



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1: Пусть  $a = 2^{d_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1} \cdot x_1$ , где  $x_1 \not\equiv 2; x_1 \not\equiv 3; x_1 \not\equiv 5$   
 $b = 2^{d_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2} \cdot x_2$ , где  $x_2 \not\equiv 2; x_2 \not\equiv 3; x_2 \not\equiv 5$   
 $c = 2^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3} \cdot x_3$ , где  $x_3 \not\equiv 2; x_3 \not\equiv 3; x_3 \not\equiv 5$

Из условия: 
$$\left. \begin{aligned} ab &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2^{d_1+d_2} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2} \cdot 5^{\delta_1+\delta_2} \cdot x_1 \cdot x_2 &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ 2^{d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\delta_2+\delta_3} \cdot x_2 \cdot x_3 &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ 2^{d_1+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_3} \cdot 5^{\delta_1+\delta_3} \cdot x_1 \cdot x_3 &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d_1+d_2 &\geq 6 \\ \beta_1+\beta_2 &\geq 13 \\ d_1+d_2 &\geq 11 \\ d_2+d_3 &\geq 14 \\ \beta_2+\beta_3 &\geq 21 \\ d_2+d_3 &\geq 13 \\ d_1+d_3 &\geq 16 \\ \beta_1+\beta_3 &\geq 25 \\ d_1+d_3 &\geq 28 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2(d_1+d_2+d_3) &\geq 6+14+16=36 \\ 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) &\geq 13+21+25=61 \\ 2(d_1+d_2+d_3) &\geq 11+13+28=52 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d_1+d_2+d_3 &\geq 18 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 &\geq 31 \\ d_1+d_2+d_3 &\geq 26 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} & \text{в целых неотрицательных} \\ & \text{числах} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Гипотеза неверна (нет целых решений)}$$

Из неравенств  
получено следующее

$$\Rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \geq 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

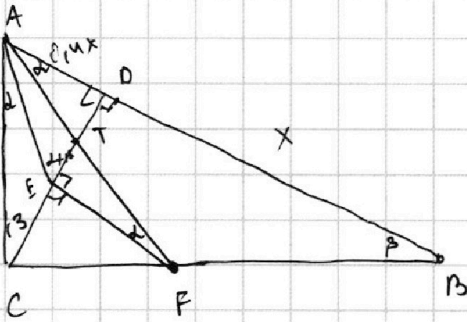
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~2



*Одновременно*  
 $CA$  - параллельная к медиане  $\triangle AEF \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  То же самое  $\odot$  выше и параллельная  
 $\angle EAC = \angle AFE = \alpha$

Известно  $\angle B = \beta$

$CD$  - высота  $\triangle ABC \Rightarrow \angle CDA = 90^\circ$   
 $\left. \begin{array}{l} \angle B = \beta \\ \angle C = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAD = 90 - \beta$

$\Rightarrow \angle ACB = \beta$

$EF \parallel AB$  (по условию)  $\Rightarrow EF \perp CD$   
 $BD \perp CD$

$\angle AED = \angle EAC + \angle ECA$  (или внешний  $\angle$   $\triangle ACE$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABD = \alpha + \beta$

$CD$  - высота  $\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$   
 $\left. \begin{array}{l} \angle ACD = \beta \text{ (по гр.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAD = 90 - \beta$

$\left. \begin{array}{l} \angle AED = \alpha + \beta \\ \angle CED = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DAE = 90 - \alpha - \beta$  (по сумме углов  $\triangle ADE$ )  
 $\angle CAE = \alpha$  (по гр.)  
 $\angle CAB = 90 - \beta$  (по гр.)

$EF \perp CD \Rightarrow \angle DEF = 90^\circ$   
 $\left. \begin{array}{l} \angle TFE = \alpha \text{ (по гр.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ETF = 90 - \alpha$  (по сумме углов  $\triangle TEF$ )

$\angle ETF = 90 - \alpha \Rightarrow \angle ATD$  (или вертикальные к  $\angle ETF$ )  $= \angle ETF =$   
 $= 90 - \alpha$

$\left. \begin{array}{l} \angle ADT = 90^\circ \text{ (по гр.)} \\ \angle TAD = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \angle TAD = \alpha$  (по сумме углов  $\triangle ATD$ )

$\angle TAD = \alpha = \angle EAC = \alpha$  (по гр.)  $\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB$  (по двум углам)  
 $\angle ACE = \beta = \angle ABF = \beta$   
 $\rightarrow$  соответ. стороны

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (продолжение)

$$\triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$$

пусть  $DB = x$

используем  $AB : BD = 1,4$  }  $\Rightarrow AB = 1,4x \Rightarrow AD = 0,4x$   
 $DB = x$

$DB = x$   
 $AD = 0,4x$   
 $CD$  - высота в параллелограмме  $\triangle CAB$  }  $\Rightarrow CD = \sqrt{0,4x \cdot x} = x\sqrt{0,4}$

