



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



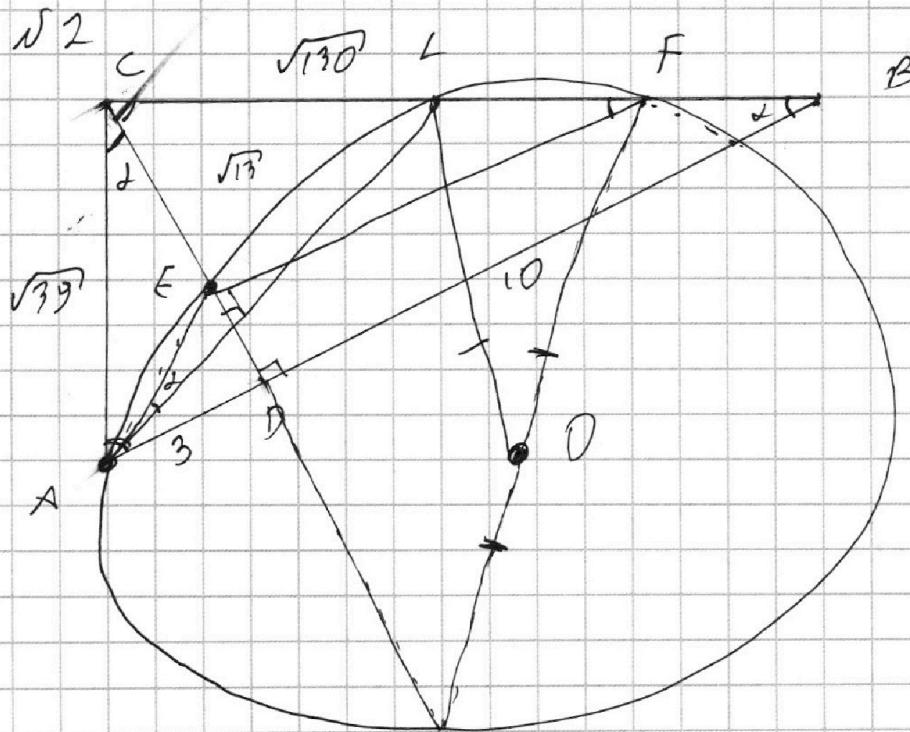
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \frac{AB}{BD} = \frac{1}{3} = \frac{AD+BD}{BD} = \frac{6}{3} \Rightarrow AD = 0,3BD$$

$$\Rightarrow BD = 10 \Rightarrow AD = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{39}; \quad BC = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{130}$$

2)  $\angle FFE = \angle CFE = \angle CBD; \angle BCD - \text{двойной} \Rightarrow$   
 $\triangle CFE \sim \triangle CBD$  (по 2-му ул-му)  $\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = k$

$$3) S_{\triangle CAD} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{3}{2} CD$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{CD \cdot BD}{2} \cdot k^2 = 5k^2 CD$$

$$\frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{\frac{3}{2} CD}{5k^2 CD} = \frac{3}{10k^2}$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{13}$$

$$CE \cdot EF = AC^2 = 39 \Rightarrow \frac{CE}{EF} = \frac{39}{EG^2} = k^2$$

$$\Rightarrow \angle GEA = \angle EAC = \alpha, \angle EAL = \angle EFL = \angle AEC = \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Окн  $(0; 4) \cap BC : F \Rightarrow BC$ -кос.,  $\Rightarrow CF = AC$  (свойства  
кос.)  $\Rightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{130}} = k = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$   $\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 3} = 1$

Ответ:  $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = 1$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

