



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

$$-2\sqrt{2} ; \frac{\pi}{2}$$

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

...

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \quad a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{57}}{7}; +\infty\right)$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3. \quad \frac{1}{2}$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\square ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot n, n \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot m, m \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot k, k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34} \cdot \frac{n \cdot k}{m}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{10} \cdot \frac{nm}{k}$$

$$\frac{ac \cdot bc}{ab} = c^2 = 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{44} \cdot \frac{mk}{n}$$

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{3nk}{m}}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt{\frac{3nm}{k}}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{22} \cdot \sqrt{\frac{3mk}{n}}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\frac{3nk}{m}; \frac{3nm}{k}; \frac{3mk}{n} \in \mathbb{N}$.

Каждое из чисел n, m, k встречается в числителе дроби \Rightarrow
 \Rightarrow необходимо чтобы вынести 3 из под знака корня, одно из чисел
 должно делиться на 3 \Rightarrow ~~не наименьшая~~ ^{наименьшая} общность
 \Rightarrow в двух из чисел a, b, c увеличится
 степень числа 3 на 1. Не наименьшая общность, $3k = 3e, e \in \mathbb{N}$,
 т.к. от выбора n, m, k произведение abc не изменится:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{ne}{m}}; \text{ чтобы } \frac{n \cdot m}{5^{10} e} \text{ было полным квадратом,}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt{\frac{nm}{k}}; mn : 5^{10} \Rightarrow \square m = 5^{\alpha} \cdot d; d, d_2 \in \mathbb{N} \wedge$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22} \cdot \sqrt{\frac{me}{n}}; n = 5^{\beta} \cdot d_2; \text{ где } \alpha + \beta = 10, \text{ но числа}$$

\square и c имеют $\sqrt{\frac{n}{m}}$ и $\sqrt{\frac{m}{n}} \Rightarrow$ если $\alpha \neq \beta$, то числа a и c имеют
 большую степень числа 5 $\Rightarrow abc$ будет больше $\Rightarrow \square \alpha = \beta = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{d_2 e}{d_1}}; b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt{\frac{d_1 d_2}{e}}; c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22} \sqrt{\frac{d_1 e}{d_2}}$$

Очевидно, что если $e = d_2 = d_1$, то числа наименьшие \Rightarrow

$$\Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

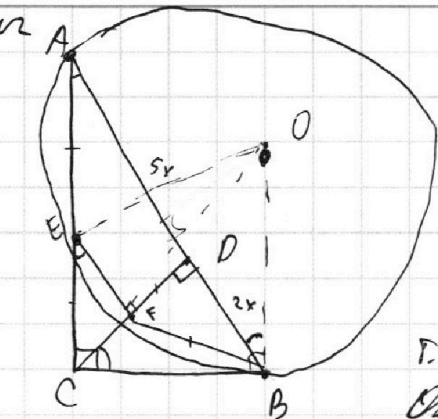
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\square AD = 5x; DB = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = x\sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = x\sqrt{35}$$

г. А также ~~применением~~ ~~формулы~~ ~~Симона~~ \Rightarrow

$$\Rightarrow BC^2 = EC \cdot AC$$

$$14x^2 = EC \cdot \sqrt{35}x \Rightarrow EC = 2\sqrt{\frac{7}{5}}x$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle ECF \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = k^2 = \left(\frac{EC}{AC}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle ECF} = \frac{4}{25} S_{\triangle ACD}$$

$$S_{\triangle ECF} = \frac{4}{35} S_{\triangle ABC}$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{35}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arccos(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$\Rightarrow x = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1. \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = 0, k = -1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, k = 0, \text{ т.к. } \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = -2\pi$$

$$2. \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k \Rightarrow \varphi = \pi; k = 1$$

$$\Rightarrow x = \pi + 2\pi = 3\pi$$

$$\text{т.к. } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow$$

$$3. \varphi \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = -\frac{3\pi}{2} + \varphi$$

$$10\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}k \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}; k = 0, \text{ т.к. } \varphi \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$4. \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = \varphi - 2\pi$$

$$10(\varphi - 2\pi) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}; k = 0, \text{ т.к. } \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{Ответ: } x = -2\pi; x = \frac{\pi}{2}; x = 3\pi; x = \frac{4\pi}{3}; x = \frac{7\pi}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