$AD = 0,4x$   
 $CD = x\sqrt{0,4}$  }  $\Rightarrow$  по П. Пифагора  $AC = \sqrt{0,4^2 x^2 + 0,4x^2} = x\sqrt{0,16+0,4} = x\sqrt{0,56}$

$DB = x$   
 $CD = x\sqrt{0,4}$  }  $\Rightarrow$  по П. Пифагора  $CB = \sqrt{0,4x^2 + x^2} = x\sqrt{1,4}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$  (попр.)  $\Rightarrow \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{EC}{FB}$

$\angle FEC = 90^\circ$  (так как  $FE \perp CD$ )  
 $\angle BDC = 90^\circ$  (попр.)  
 $\angle C$  - общий для  $\triangle CEF$  и  $\triangle CDB$  }  $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$  (по 2 углам)  
 $\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{x\sqrt{0,4}} = \frac{CB - FB}{CB} = \frac{x\sqrt{1,4} - FB}{x\sqrt{1,4}}$

пусть  $CE = a$   
 $FB = b$  }  $\Rightarrow \frac{a}{x\sqrt{0,4}} = \frac{x\sqrt{1,4} - b}{x\sqrt{1,4}}$  }  $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1,4} a = x\sqrt{1,4} - \sqrt{0,4} b \\ \sqrt{0,56} b = 1,4a \end{cases}$

$\Rightarrow b \frac{\sqrt{0,56} \cdot 1,4}{1,4} = x\sqrt{1,4} - \sqrt{0,4} b \Rightarrow b(\frac{\sqrt{0,56}}{1,4} + \sqrt{0,4}) = x\sqrt{1,4} \cdot 0,4$   
 $\rightarrow$  алгебраическое уравнение



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (продолжение)

$$b \cdot \left( \sqrt{\frac{0,56}{1,4}} + \sqrt{0,4} \right) = x \sqrt{1,4 \cdot 0,4} \Rightarrow b \cdot (2\sqrt{0,4}) = x \sqrt{1,4 \cdot 0,4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b = x \sqrt{1,4} \Rightarrow b = x \frac{\sqrt{1,4}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} \cdot \frac{\sqrt{1,4}}{2} x = x \frac{\sqrt{0,4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE = x \frac{\sqrt{0,4}}{2}$$

$$FB = x \frac{\sqrt{1,4}}{2} \Rightarrow CF = CB - FB = x \sqrt{1,4} - x \frac{\sqrt{1,4}}{2} = \frac{x \sqrt{1,4}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{По ПП. Треугольнику } EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = x \sqrt{\frac{1,4}{4} - \frac{0,4}{4}} = x \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$CE = x \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CEF} = EF \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{2} \cdot \frac{x}{2} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{8}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 0,4x \cdot \sqrt{0,4}x = x^2 \cdot \frac{0,4 \cdot \sqrt{0,4}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{\frac{0,4}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{0,4}{2} \cdot 8 = 4 \cdot 0,4 = 1,6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \in [0; \pi] \text{ и тогда пусть } \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \in [0; \pi] \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(d) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \in [0; \pi] \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos d = 0 \quad (1) \end{array} \right\}$$

$$(1): \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos d = 0 \Rightarrow -2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + d}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x - d}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\frac{\pi}{2} - x + d}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\frac{\pi}{2} - x - d}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} - d - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Из этих двух регионов получаем  $d = \frac{9\pi - 2x}{10}$ .

Рассмотрим 2 случая:

$$1) \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{9\pi - 2x}{10} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n = \frac{9\pi - 10d}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi + 2d - 4\pi n = 9\pi - 10d, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12d = 8\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = \frac{2\pi + \pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2\pi + \pi n}{3} \geq 0 \\ \frac{2\pi + \pi n}{3} \leq \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + n \geq 0 \\ 2 + n \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n \geq -2 \\ n \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow d \in \{0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi\} \Rightarrow x \in \{4\pi + \frac{\pi}{2}; 2\pi + \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - d - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{9\pi - 2x}{10} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - d - 2\pi k = \frac{9\pi - 10d}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{сложно} \\ \text{реш.} \\ \text{методом} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

$$\Rightarrow J - 2d - 4JK \geq 9J - 10d, \quad d \in [0; 7]; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8J + 4JK}{8} = \frac{2J + JK}{2} = J + \frac{JK}{2} \in [0; 7]; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J + \frac{JK}{2} \geq 0 \\ J + \frac{JK}{2} \leq 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{k}{2} \geq 0 \\ 1 + \frac{k}{2} \leq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + k \geq 0 \\ 2 + k \leq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \geq -2 \\ k \leq 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0\} \Rightarrow d \in \left\{ 0; \frac{J}{2}; J \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{J}{2} + 4d; 2J; -\frac{J}{2} \right\}$$

Варианты возможных решений:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4J + \frac{J}{2} = \frac{9J}{2} \\ x = 2J + \frac{J}{6} = \frac{13J}{6} \\ x = \frac{J}{2} + \frac{2J}{3} = \frac{3J + 4J}{6} = \frac{7J}{6} \\ x = -\frac{J}{2} \\ x = 2J \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ответ: } \frac{9J}{2}; \frac{13J}{6}; \frac{7J}{6}; -\frac{J}{2}; 2J$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

