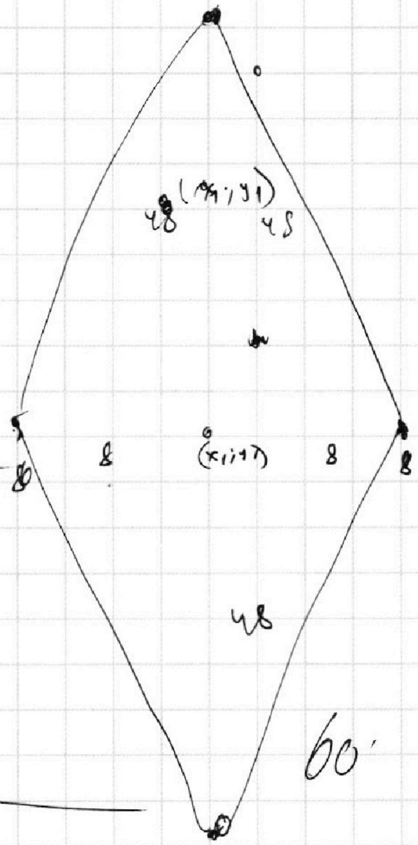
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

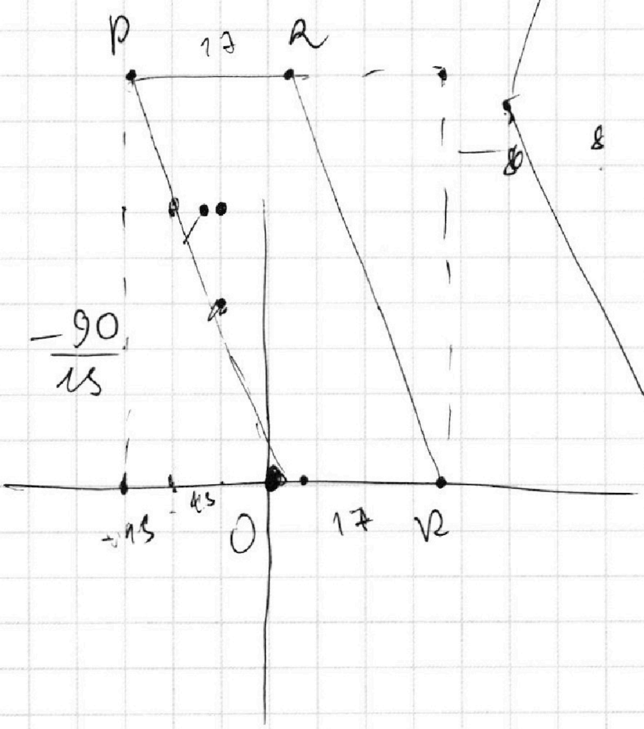
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$







$a^4 - a^3\alpha + a^4 + a^2\alpha^2 + a^4 - 2\alpha a^3 - a\alpha^3 - a^4$

$y = -6(x-17) = 6x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \left(\log_{x^3} \frac{1}{121}\right) - 5$

$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{\frac{1}{8}y^3}\left(11^{-13}\right) - 5$

$64 \cdot 12$

235 ~~11~~ ~~13~~ 17

$640 + 128$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \cdot\ 12 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 768 \end{array}$$

$331 + 11$ $\quad 331 + 13$

260

$$\begin{array}{r} 1768 \\ -\ 225 \\ \hline 893 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 768 \\ 125 \\ \hline 893 \end{array}$$

$331 + 7 \quad 71$

$280 + 51$

tg3a

$3 \cdot 331 \qquad 300$

$3 \cdot \frac{1}{3}5 + \frac{13}{3} - 16$

$225 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 16$

$a + b = \log_{11} x + \log$

$b^5 + 1 + \frac{13}{3} + 5 = 0$

$\left(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4\right)(a+b) =$

$= a^5 - ba^4 + b^2a^3 - b^3a^2 + \cancel{b^4a} + \cancel{ba^4} -$
$- b^2a^3 + b^3a^2 - \cancel{b^4a} + b^5$

$3b^5 + 15b + 16 = 0$

$$\begin{array}{l|l} a^5 + b^5 & a+b \\ \cline{2-2} a^5 + ba^4 & a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a^2 + b^4 \\ \hline b^5 - ba^4 & \\ -ba^4 - b^2a^3 & \\ \hline b^5 + b^2a^3 & \end{array}$$

$(a+b)\ (a^4$

$\log_{11} x \cdot \log_{11} 0{,}5y = c$

$ab = c$

$\log_{11} x = \frac{c}{\log_{11} 0{,}5y}$

$a = \frac{c}{b}$

$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 - ba(a^2 + b^2) + 5$

$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ba) - a^2b^2 + 5$