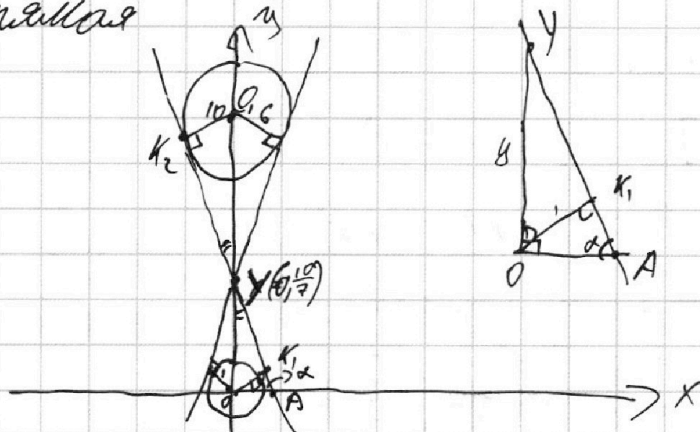
~ 4

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

окружности с ц. $(0; 0)$ $r = 1$
ц. $(0; 10)$ $r = 6$

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ - прямая

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$



т.к. решение 4, то прямая пересекает окр-ти в двух точках каждого. тангенс существует, когда угол наклона прямой к оси Ox имеет значение между значениями углов ~~как~~ внутренних касательных

$\Delta K_1 O Y \sim \Delta K_2 O Y$ по двум углам $\Rightarrow \frac{K_2 O_1}{K_1 O} = \frac{O_1 Y}{O Y} = \frac{10 - y}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{10}{7}$

$\alpha = \angle OAY = \angle YOK_1 = \arccos \frac{OK_1}{OY} = \arccos \frac{7}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{(\frac{7}{10})^2} - 1\right)} = \pm \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow$ два решения будут,

когда $\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \operatorname{tg} \alpha < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{cases}$, но $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$\begin{cases} t = \log_5(2x); n = \log_5 y \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0; y > 0 \\ x \neq \frac{1}{2}; y \neq 1$$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 | : t \neq 0 \\ n^4 + \frac{4}{n} = -\frac{1}{3n} - 3 | : n \neq 0 \end{cases}$$

Если подставить $t=0$ и $n=0$, то есть $2x=1$ и $y=1$ в исходные уравнения, получим не верное равенство $\Rightarrow t \neq 0; n \neq 0$

$$\begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ 3n^5 + 9n + 13 = 0 \end{cases}$$

т.к. $f(x) = 3x^5 + 9x$ — монотонно возрастающая функция, то к. $f'(x) = 15x^4 + 9$, система имеет одно решение, т.к. каждое значение она принимает один раз.

$$t^5 + n^5 + 3(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 3) = 0$$

$t+n=0$, больше реш. нет, т.к. t и n — единственные

Спр-зи $\log_5(2x) + \log_5(y) = 0$

$$\log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

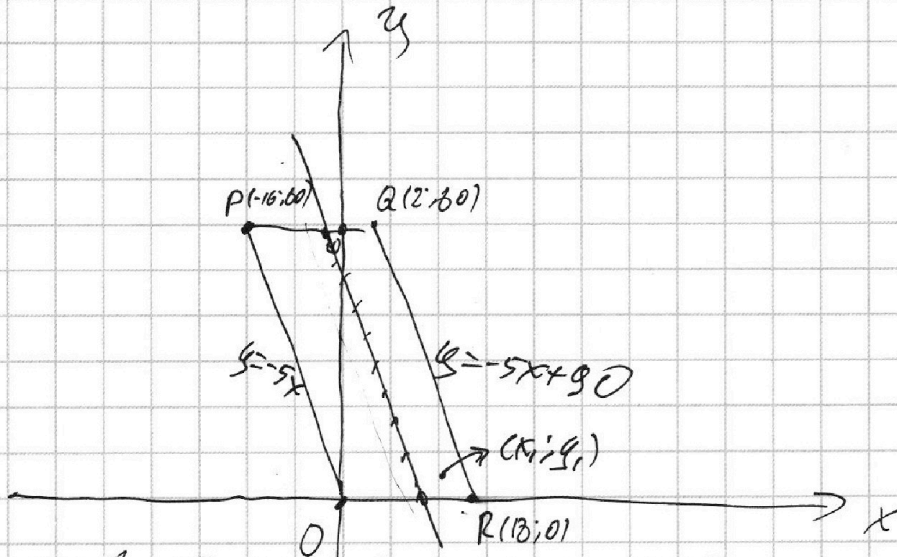
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