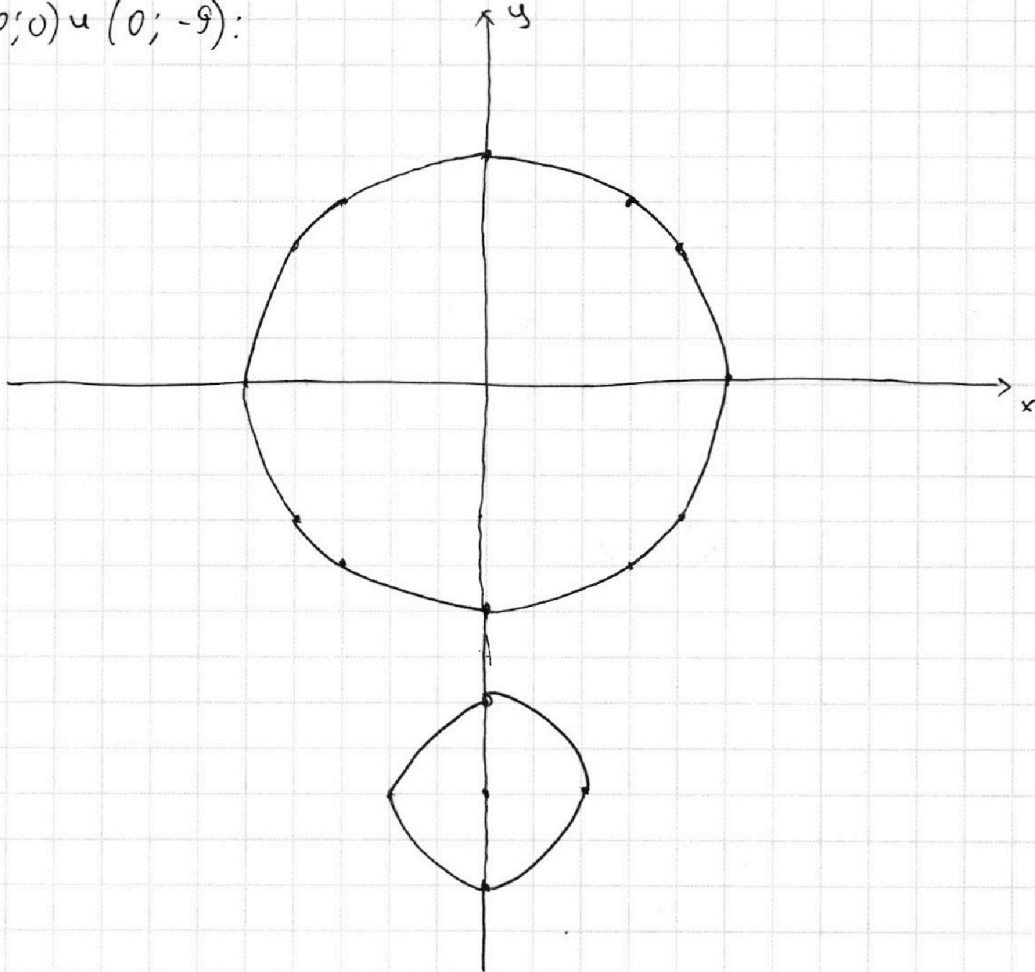


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 4

$$\left. \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Упростим (2) на графике - это две окружности (указанные  
(0;0) и (0; -9)):



При этом  $5x + 6ay - b = 0$  - это линия.

Рассмотрим два случая  $a=0$  и  $a \neq 0$ :

1)  $a=0 \Rightarrow 5x = b$

$x = \frac{b}{5}$ , очевидно, что найдем  $b$ , такое, что будут

дуги пересечения обе окружности по 2 пуга; найти  $b=0$ .

$\rightarrow$  Сложиме обратом



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4 (продолжение)

2)  $a \neq 0$  или

$$y = \frac{b + 5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$$

Заметим, что величина  $a$  или переменной

наша переменная, а тоже  $b$ ,  $5x$  или переменной с  $6a$

$\Rightarrow$  величина  $b$  или константа

получим все переменные с константой  $-\frac{5}{6a}$ .

Тогда  $-\frac{5}{6a}$  переменная все переменные на константе

получим константу  $0$ .

Заметим, что уравнение имеет не более 2 переменных с коэффициентами  $\Rightarrow$  Если переменная  $y$ , то уравнение

переменной  $x$  и константа  $y$  2 коэффициента  $6a$  и  $5$ .

В силу единственности корней отсюда следует  $0 = 0$

получим только переменные с коэффициентами константы, или  $b$  или константа  $-\frac{5}{6a}$  или константа константы  $6a$  и  $5$  или константа  $0$  или константа  $0$ .