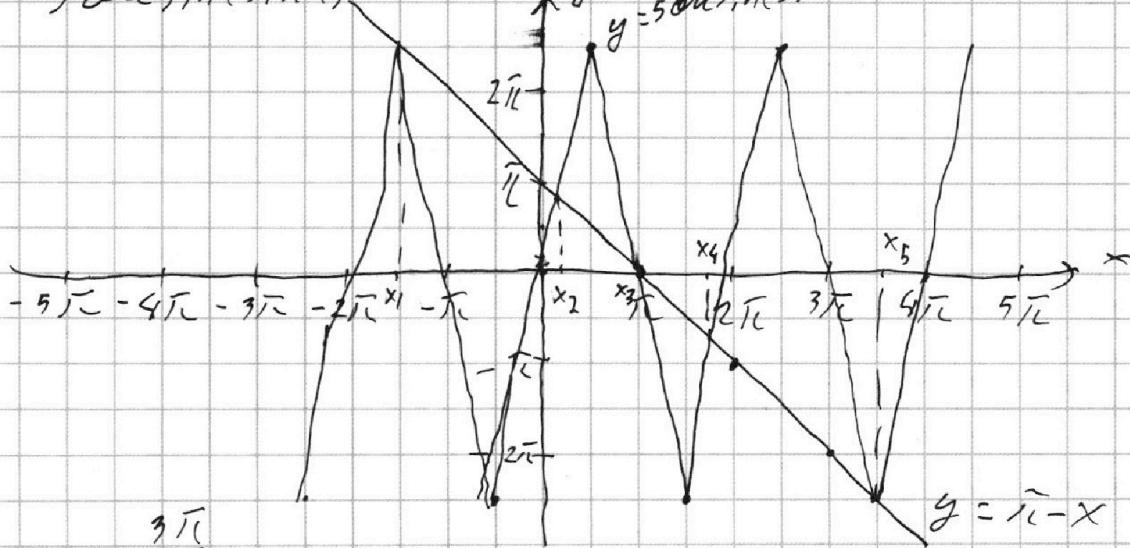
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos t = \frac{\pi}{2} - \arcsin t$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \frac{\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{5\pi}{2} + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$



$$x_1 = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_3 = \pi$$

$$x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

$$x_5 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{3\pi}{2}; x_2 = \frac{\pi}{6}; x_3 = \pi; x_4 = \frac{11\pi}{6}; x_5 = \frac{3\pi}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

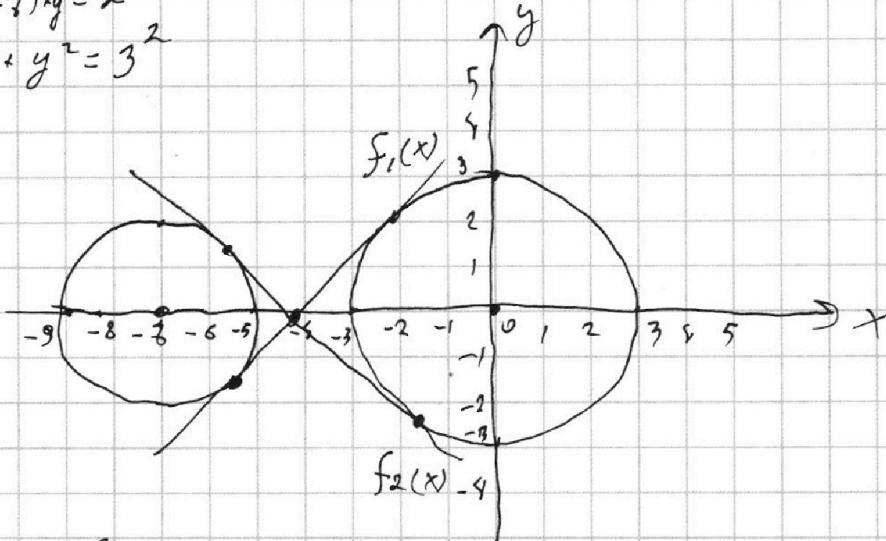
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\begin{cases} x + 3ay - 8b = 0 \\ (x^2 + 17x + y^2 + 8f)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 8b = 0 \\ (x+3)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$



$x + 3ay - 8b = 0$  — серий прямых II прямой  $xy=0$  очевидно, будет хотя бы одно в, при котором будет 4 решения, если наимен прямой будет меньше либо у общей внутренней касательной  $f_1(x)$  или  $f_2(x)$ , ~~она скажет т.к. тогда~~ будем возможно одно решение переходит обе окр.

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = kx + b \\ (x+3)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\text{иначе 1 реш.} \Rightarrow (k^2 + 1)x^2 + 2kbx + b^2 - 9 = 0 \quad \text{и} \\ (k^2 + 1)x^2 + 2(kb + 8)x + b^2 + 85 = 0 \quad \text{иначе 1 корень} \\ D = 0 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 8k^2\beta^2 - (k^2+1)(\beta^2-9) = 0 \\ 8(k\beta+8)^2 - 8(k^2+1)(\beta^2+8\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta^2 = 9(k^2+1) \quad (1) \\ 85k^2 + 6\beta^2 = 8 + 18k\beta \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ в } (2): 85k^2 + 9k^2 + 9 = 8 + 18k \cdot 3 \sqrt{k^2+1}$$

$$(5k^2+5)^2 = 42^2 k^2 (k^2+1)$$

$$k^2 = \frac{1224k^2 + 1176}{2 \cdot 12 \cdot 96} = \left[ \frac{\frac{48}{6^2 \cdot 8^2}}{\frac{2500}{6^2 \cdot 8^2}} \right] \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{12} \\ k_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \\ k_3 = -\frac{5\sqrt{6}}{12} \\ k_4 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \end{cases}$$