Пусть мы выбрали $\tau \cdot A(x_1; y_1) \Rightarrow$ ~~суть~~

$y_2 = -5x_2 + 5x_1 + y_1 + 45$ — функция $y_2(x_2)$ — заданная координата точек $B(x_2; y_2)$. Заметим, что данная прямая параллельна PQ и $QR \Rightarrow \tau \cdot A(x_1; y_1)$ соответствует отрезок полученный при пересечении прямой

$y_2(x_2)$ параллельноуграмма. Угнам когда данная

прямая пересекает его. $\tau \cdot (x_1; y_1 + 45) \in y_2(x_2)$

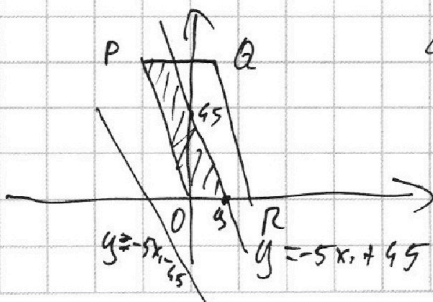
Прямая $y_1(x_1)$ должна лежать между $y = -5x$ и $y = -5x + 90 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_2 \geq -5x_2 \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + y_1 \geq -45 \\ 5x_1 + y_1 \leq 45 \end{cases}$$

Каждой $\tau \cdot (x_1; y_1)$ соответствует 17 точек, т.к. на PQ лежит 17 т. с целочисленными координатами.

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -5x_1 - 45 \\ y_1 \leq -5x_1 + 45 \end{cases}$

— данные неравенства дают нам ~~два~~ параллелограмм со стороной основания 9 и высотой 80. \Rightarrow всего $10 \cdot 81 = 810$ точек. \Rightarrow всего пар: $\frac{810 \cdot 17}{2} = 6885$, т.к. попарно считали квадраты.



Ответ: 6885.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

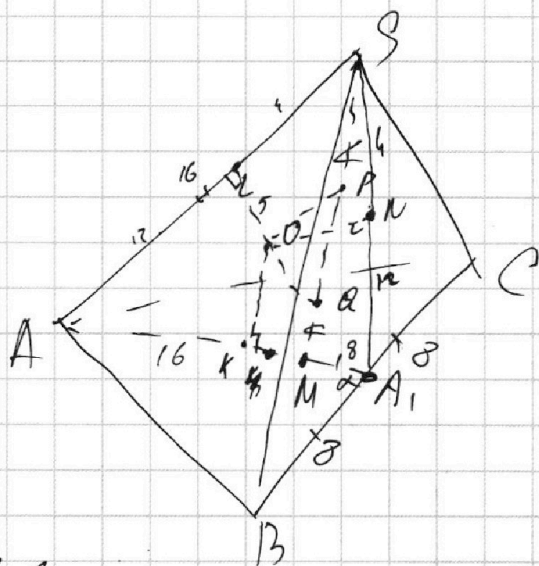
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~7



① По св-ву о секущих к сфере:

$$T.S: SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$MK^2 = MQ \cdot MP \Rightarrow SL = MK$$

$AK = AL$ (т.к. отрезки касательных) $\Rightarrow AS = AM = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8; AA_1 = 24$

② $\sphericalangle AA_1B = \alpha \Rightarrow \sphericalangle AA_1C = \pi - \alpha$

$\sphericalangle BMA_1 = \frac{2}{3} m_1; \sphericalangle CMA_1 = \frac{2}{3} m_2 \Rightarrow$ по $\nabla \cos$ для $\triangle BMA_1$ и $\triangle CMA_1$:

$$\left(\frac{2}{3} m_1\right)^2 = 2 \cdot 8^2 (1 - \cos \alpha) \quad \frac{2}{3} m_1 \cdot \frac{2}{3} m_2 = 2 \cdot 8^2 \cdot \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{2}{3} m_2\right)^2 &= 2 \cdot 8^2 (1 + \cos \alpha) \\ m_1 m_2 &= \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 8^2 \cdot |\sin \alpha| \end{aligned} \right.$$