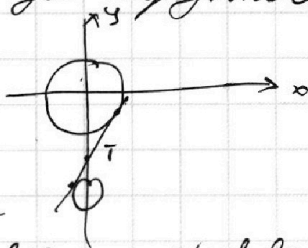
Тогда  $0 = 0$  или константа константы  $0 = 0$  или константа  $0 = 0$  или константа  $0 = 0$ .

Она перемена с  $0 = 0$

или  $0 = 0$ , тогда заметим, что все переменные константы

или константа  $0 = 0$

Тогда  $0 = 0$  или константа  $0 = 0$  или константа  $0 = 0$ .



$\Rightarrow$  константа  $0 = 0$





1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4 (продолжение)

а) прямые меньше чем величина конуса, чем образ

касательная не может касаться поверхности конуса и не может касаться в, так как в точке T они не имеют касания, а при касании касательная перпендикулярна радиусу. Если она образует с осью OX угол  $\alpha$ , то касательная перпендикулярна радиусу  $r$  и образует с осью OX угол  $\beta$ .

Окружность  $\sigma$  при этом касательная не может

касаться конуса  $\Rightarrow$  не касаются, так как имеют более 2 касания в T, а при касании перпендикулярны радиусу  $r$  и окружности.

Найдем каноническое уравнение:

$y = kx + b$  - уравнение касательной

Она имеет одно пересечение с двойной окружностью  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (kx + b)^2 = 25 \\ x^2 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 25 \Rightarrow x^2(k^2 + 1) + 2kbx + b^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

имеет одно решение

$$D = 4k^2b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 25) \Rightarrow 4(k^2b^2 - k^2b^2 + 25k^2 - b^2 + 25) = 0$$

1 решение  $25k^2 - b^2 + 25 = 0$

Она имеет одно пересечение с малой окружностью:

$$\begin{cases} y = kx + b_1 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + k^2x^2 + b_1^2 + 4 - 2kxb_1 + 4kx + 4b_1 = 4 \\ x^2(1 + k^2) + x(2kb_1 + 4k) + b_1^2 + 4b_1 = 0 \end{cases}$$

имеет 1 решение  $D = (2kb_1 + 4k)^2 - 4(1 + k^2)(b_1^2 + 4b_1) = 0$

$$\Rightarrow k^2b_1^2 + 4k^2b_1 + 4k^2 - b_1^2 - 4b_1 - 4k^2b_1^2 - 4k^2b_1 - 4k^2 = 0$$

$\rightarrow$  сократиме обротно делая

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4 (продолжение)

$$\begin{cases} 25u^2 - b_1^2 = -25 \\ 4u^2 - b_1^2 - 18b_1 - 77 = 0 \end{cases} \rightarrow \left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{b_1^2 + 18b_1 + 77}{4} \\ 25u^2 &= b_1^2 - 25 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{25}{4}(b_1^2 + 18b_1 + 77) = b_1^2 - 25$$

$$25b_1^2 + 25 \cdot 18b_1 + 25 \cdot 77 = 4b_1^2 - 100 \Rightarrow 21b_1^2 + 25 \cdot 18b_1 + 25 \cdot 84 = 0 \Rightarrow 7b_1^2 + 25 \cdot 6b_1 + 25 \cdot 27 = 0$$

$$D = 25^2 \cdot 6^2 - 4 \cdot 7 \cdot 25 \cdot 27 = 25(25 \cdot 36 - 4 \cdot 7 \cdot 27) = 100(25 \cdot 9 - 4 \cdot 27) = 100 \cdot 36 \Rightarrow b_1 = \frac{-25 \cdot 6 \pm 60}{14} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{-150 + 60}{14} = \frac{-90}{14} = -\frac{45}{7} \\ b_1 &= \frac{-150 - 60}{14} = -\frac{210}{14} = -15 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{15^2 - 25}{25} = \frac{15^2}{25} - 1 = 8 \\ u^2 &= \frac{(-\frac{45}{7})^2 - 25}{25} = \frac{45^2}{7^2 \cdot 25} - 1 = \frac{81}{49} - 1 = \frac{81 - 49}{49} = \frac{32}{49} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} u = \pm \sqrt{8} \\ u = \pm \sqrt{\frac{32}{49}} \end{cases}$  Но мы ищем обычно внутреннюю кантовку с кантовкой  $\Rightarrow$

$\Rightarrow u > 0$   
 $b_1 \in [-5; -7]$  - это означает, что все отрезки окружности лежат на

кантовке внутренней она кантуется снаружи отрезки отрезков меньше диаметров  $\Rightarrow$  она не кантуется отрезками на этом отрезке.

$$\left. \begin{aligned} -15 \notin [-5; -7] \\ -\frac{45}{7} \in [-5; -7] \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_1 = -\frac{45}{7} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u &= \pm \sqrt{\frac{32}{49}} \\ u &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{32}}{7}$$

Значит кант покрывает все кантуется с кантом кантуется, точнее у кантовки по диаметру  $\Rightarrow -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow$  кантуется без кантуется.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение)

$$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \quad \text{или} \quad \frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \\ \Rightarrow a < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{5}{6} < \frac{a\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a > \frac{-35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left( \frac{-35}{6\sqrt{32}}; 0 \right)$$