у внутренних кас. касаются симметрично  
одинаково дальше  $\Rightarrow k \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$

$$K \in 2\alpha \cos \alpha - 3\beta = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3\alpha} = \frac{1}{3\alpha} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$$
$$\alpha \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$$

Однако: при  $\alpha \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$\log_3^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$3/\log_3^4(6x) = t$$

$$\frac{4}{t} - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad 1 \cdot 2t \neq 0$$

$$2t^5 + 8t - 3 = 0$$

$$f(t) = 2t^5 + 8t - 3$$

$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0 \Rightarrow f(t)$  - монотонно возрастает  
 $\Rightarrow$  если есть реш., то оно одн.

$$\log_3^4 y + 6 \log_3 y = \log_3^4(\frac{y^5}{3}) - 4 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_3^4 y + \frac{6}{\log_3 y} = \frac{5}{2 \log_3 y} - 4$$

$$3/\log_3 y = n$$

$$n^5 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4 \quad | \cdot 2n \neq 0$$

$$2n^5 + 8n + 7 = 0$$

$$g(n) = 2n^5 + 8n + 7$$

$g'(n) = 10n^4 + 8 > 0 \Rightarrow g(n)$  strictly increasing  
то есть одн.

Тогда  $t_1$  - решение  $2t^5 + 8t - 3 = 0$

$$\text{подставим } (-t_1) \Rightarrow 2(-t_1)^5 + 8(-t_1) - 3 = 0$$
$$2t_1^5 + 8t_1 + 7 = 0 \Rightarrow$$

решение  $2n^5 + 8n + 7 = 0$  является  $-t_1 \Leftrightarrow$

$$n_1 = -t_1$$

$$\log_3 y = -\log_3 6x$$

$$y = \frac{1}{6x} \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{6}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Если взять какую-нибудь т. А( $x_1; y_1$ ), то имеется  
всех т. В( $x_2; y_2$ ) удовлетворяющих условию

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 50 \text{ это при就意味着, т.к. если}$$

$x_2 - x_1 = \Delta x, y_2 - y_1 = \Delta y \Rightarrow \Delta y = 50 - \Delta x$ , значит эта  
пункт параллельна стороне параллел.

$$\Delta x \in [-68; 68] \Rightarrow \Delta x \in [-7; 24]$$

$$\Delta x \in [-7; 19] \Rightarrow \Delta x \in [-7; 19] \Rightarrow \Delta y \in [-36; 68] \Rightarrow$$

если взять т. А( $x_1; y_1$ )  $\Rightarrow$  т. В лежит на отрезке

с концами (-7; 68) и (19; -36). Если брать т. А на

нижней стороне параллел., то будем 18 пар

для каждого торка, а торах можно взять 10  $\Rightarrow$   
180 пар.

180 пар. Если же брать торки больше на <sup>всего</sup> 8 концах между  
ними  $\leq 36$ , то пар торе будем  $180 \Rightarrow$  у нас

$180 \cdot 37$  пар. Если брать еще больше, то как в торах  
будет если брать т.А больше, то имеется

т.В будем состоящимся параллельным пере-  
носом на верхней т. {-7; 5} и количество пар  
не будет меньше до единственного боком 36