③ $S_{\triangle ABA_1} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 50$

$$S_{\triangle ABA_1} = \frac{1}{2} \cdot BA_1 \cdot AB \cdot \sin \sphericalangle ABA_1 \Rightarrow AB \cdot \sin \sphericalangle ABA_1 = \frac{25}{2}$$

$$\nabla \sin \text{ для } \triangle ABA_1: \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AA_1}{\sin \sphericalangle ABA_1} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AB \cdot \sin \sphericalangle ABA_1}{24} = \frac{25}{48}$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 8^2 \cdot \frac{25}{48} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 2^7}{3 \cdot 2^6} = 3 \cdot 2 \cdot 25$$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot AA_1 = 24 \cdot 3 \cdot 50 = \underline{3600}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ $\angle (ABC; BSC) = 180 - \angle KON$, т.к. сфера касается
двух плоскостей в γ_K и $\gamma_N \Rightarrow ON \perp (BSC)$
 $OK \perp (ABC)$

$SL = SN = 4$ (т.к. сферы касаются по окружности) \Rightarrow

$\Rightarrow AK = 12 = AK \Rightarrow KA_1 = 12$; $KA_1 = A_1N$ (т.к. сферы касаются по
окружности)

Ответ: а) 3600
б) -

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

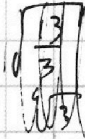
$$3t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$n^4 + \frac{4}{n} = -\frac{1}{3n} - 3$$

$$3n^5 + 9n + 13 = 0$$

$\log(xy)$

$$3 \cdot \left(\frac{3}{3}\right)^5 + 9 \cdot \frac{13}{3} = 13$$



$$x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$y_2 - y_1 \in [0; 18]$$

$$x_2 - x_1 \in [0; 80]$$

$$y_2 - y_1 = 5(8 - x_2 + x_1)$$

$$5(x_2 - x_1) \in [0; 80]$$

$$y_2 - y_1 = 5$$

$$5(x_2 - x_1) \in [-$$

$$\begin{aligned}
 &x > 0 \\
 &x \neq \frac{1}{2} \\
 &2x \neq 5
 \end{aligned}$$

$$x = \varphi + 2\pi k$$

$$1. \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]; k \in [-1; 1]$$

$$10(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = \frac{4\pi + 4\pi k}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} k$$

$$3t(t^4 + 3) = 13$$

$$\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = -2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$t^5 + 3t + n^5 + 3n = 0$$

$$(t+n)(t^4 + n^4) = 0$$

$$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; 0]; k \in [0; 1]$$

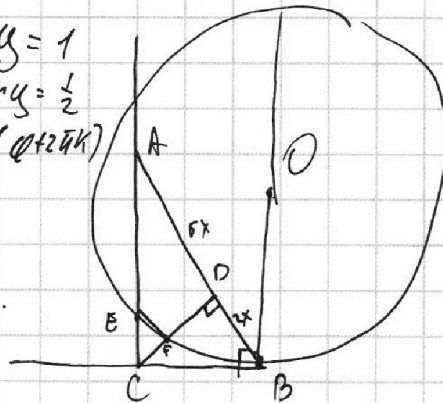
$$2xy = 1$$

$$ky = \frac{1}{2}$$

$$10(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} k$$

$$x = \dots$$

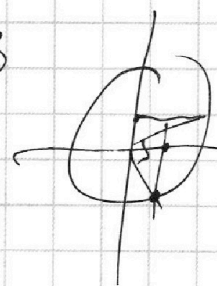
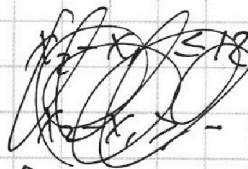


$$\frac{AS}{AD} = \frac{SH}{\pi}$$

$$y^2 =$$

$$H = \frac{5 \cdot 16}{1}$$

$$\tan \alpha = \frac{80}{16} = 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