Все корни уравнения больше, минимум квадратного уравнения  
справа от нуля от оси  $Ox$  и все целые коэффициенты квадратного

уравнения  $-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$  минимум квадратного уравнения больше  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow a \in \left( 0; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right)$$

Итого получаем, что решением  $a = 0; a \in \left( -\frac{35}{6\sqrt{32}}; 0 \right); a \in \left( 0; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left( -\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{11}^3 \frac{1}{3} (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0,5y > 0 \Rightarrow y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \Rightarrow y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-2}{3} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \frac{-13}{3} - 5 \end{cases}$$

$a = \log_{11} x$

$b = \log_{11} 0,5y$

$$\begin{cases} 4a - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3} - 5 \\ 4b + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a \quad (1) \\ 4b^2 + 1 = -\frac{13}{3} - 5b \end{cases}$$

(1):  $4a^2 + 5a - 5\frac{1}{3} = 0$   
 $12a^2 + 15a - 16 = 0 \Rightarrow D = 225 + 4 \cdot 12 \cdot 16 = 225 + 768 = 993$   
 $a = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24} \Rightarrow \log_{11} x = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24}$

(2):  $4b^2 + 5b + 1 + \frac{13}{3} = 0$   
 $12b^2 + 15b + 16 = 0$

(1):  $a^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a$   
 $a^5 + 5a - 6 + \frac{2}{3} = 0$   
 $3a^5 + 15a - 18 + 2 = 0$   
 $3a^5 + 15a - 16 = 0$

(2):  $3b^5 + 15b + 16 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0 \\ (a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5) = 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} | a+b = 0 \quad (1)$   
 $a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5 = 0 \rightarrow$  *установите eq. неин*



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача ~ 5 (выполнение)

(1):  $a + b = 0$

$b = -a$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ -3a^5 - 15a + 16 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow 3a^5 + 15a - 16 = 0$

это уравнение имеет решение, так как

$3 \cdot (\frac{1}{2})^5 + \frac{15}{2} - 16 < 0$  и  $3 \cdot 1 + 15 - 16 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  На отрезке от  $\frac{1}{2}$  до 1 есть корень.

оба уравнения  
выполнены и  
одновременно

$a + b = 0 \Rightarrow \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0 \Rightarrow \log_{11} \sqrt{x \cdot y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x \cdot y} = 1$

$xy = 2 \Rightarrow 2$  - одно из возможных значений

(2):  $a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 5 = 0$

Пусть  $a + b = d$

$$\rightarrow a^4 - a^3(d-a) + (d-a)^2 a^2 - (d-a)^3 a + (d-a)^4 + 5 =$$

$$a^4 - a^3d + a^4 + a^2(d^2 + a^2 - 2da) -$$

$$- a(d^3 + a^3 - 3a^2d - 3d^2a) +$$

$$+ d^2a^2 + 5 = 3a^4 - a^3d + 5a^2d^2 - 2d^3a + 5 + d^4 + a^4 - d^3a - a^3d + d^2a^2 + 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

Выведем уравнения прямых, ограничивающих  $\square$ :

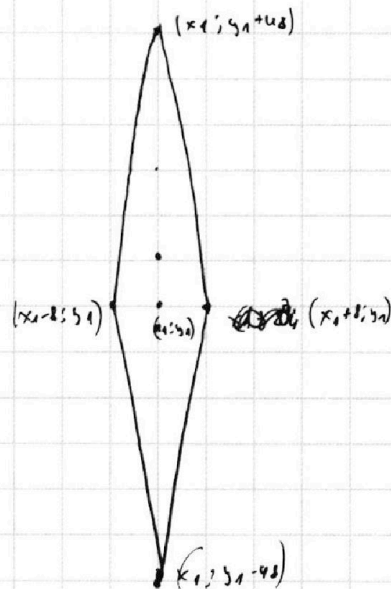
О и Р образуют прямую:  $y = -\frac{90}{15}x = -6x$

О и Q образуют прямую:  $y = 0$

Р и Q образуют:  $y = 90$

А и В образуют:  $y - 6(x - 17) = -6x + 17 \cdot 6 = 102 - 6x$

Заметим, что если зафиксировать точку  $(x_1; y_1)$ , то точка  $(x_2; y_2)$   
будет ограничена как точкой области:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

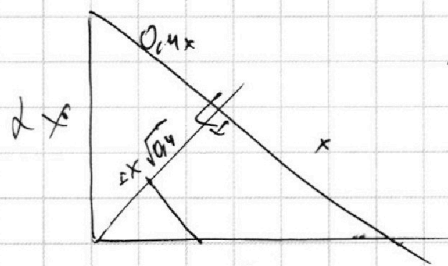
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**



- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$$

$$80 - 15 - 2$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB} = \frac{CD - FB}{FB}$$

$$\frac{CE}{CD - CE} = \frac{20}{44 - 2}$$

$$\frac{84}{56} = \frac{20}{42}$$

$$\frac{56}{100} = \frac{20}{44}$$

$$\frac{20}{100}$$

$$\frac{56}{100}$$

$$a = 20$$

$$x \cdot \frac{20}{5} - \frac{20}{9} = \frac{20}{x \cdot 5 - 9} = 4$$

$$0 \neq 0$$

$$60y - 5x = 609$$

$$\left. \begin{aligned} h = 15 + 9 + 2x \\ 5x = 2h + 25 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} h = 15 + 9 + 2x \\ 5x = 2h + 25 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 = (15 + 9 + 2h + 2x)(5x - 2h - 25) \\ 0 = 9 + 60y + 5x \end{aligned} \right\}$$



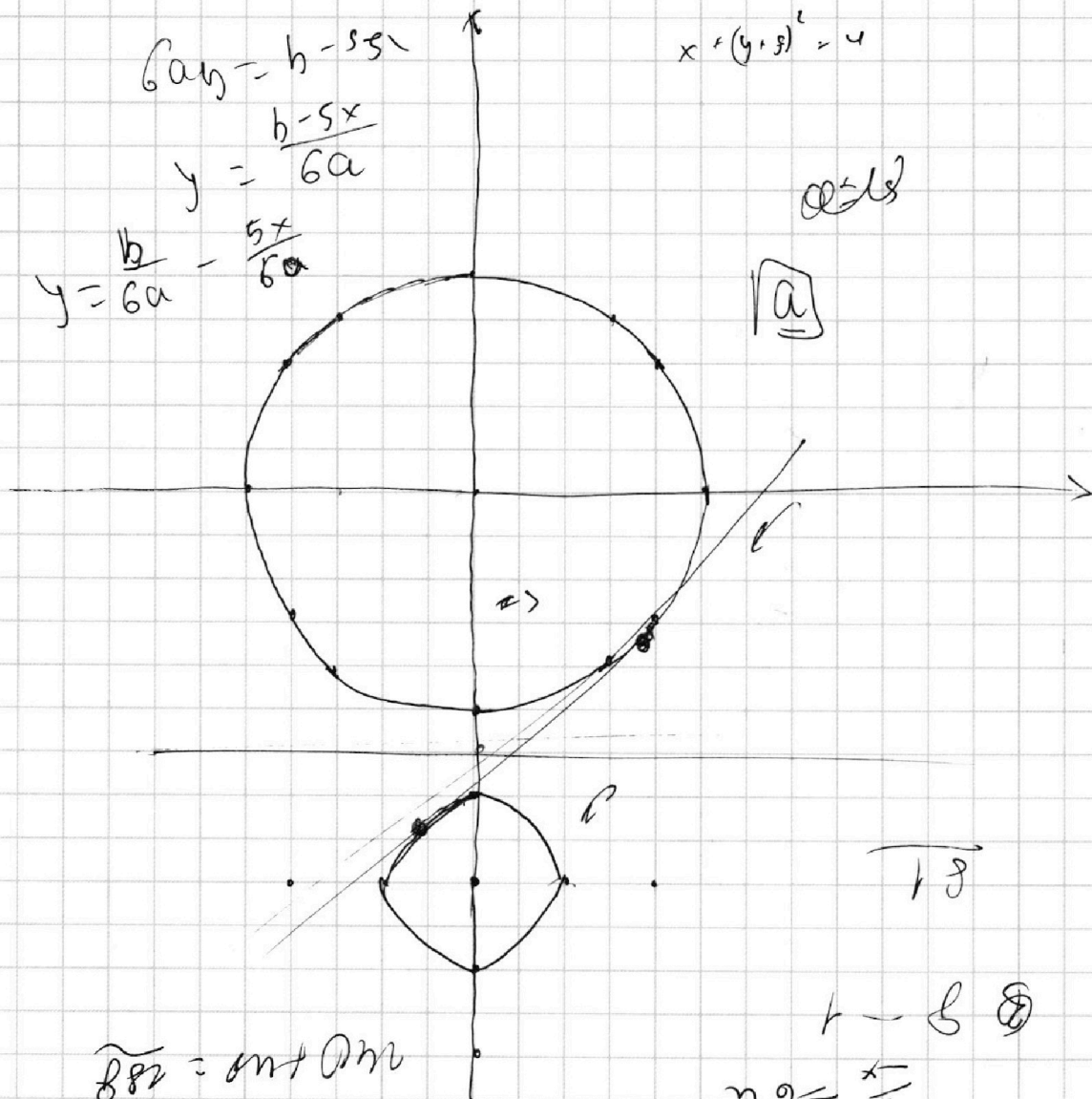
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

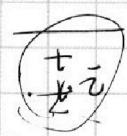
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{88} = 9 + 0.2$