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

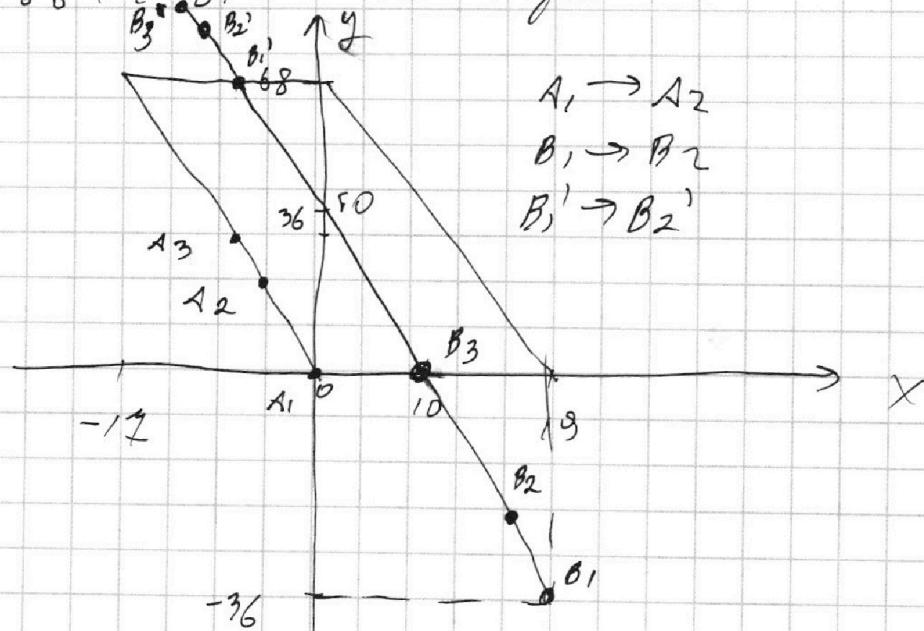
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к. отрезок всё ещё будет ~~пересекать~~ пересекать  
обе стороны параллелограмма, а выше для  
каждой из 10 точек будет уменьшаться на 7,

т.к. часть отрезка в параллелог. будет умень-  
шаться  $\Rightarrow$  всего под точек  $180 \cdot 33 + 18 \cdot 10 + 16 \cdot 10 \dots$

$$\dots + 10 \cdot 10 = 180 \cdot 33 + 10(18 + 16 + \dots + 1) = 10(18 \cdot 33 + \frac{27 \cdot 8}{2})$$

$$= 10(666 + 108) = 7740 \text{ пар.}$$



Ответ: 7740 пар.



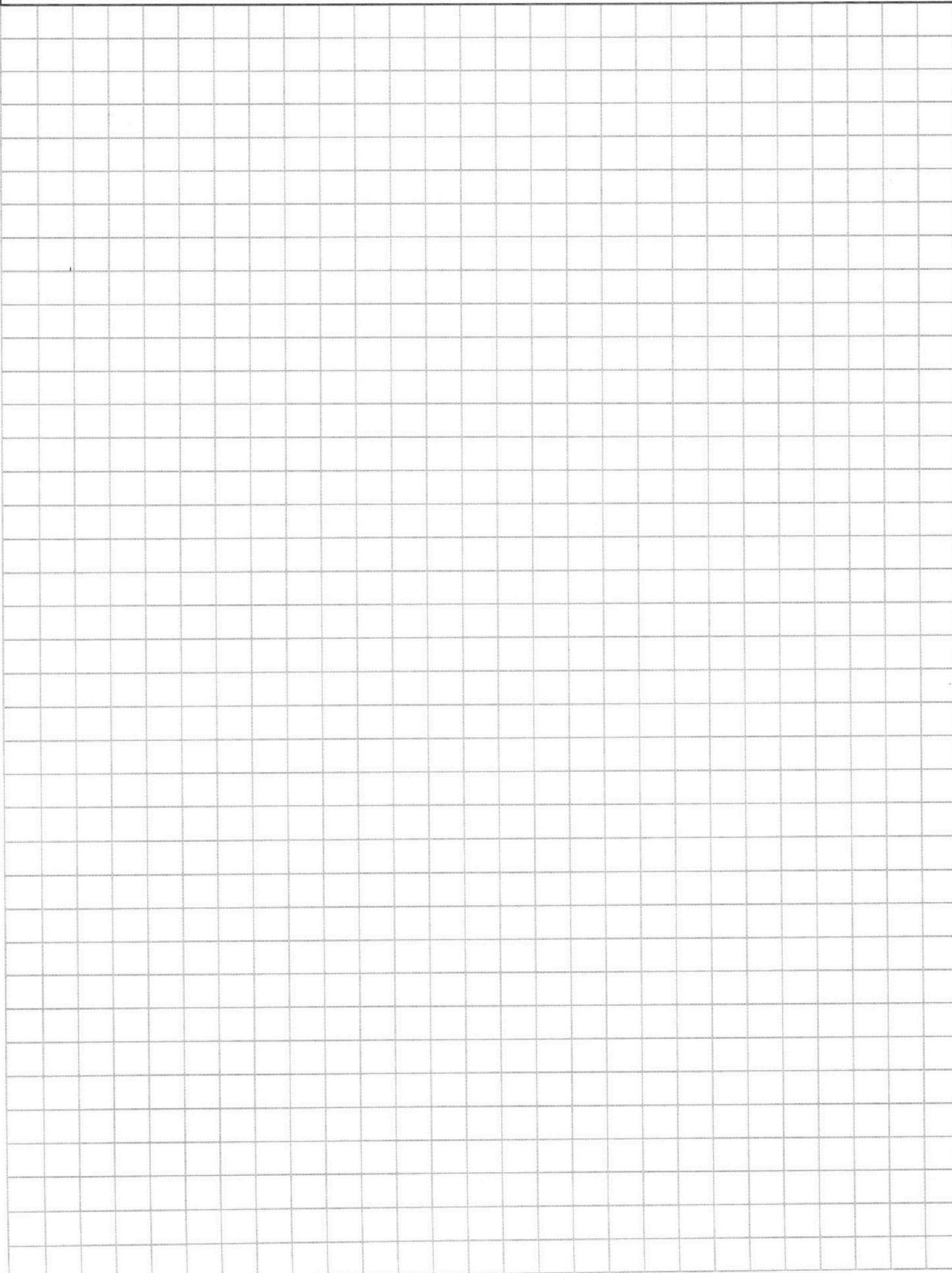
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

 МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

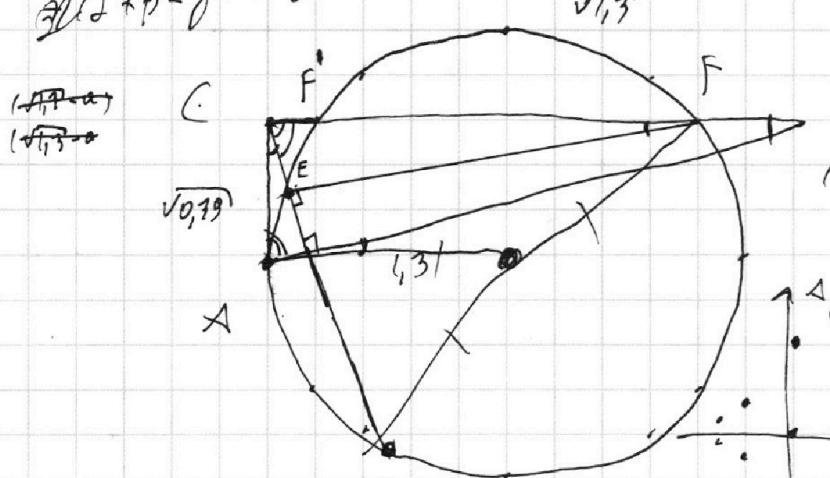
- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha_1 \alpha + \beta - \gamma = \alpha$$



B

(-19, 68) (2, 68)

$$18 - n = 9$$

$$(9 - n)^2 = 9$$

$$\frac{108}{4}$$

$$50x + 4y = 40 \leq 50 - 4x \leq 68$$

$$4y \geq 4x - 7$$

$$x \in [-7, 9]$$

1, 2  
10, 11, ..., 19

$$50x + 4y = 40$$

$$4y \leq 50 - 50x$$

$$50x + 4y = 40 \leq 50 - 4x \leq 68$$

$$4y \geq 4x - 7$$

$$x \in [-7, 9]$$

$$f(68)$$

$$40$$

$$27$$

$$-7$$

$$-68$$

$$-1 - 1$$

$$-6 - 2$$

$$\dots$$

$$10 -$$

$$10 - n = -8$$

$$13$$

$$-7$$

$$-36$$

$$-13$$

$$\dots$$

$$10 -$$

$$x + 10 = 10$$

$$0 - 1 108$$

$$1 - 2$$

$$9 -$$

$$23$$

$$4$$

$$108 - 10$$

$$0 - 1$$

$$1 - 2$$

$$9 -$$

$$23$$

$$4$$

$$108 - 10$$

$$0 - 1$$

$$1 - 2$$

$$9 -$$

$$23$$

$$4$$

$$108 - 10$$

$$0 -$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

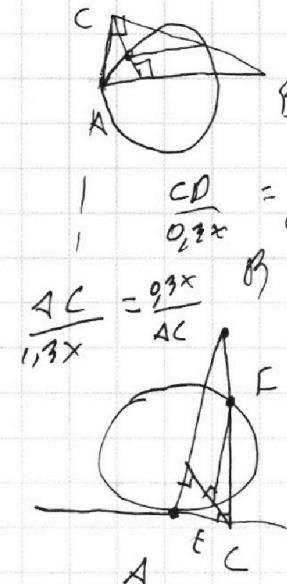
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