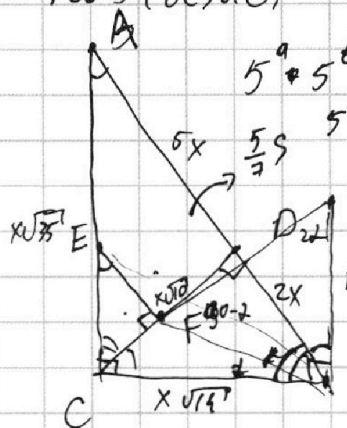
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \text{НОД}(ab, bc) &= 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = b \cdot \text{НОД}(a, c) & \varphi \in (0; \frac{\pi}{2}); k \in \mathbb{N}; 13 \\ \text{НОД}(ab, ac) &= 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = a \cdot \text{НОД}(b, c) \\ \text{НОД}(bc, ac) &= 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} = c \cdot \text{НОД}(a, b) \end{aligned}$$

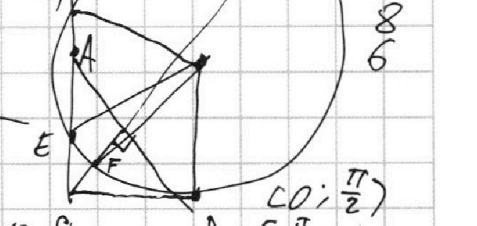
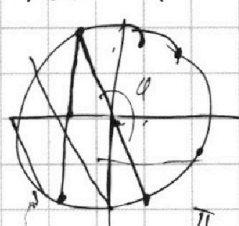


$$\begin{aligned} 5^a + 5^b &\geq 12 \\ 5^b + 5^c &\geq 12 \\ a+b &\geq 12 \\ b+c &\geq 17 \\ a+c &\geq 33 \\ a &\geq 17 \\ b &\geq 0 \\ c &\geq 22 \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{CE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF}$$

$$CD = x\sqrt{10} - \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \varphi)\right)$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq 14 \\ b+c &\geq 20 \\ a+c &\geq 21 \\ a &\geq 8 \\ b &\geq 7 \\ c &\geq 14 \\ a+b+c &\geq 28 \end{aligned}$$



$$a^2 b^2 c^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot k$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3k} - \left(\frac{\pi}{2} - (\varphi - \pi)\right) = -\frac{3\pi}{2} + \varphi$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$$

$$a^2 = 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34} \cdot k$$

$$b^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{10} \cdot n$$

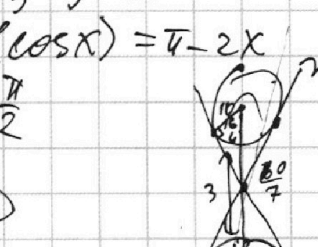
$$c^2 = 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{44} \cdot m$$

$$\begin{aligned} a &= 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{3k} \\ b &= 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{3 \cdot 5 \cdot n} \\ c &= 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{3m} \end{aligned}$$

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-25 \leq x \leq 34$$



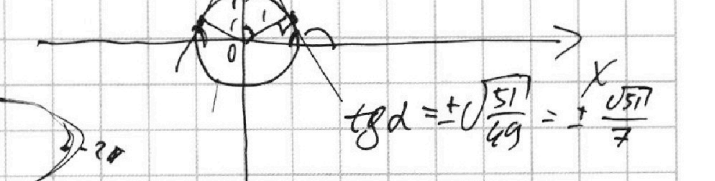
$$\frac{6}{1} = \frac{10-x}{\sqrt{10}x}$$

$$x = \frac{60}{7}$$

$$x = \frac{10}{7}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 3^2$$



$$\begin{cases} \frac{1461}{\sqrt{a^2+9}} \leq 1 \\ \frac{146-301}{\sqrt{a^2+9}} < 6 \end{cases}$$

$$\frac{16}{b^2} < \sqrt{a^2+9}$$

$$d = \arccos \frac{7}{10}$$

$$y_2 = 7 - 5x_2$$

$$y = \frac{a}{3}x - 4b$$

$$\beta = \pi - \alpha$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

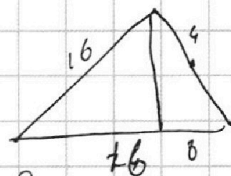


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SL^2 = SP \cdot SA \Rightarrow$$