$210 + 14 = 224$



$$\begin{array}{r} 25 + 11 = 36 \\ \hline 25 \\ \hline 57 \end{array}$$

$\sqrt{28}$

$\sqrt{17}$

$\sqrt{8}$

$2t + t = 2$

$\frac{x}{5} = 6a$

$\frac{6a}{5} = -x$

$\frac{6a}{5} = x$

$\frac{680}{5}$

150

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 11$$

$$bc : 2 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 13$$

$$ac : 2 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 28$$

$$abc_{\min} = ? \quad \begin{matrix} d_1+d_2+d_3 & \alpha_1+\beta_2+\beta_3 & d_1+d_2+d_3 \\ \cdot 2 & \cdot 3 & \cdot 5 \end{matrix}$$

$$a = 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1$$

$$b = 2 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2$$

$$c = 2 \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3$$

$d_1+d_2+d_3 \rightarrow \min$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 15$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 21$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 15$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 11$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$$

$$2(d_1+d_2+d_3) \geq 36$$

$$d_1+d_2+d_3 \geq 18$$

$$\frac{61}{2}$$

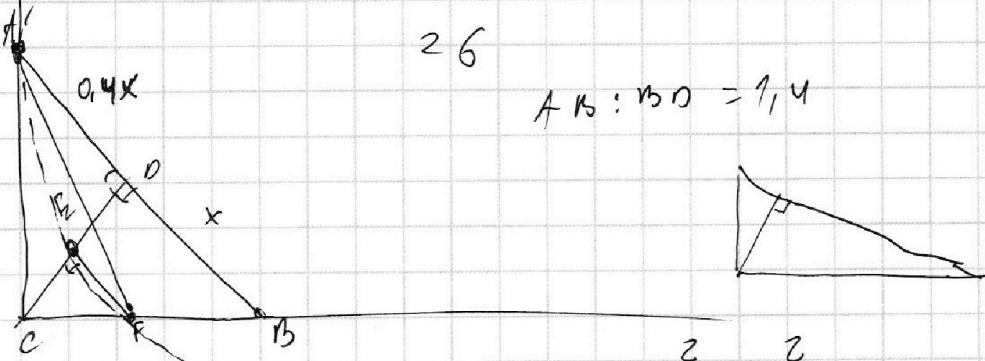
$$30,5$$

$$4 \cdot 6 + 18 = 61$$

$$24 + 28 = 30 \times 22 = 52$$

$$26$$

$$AK : BO = 1,4$$



$$\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$$

$$\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$$

$$\frac{2}{\alpha} + 0 - \frac{2}{\beta}$$

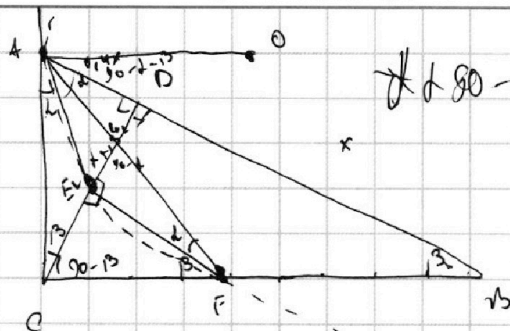
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\delta = 90^\circ - \alpha - \beta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\arccos(\frac{9x-2x}{10}) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\frac{\pi}{2} - x \sim d$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos d$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos d = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(d + \pi) = \cos d \cdot \cos \pi - \sin d \cdot \sin \pi$$

$$\cos(d - \pi) = \cos d \cdot \cos \pi + \sin d \cdot \sin \pi$$

$$1) \quad x = \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n$$

$$2) \quad x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n - d$$

$$d = \frac{9x - 2x}{10}$$

$$10d = 9x - 2x$$

$$2x = 9x - 10d$$

$$x = \frac{9x - 10d}{2}$$

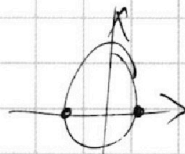
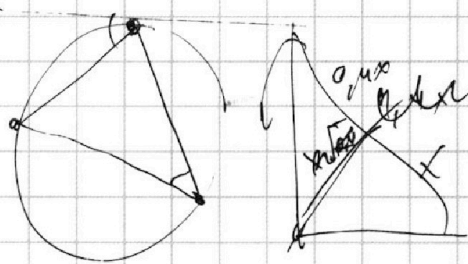
$$\frac{d}{2} + \frac{2d}{3} = \frac{d}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi - 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi$$

$$\frac{\pi}{2} + 0 + 4\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi$$



$$h = \sqrt{0.4x - x}$$

$$\text{Если } \frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi] \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{0.4x}$$

$$d \in [0; \pi]$$

$$-2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + d}{2} - \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x - d}{2} = 0$$

$$\sin(\frac{\frac{\pi}{2} - x + d}{2}) = 0$$

$$\sin(\frac{\frac{\pi}{2} - x - d}{2}) = 0$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x + d}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x - d}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \quad \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n = \frac{9x - 10d}{2}$$