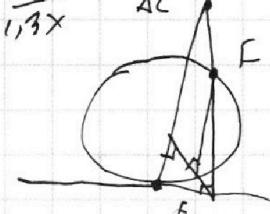
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CD}{O_1 x} = \frac{\alpha}{CD}$$

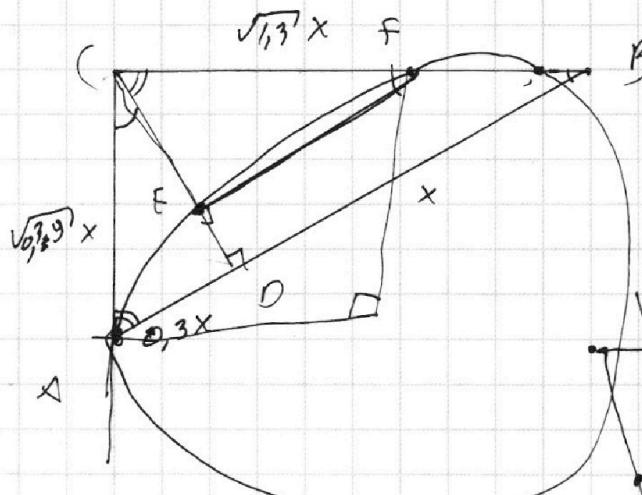
$$\frac{AC}{1,3x} = \frac{9x}{AC}$$



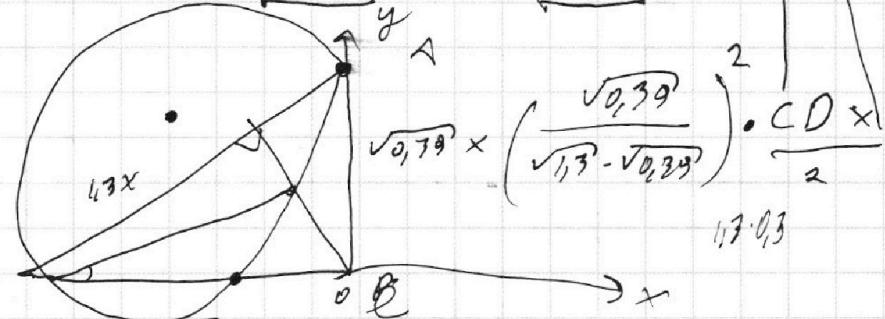
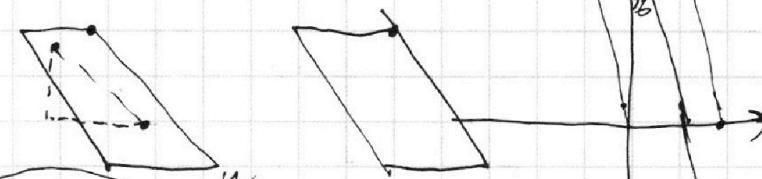
$$\frac{BD+AD}{BD} = \frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$AD = 0,3 BD$$

$$AC = \sqrt{0,39} x$$



$$\frac{AD}{CD} = \frac{x}{\sqrt{0,39} x}$$



$$\frac{\sqrt{0,39}}{1,3} \cdot \left( \frac{\sqrt{1,3} - \sqrt{0,39}}{2} \right) \cdot \frac{CD x}{2}$$

$$13 \cdot 0,3$$

$$(x+z)^2 + (y - \sqrt{0,39} x)^2 = z^2$$

$$x^2 + 2zx + z^2 + y^2 - 2yz + 0,39x^2 = z^2$$

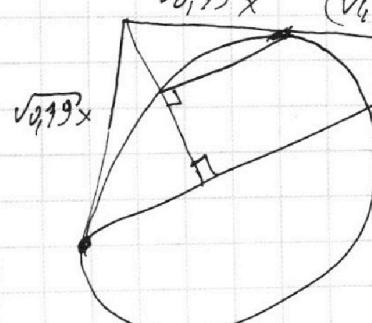
$$1,39x^2 + 2zx = 0 \quad x = \frac{-2z}{1,39} \quad \frac{0,3(\sqrt{1,3} - \sqrt{0,39})}{1,39}$$

