МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

Задача №1

Пусть $st_p(n)$ - степень вхождения p в разложение n на простые. Заметим, что $st_p(nm) = st_p(n) + st_p(m)$

Пусть $st_2(a) = a_2$; $st_3(a) = a_3$; $st_5(a) = a_5$; $st_2(b) = b_2$; $st_3(b) = b_3$; $st_5(b) = b_5$; $st_2(c) = c_2$; $st_3(c) = c_3$; $st_5(c) = c_5$.

По условию $ab \vdots 2^6 3^{15} 5^{11} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$, аналогично

$$\begin{cases} b_2 + c_2 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 16 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

Складывая первые, вторые и треть нер-ва соответственно из каждой системы, получаем:

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \text{т.к. } a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{Z} \\ \text{и } \begin{cases} a_5 + c_5 \geq 28 \\ b_5 \geq 0 \end{cases} \end{matrix} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} st_2(abc) \geq 18 \\ st_3(abc) \geq 30 \\ st_5(abc) \geq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc \vdots 2^{18} \\ abc \vdots 3^{30} \\ abc \vdots 5^{28} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \text{т.к.} \\ (2^{18}, 3^{30}, 5^{28}) = 1 \end{matrix} \right) \Leftrightarrow abc \vdots 2^{18} 3^{30} 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

Пример: пусть $a = 2^4 3^9 5^{15}$, $b = 2^2 3^4 \cdot 5^0$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$, тогда $ab = 2^6 3^{13} 5^{15} \vdots 2^6 3^{15} 5^{11}$; $ac = 2^{16} 3^{26} 5^{28} \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$; $bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$; $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$.

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3

Пусть $y = \arccos(\sin x)$, $y \in [0;\pi] \Rightarrow 0 \le 10y \le 10\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi \Leftrightarrow -9\pi \le -2x \le \pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{2} \le -x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$-4\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi$. Заметим, что $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\cos y = \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow y$ - такое число $\in [0;\pi]$, что $\cos y = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Рассмотрим все возможные случаи расположения $\frac{\pi}{2} - x$

I случай: $-4\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -3\pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x + 4\pi = \frac{9\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -4\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -3\pi \\ 10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9\pi}{2} \le -x \le -\frac{7\pi}{2} \\ 10(9\pi - 2x) = 2(9\pi - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = \frac{9\pi}{2}$ — один из ответов

II случай: $-3\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -2\pi$, тогда $y = -(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = x - \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{cases} -3\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -2\pi \\ 10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7\pi}{2} \le -x \le -\frac{5\pi}{2} \\ 10x - 25\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{17}{6}\pi \end{cases}$$

$\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{15\pi}{6} \le x \le \frac{21\pi}{6}$ $x = \frac{17}{6}\pi$ — один из ответов

III случай $-2\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -\pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -2\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -\pi \\ 10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5\pi}{2} \le -x \le -\frac{3\pi}{2} \\ 25\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2} \\ x = 2\pi \end{cases}$$

$x = 2\pi$ — один из ответов см. на след. листе

Задача №3 (продолжение)

~~IV случай:~~ $\cancel{-2\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -\pi}$ ~~тогда~~ $\cancel{y = -\left(\frac{\pi}{2} - x + \pi\right)}$

$$\cancel{\begin{cases} -2\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -\pi \\ 10\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x \end{cases}}$$

$\widetilde{IV}$ случай: $-\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le 0$, тогда $y = x - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} -\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le 0 \\ 10\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \le -x \le -\frac{\pi}{2} \\ 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{6} \le x \le \frac{9\pi}{6}$ $\quad x = \frac{7\pi}{6}$ — один из ~~тех~~ ответов

$\widetilde{V}$ случай $0 \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} 0 \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi \\ 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le -x \le \frac{\pi}{2} \\ 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x = -\pi/2$ — один из ответов

Ответ: $x \in \{-\pi/2;\ 7\pi/6;\ 2\pi;\ 17\pi/6;\ 9\pi/2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4 (продолжение)