$$x + 2d - 4\pi n = 9x - 10d$$

$$12d = 8x + 4\pi n$$

$$d = \frac{2x + \pi n}{3}$$

**В**



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

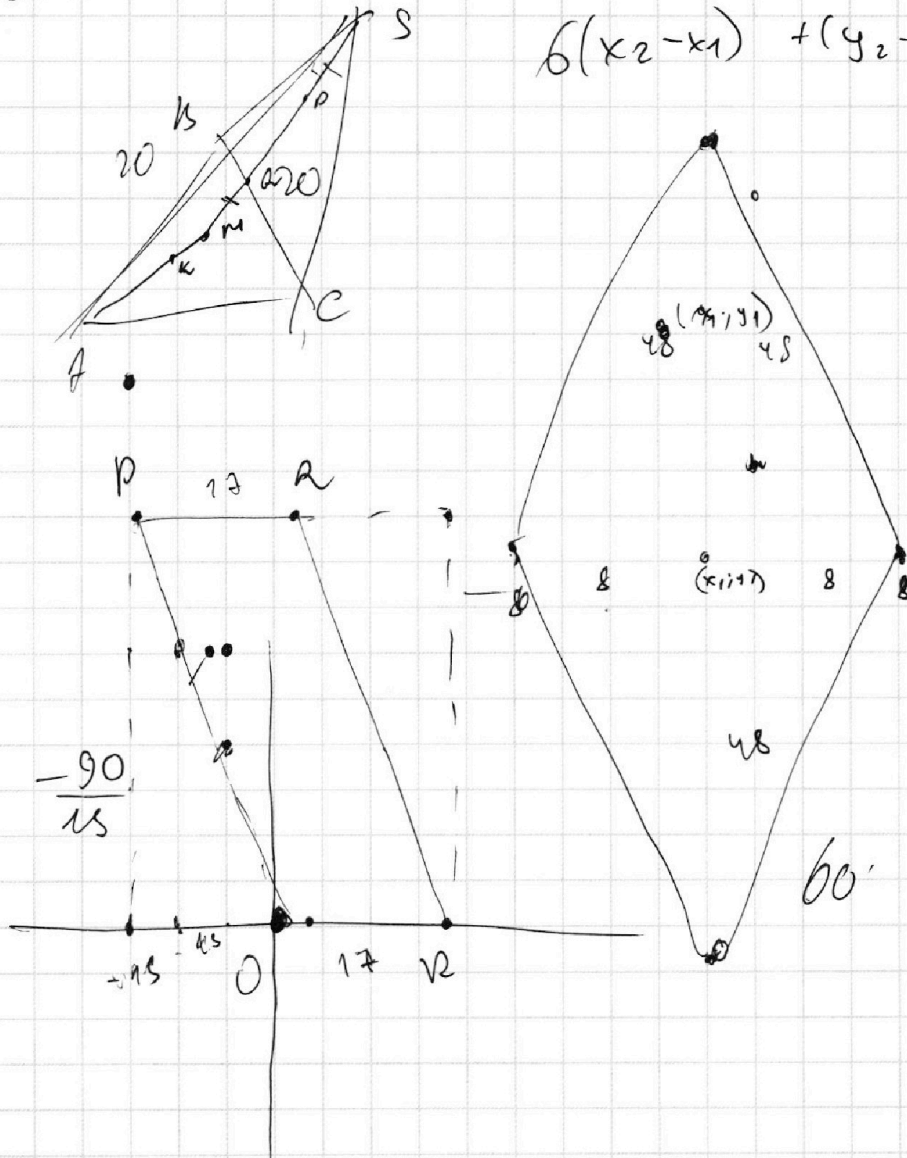


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



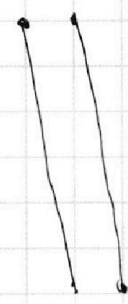
$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$



$$a^4 - a^3 + a^4 + a^2 a^2 + a^4 - 2a^3 a^3 - a^2 a^3 - a^4$$

$$y = -6(x - 17) = 6x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x^{11} = \left( \log_x^3 \frac{1}{121} \right) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y}^{11} = \log_{\frac{1}{4}y^3}^{11} (11^{-15}) - 5$$

64 · 12      235 # ~~1217~~

640 + 128       $\frac{64}{12}$       ~~3517~~       $\frac{351}{13}$

1768       $\frac{64}{8}$       280

228       $\frac{64}{8}$       3317      71

893       $\frac{64}{8}$       280 + 51

т.е.  $\Delta$

3 · 331 #

300 #

$$3 \cdot \frac{1}{3} 5 + \frac{15}{3} = 16$$

228 · 4 · 12 · 16

$$a + b = \log_{11} x + \log_y$$

$$b^5 + 1 + \frac{15}{3} + 5 = 0$$

$$(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4)(a+b) =$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$= a^5 - ba^4 + b^2a^3 - b^3a^2 + b^4a + ba^4 - b^2a^3 + b^3a^2 - b^4a + b^5$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a^5 + b^5} \frac{a+b}{a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4}$$

$$\log_{11} x \cdot \log_{11,0,5y} z = c$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a^5 + b^5} (a+b) (a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4)$$

$$ab = c$$

$$\log_{11} x = \frac{c}{\log_{11,0,5y}}$$

$$a = \frac{c}{b}$$

$$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 - ba(a^2 + b^2) + 5$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ba) - a^2b^2 + 5$$