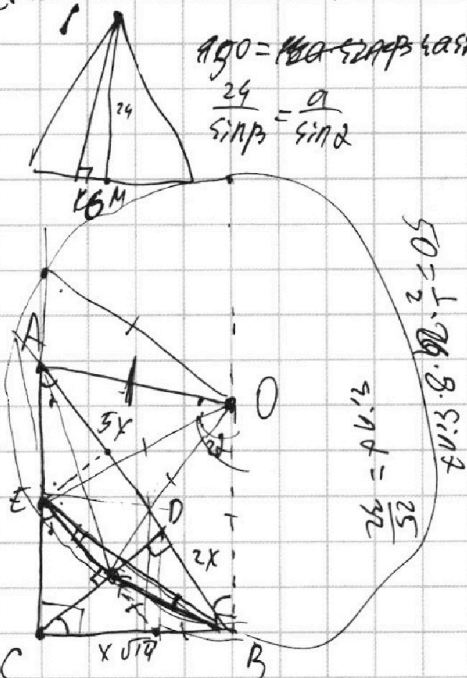
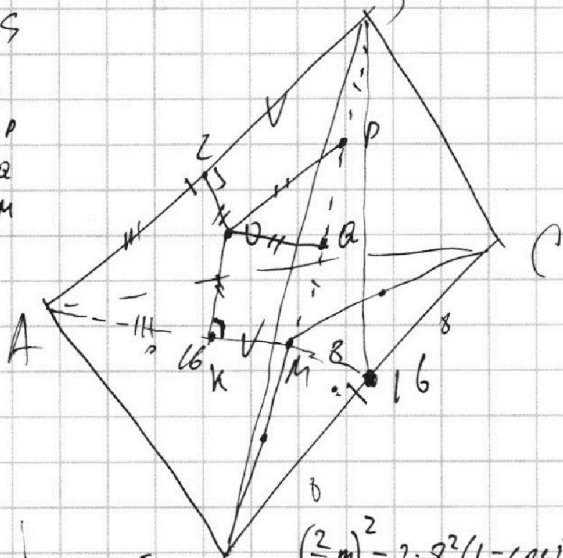
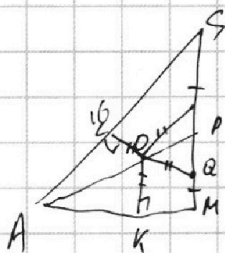
$$MK^2 = MA \cdot MP$$



$$2 \cdot 180 - 2\alpha = 2(180 - \alpha)$$

$$180 = \angle A + \angle B + \angle C$$

$$\frac{24}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha}$$



24

$$\left(\frac{2}{3}m\right)^2 = 2 \cdot 8^2 (1 - \cos \alpha)$$

$$\left(\frac{2}{3}m_2\right)^2 = 2 \cdot 8^2 (1 + \cos \alpha)$$

$$BC^2 = CE \cdot AC$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CE}$$

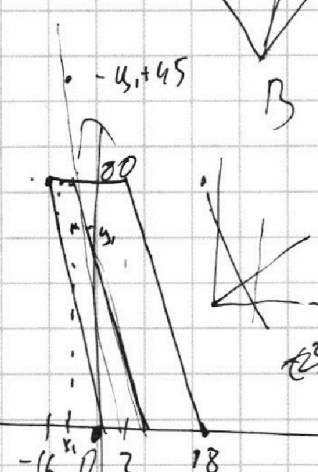
$$(x_1, y_1 + 45) \in y = -5x$$

$$y_1 + 45 = -5x_1$$

$$y_1 + 45 \leq -5x_1 + 90$$

$$y_1 + 5x_1 \geq -45$$

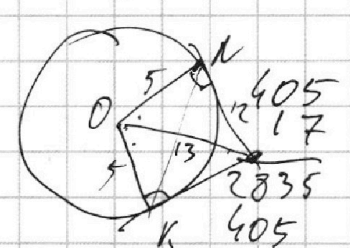
$$y_1 + 5x_1 \leq 45$$



$$5(x_2 - x_1) \in \mathbb{Z}$$

$$(2m)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$



$$y_2 = -5x_2 + 5x_1 + y_1 + 45$$

$$\frac{m}{2} = a^2 + b^2 - c^2$$

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{c^2}{2} = 2 \cdot 24^2 + \frac{16^2}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