Заметим, что если $-\frac{5}{6a} \in [k_2; k_1]$, то прямая $-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ не может иметь 4 пересечения с ω_1 и ω_2. Пусть l_3 - прямая с угл. коэф. $k_3 \in [k_2; k_1]$. Проведём прямую $\parallel l_3$ через точку A - l_3'. Пусть B_1, B_2, C_1, C_2 - т. касания как на рисунке. т.к. $k_3 \in [k_2; k_1]$, то l_3' находится в углах $\angle B_2AC_1$ и $\angle B_1AC_2$, => ~~прямая~~ => она имеет не более 1 пересечения с каждой окр., если l_3 лежит выше l_3', то она не пересекает ω_2, аналогично если ниже, то ω_1 => она не может иметь 4 т. пересеч. с ω_1 и ω_2.

Если же $-\frac{5}{6a} \notin [k_2; k_1]$, то достаточно выбрать b такое, что прямая проходит через т. A и она пересечет ω_1 и ω_2 в 4 точках. =>

~~Най~~ Заметим, что $k_2 = -k_1$,

найдём k_1. Заметим, что A - центр гомотетии с коэф. $-\frac{2}{5}$ переводящей ω_1 в ω_2 => $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{5}{2}$ => $AO_1 = \frac{45}{7}$, $O_1B_1 = 5$ => по Т. Пифагора в $\triangle AO_1B_1$: $AB_1 = \frac{20\sqrt{2}}{7}$ => $tg\alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}}$ => $k_1 = tg(90-\alpha) = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ => $k_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$

см. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4 (продолжение)

$$\left[\begin{aligned} &-\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ &-\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{5}{6a} + \frac{4\sqrt{2}}{7} < 0 \\ &\frac{4\sqrt{2}}{7} - \frac{5}{6a} < 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{35 + 24a\sqrt{2}}{42a} < 0 \\ &\frac{24a\sqrt{2} - 35}{42a} < 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; 0\right) \\ &a \in \left(0; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right) \end{aligned}\right.$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

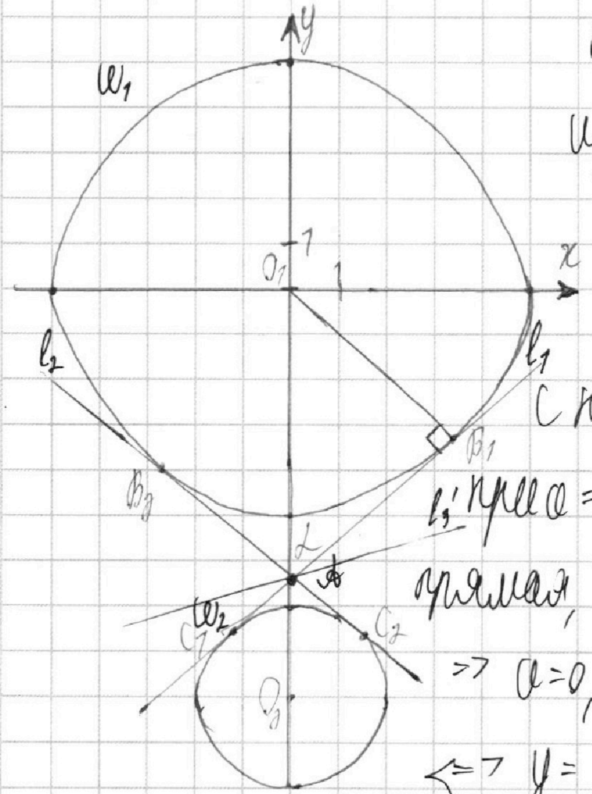
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0 \end{cases}$$