$$(\sqrt{1,3} + \sqrt{0,39}) \times \frac{0,3}{1,39}$$

$$\frac{0,1}{0,13}$$

$$\frac{10}{13}(9,81 - 2,6\sqrt{0,39})$$

$$0,1,2, \dots, 1^M$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + (9x + y)^2 + 85 = 0$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 - 9 = 0$$

$$4k^2 b^2 - 8(k^2 + 1)(b^2 - 9) = 0$$

$$k^2 b^2 = k^2 b^2 - 4k^2 + b^2 - 9$$

$$b^2 = 9(k^2 + 1)$$

38+5

21  
6  
1

$$x^2 + (9x + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 + 85) = 0$$

6·2·3·32

$$(k^2 + 1)x^2 + 2(kb + 9)x + b^2 + 85 = 0$$

$$(kb + 9)^2 = (k^2 + 1)(b^2 + 85)$$

$$k^2 b^2 + 18kb = k^2 b^2 - 4 + 85k^2 + b^2$$

12°

42  
82  
84

$$85k^2 + b^2 = 9 + 18kb$$

168 1864

580

$$35k^2 + 5 = 18k \cdot 3 \sqrt{k^2 + 1}$$

1224 1224

$$58^2 k^4 + 580k^2 + 25 = 72^2 k^4 + 82^2 k^2$$

1224 4896 9+8+5

$$12 \cdot 96 k^4 - 1224 k^2 + 25 = 0$$

4896 9+8+5

$$1224^2 - 12 \cdot 9600$$

1224 4896 9+8+5



- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$OB = \frac{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^2} \cdot 2^3 \cdot 5^{15} : 2^3 \cdot 5^{11}$$

$$\begin{array}{l} B=5 \\ 2=3 \\ 3=0 \end{array}$$

$$19 \cdot 4 \quad 18 \quad C$$

$$\frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$\frac{AD}{BD} \cdot k = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

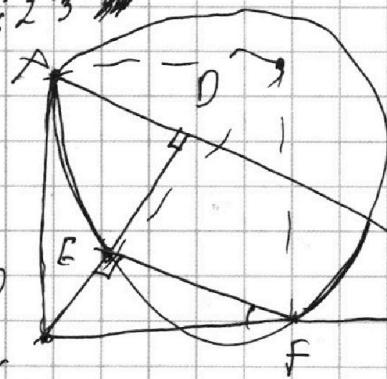
$$3^{11} = 3^{\alpha + \beta + 2}$$

$$\frac{AD}{AC} = k_1$$

$$k_2 =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & 3 & 5 \\ \hline x & 7 & 0 & 14 \\ \hline y & 13 & 15 & 18 \\ \hline z & 14 & 17 & 53 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta x \leq 19 \\ \Delta y \leq 68 \end{array}$$

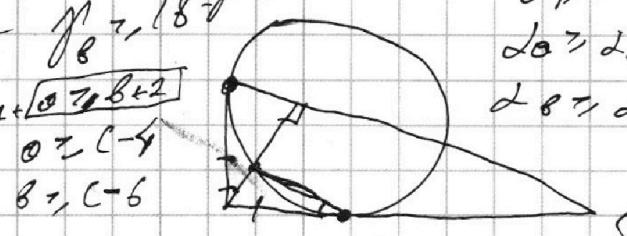


$$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \alpha + c = 11 \\ \beta + c = 15 \\ 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^3 \cdot 5^2) \\ g = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ p = 2^7 \cdot 5^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^7 \cdot 2 \\ BC = 2^{13+2} \\ AC = 2^{19+2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \angle B = \angle A + (\gamma - 2) \\ \angle A = \angle C + (\alpha - \gamma) \\ \angle C = \angle B + (\beta - \alpha) \\ \alpha = 2^4 \\ \beta = 2^3 \\ \gamma = 2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 + 14 + 18 \\ 6 + 8 + 9 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} d\alpha + d\beta = x \\ 3^7 = 3^{\alpha + \beta + 2} \\ 8 = C-6 \end{array}$$