Второе ур-ие задает 2 окр ω_1 и ω_2, изображённые на рисунке, чтобы система имела 4 решения график ур-ия $5x+6ay-b=0$ должен иметь с ними 4 пересечения. Заметим, что l_1 при $a=0$: этот график — горизонтальная прямая, она не может иметь 4 т. пер. с ω_1 и ω_2 $\Rightarrow$ $a=0$, тогда ур-ие $5x+6ay-b=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=-\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a}$ — ур-ие прямой, заметим, что при изменении b угл. коэфф. прямой не меняется $\Rightarrow$ она просто поднимается или опускается, причем меняя b мы можем добиться любого значения $\frac{b}{6a}$ $\Rightarrow$ надо понять при каких угловых коэфф. прямая может иметь 4 пересечения с ω_1 и ω_2

Проведём к ω_1 и ω_2 2 общие касательные l_1 и l_2 как на рисунке. Пусть $A=l_1 \cap l_2$, пусть k_1 — угл. коэфф. l_1, k_2 — угл. коэфф. l_2

см. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5.

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

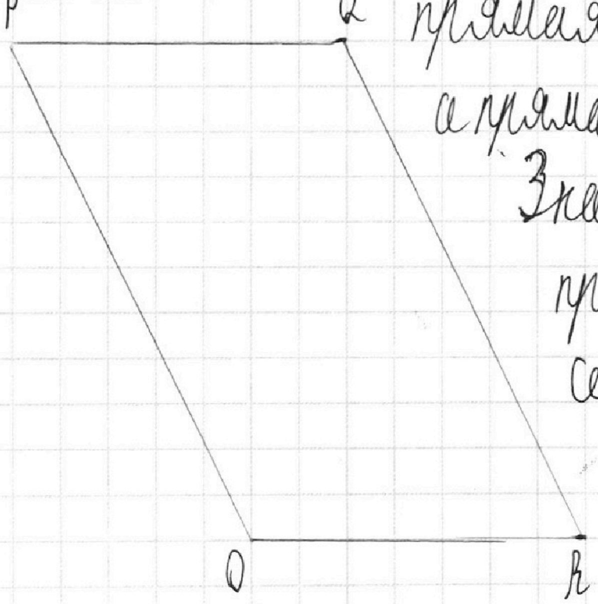
Задача №6

Пусть целая точка - точка с целыми координатами

~~Задач~~ Пусть $6x_1+y_1=k$, тогда

$$\begin{cases}6x_1+y_1=k\\ 6x_2+y_2-k=48\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_1=-6x_1+k \text{ - прямая } l_1\\ y_2=-6x_2+k+48 \text{ - прямая } l_2\end{cases}$$

Заметим, что если $A\in l_1$, $B\in l_2$, то условие для них выполняется. Также заметим что



прямая QR имеет ур-ие $y=-6x+102$, а прямая PO ур-ие $y=-6x$.

$k\in\mathbb{Z}$

Значит для каждого $k\in[0;54]$ прямые l_1 и l_2 будут пересекать PQRO

Заметим что на прямой PO (внутри OPRQ) лежит 16 точек с целыми координатами $(0-(-15)+1)$, также на каждой прямой $y=-6x+t$, где $t \vdots 6$ лежит по 16 целых точек, (т.к. эти прямые - сдвиги прямой $y=-6x$ на целое расстояние) На прямых $y=-6x+t$, где $t \not\vdots 6$ внутри PQRO лежит по 15 целых точек

см. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6. (продолжение)

Назовём парой прямых 2 прямые вида $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$, где $k \in [0; 54]$, $k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что A и B удовл. условию только если A лежат на первой прямой из пары, а B на второй. Также, заметим, что на прямых в одной паре одинаковое кол-во целых точек внутри PQRO, т.к. если ~~k~~ ~~то~~ а $k \vdots 6 \Leftrightarrow k + 48 \vdots 6$. Если на ~~прямых~~ прямых из пары по n точек, то пар (A; B) удовлетв. условию n^2. Заметим, что всего пар прямых 55. Из них ~~на~~ в 10 парах на каждой прямой по 16 целых точек внутри PQRO, а в остальных 45 парах на каждой прямой по 15 целых точек внутри PQRO ⇒ ~~всего~~ искомое кол-во пар точек равно

$$10 \cdot 16^2 + 45 \cdot 15^2 = 2560 + 10125 = 12685$$

Ответ: 12685