$$\frac{AD}{AC} = k_1$$

$$d\beta + d\gamma = y$$

$$9 = C-2$$

$$\angle A = \angle D + 6$$

$$\angle B = \angle C - 4$$

$$\angle C = \angle B - 4$$

$$\angle D = \angle C - 28$$

$$\angle A = \angle D - 4$$

$$\angle B = \angle C - 28$$

$$\angle C = \angle B - 4$$

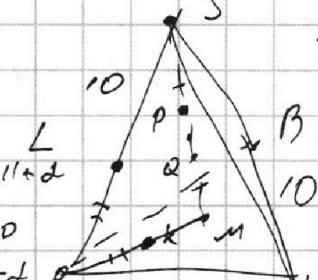
$$\angle D = \angle C - 28$$

$$\alpha = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\beta = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\gamma = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\delta = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$



$$\begin{array}{l} 21 + 7 + 9 \\ \Delta x = 0 \\ \Delta y = 0 \\ \Delta x = 1 \\ \Delta y = 36 \\ \Delta x = 2 \\ \Delta y = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta x = 10 \\ \Delta y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 14 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} AB = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ BC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \\ AC = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 18 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \\ \beta_1 &= 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \\ \gamma_1 &= 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 18 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 21 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 37 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 3 & \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 14 & \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 14 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 3 & \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 14 & \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 + \sin \beta_1 + \sin \gamma_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \sin \alpha_1 \sin(\beta_1 + \gamma_1) &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha_1 \sin(\beta_1 + \gamma_1) &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= 14 \end{aligned}$$



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5 | 3 | 4

$$\alpha\beta: 2^{13} 3^{15} 5^{14} \quad \alpha\gamma: ?$$

$$\beta\gamma: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$\alpha\gamma: 2^{15} 3^{18} 5^{13}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 7 & (1) \\ \alpha + \gamma \geq 13 & (2) \\ \beta + \gamma \geq 14 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 7 & (1) \\ \alpha + \gamma \geq 13 & (2) \\ \beta + \gamma \geq 14 & (3) \end{cases}$$

$$\alpha\beta \geq 2^{13} 3^{14} (1) \text{ и } (2)$$

$$\beta\gamma \geq 2^{13} 3^{18} (1) \text{ и } (3)$$

$$\alpha\gamma \geq 2^{15} 3^{13} (2) \text{ и } (3)$$

$$\begin{cases} \alpha\beta \geq 2^{13} 3^{14} (1) \text{ и } (2) \\ \beta\gamma \geq 2^{13} 3^{18} (1) \text{ и } (3) \\ \alpha\gamma \geq 2^{15} 3^{13} (2) \text{ и } (3) \end{cases}$$

$$\alpha + \beta \geq X$$

$$\alpha + \gamma \geq Y \Rightarrow$$

$$\beta + \gamma \geq Z$$

$$\alpha \geq \alpha + (\gamma - y)$$

$$\beta \geq \beta + (x - z)$$

$$\gamma \geq \gamma + (y - z)$$

$$\begin{cases} \alpha \geq \alpha + 6 \\ \beta \geq \beta + 6 \\ \gamma \geq \gamma + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \geq \beta + 6 \\ \gamma \geq \gamma + 6 \end{cases}$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 13$$

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 10}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 10$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta = 4$$

$$\gamma = 3$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 90$$

$$(k^2+1)x^2 + 2kbx + b^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + (kx+b)^2 = 9$$

$$x \neq \frac{1}{6}, x > 0 \quad x^2 + 15x + k^2x^2 + 2kbx + b^2 - 9 = 0$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$10n^4 + 8 \\ 4k^2b^2 - 4(k^2+1)(b^2-9) \\ = 0$$

$$2t^5 + 8t - 4 = 0$$

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4$$

$$2n^5 + 8n + 4 = 0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\log_2(6x) = -\log_2(y)$$

$$\frac{12\pi}{6} = \pi$$

$$1604$$

$$\frac{34+14}{2}$$

$$\begin{cases} \beta \geq \beta - 4 \\ \beta \geq \beta - 6 \end{cases} \quad \beta \in \begin{cases} \beta \geq \beta - 4 \\ \beta \geq \beta - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \geq \beta - 4 \\ \beta \geq \beta - 6 \end{cases} \quad \beta \in \begin{cases} \beta \geq \beta - 4 \\ \beta \geq \beta - 6 \end{cases}$$

$$\beta \geq \beta$$

$$\beta_c = 24$$

$$\beta_a = 20$$

$$\beta_b =$$

$$(9(k^2+1) = b^2)$$

$$\beta_c = 24$$

$$\beta_a = 20$$

$$\beta_b =$$

$$\beta_c = 24$$

$$\beta_a = 20$$

$$\beta_b =$$