



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание № 1

Решение x_a - степень в a -ой 2 входит в разложение а на иррациональные

x_b - степень в b -ой 2 входит в разложение б на иррациональные

Аналогично x_c

y_a - степень в a -ой 3 входит в разложение а на иррациональные

Аналогично y_b, y_c

z_a - степень в a -ой 5 входит в разложение а на иррациональные

Также \Rightarrow

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \Rightarrow x_a + x_b \geq 9 \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow$$

$$\cancel{x_b} + x_c$$

$$y_a + y_b \geq 28, 10$$

$$z_a + z_b \geq 28, 10$$

$$x_b + x_c \geq 14$$

$$y_b + y_c \geq 13$$

$$z_b + z_c \geq 13$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow x_a + x_c \geq 19$$

$$(y_a + y_c) \geq 18 \Rightarrow$$

$$z_a + z_c \geq 30$$

$$2(x_a + y_b + z_c) \geq 28 + 14 = 42$$

$$x_a + x_b + x_c \geq 23$$

$$2(y_a + y_b + y_c) \geq 23 + 18 = 41 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 20, 5 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_a + y_b + y_c \geq 71, \text{ т.к. } y_a \in \{10, 15, 20\} \text{ и } y_b \in \{10, 15, 20\}$$

$$\rightarrow y_a \in \{10, 15\}$$

$$y_b \in \{10, 15\}$$

$$y_c \in \{10, 15, 20\}$$

$$\text{Максимально } y_a + y_b + y_c \geq \frac{13+30}{2} = 26,5$$

$$y_a + y_b + y_c \geq 27$$

$$\text{а если } \begin{cases} y_a + y_b + y_c & \\ 10 + 15 + 20 & \\ \geq 45 & \end{cases} \Rightarrow \text{достигается при:}$$

$$\begin{array}{c} 21 \ 21 \ 27 \\ \cancel{2} \ 3 \ 5 \end{array} \quad \text{достигается при:}$$

$$\text{Одно: } \text{Решение } y_a + y_b + y_c = 27 \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } y_c \geq 10$$

$$y_b \geq 15$$

$$y_a \geq 7,5$$

Чтобы $y_a + y_b + y_c \leq 27$, а также

$$y_a \geq 27 - y_b - y_c \geq 27 - 20,5$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_a + y_b \geq 10 \\ y_b + y_c \geq 13 \\ y_a + y_c \geq 18 \end{array} \right. \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} 7a + 7b + 7c \geq 27 \\ 7a + 7b \geq 10 \\ 7b + 7c \geq 13 \\ 7a + 7c \geq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 7a \geq 0 \\ 7b \geq 0 \\ 7c \geq 0 \end{array}$$

$7b + 7a + 7c \geq 30$. При $7a = 7c = 15, 7b = 0$
система (2) верна \Rightarrow

$$\begin{aligned} abc &: 2^{71} 3^{71} 5^{30} \Rightarrow \\ abc &\geq 2^{71} 3^{71} 5^{30}, \text{ это} \\ \text{значит} &a = 2^7 3^8 5^{15} \\ b = &2^2 3^3 5^0 \\ c = &2^{12} 3^{10} 5^{15} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Ober: } (abc)_{\min} = 2^{71} 3^{71} 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При $y_a + y_b + y_c = 21$ надо же подобрать
значения y_a, y_b, y_c , такие, что $y_a, y_b, y_c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
и выполняющие (1), т.к. тогда

установим $\begin{cases} y_a + y_b = 11 \\ y_b + y_c = 13 \\ y_a + y_c = 18 \end{cases}$

$$y_a + y_b + y_c \geq \frac{10 + 13 + 18}{2} = 20.5$$

$$y_a, y_b, y_c \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 21$$

аналогично

$$\cancel{z_a + z_b + z_c \geq 27} \Rightarrow \cancel{z_a + z_b + z_c \geq 30}, \text{ т.к. } \cancel{z_a + z_b + z_c \geq 27}$$

$$\cancel{abc : 2^1 3^2 5^3}, \text{ т.к. } \cancel{y_a + y_b + y_c = 21}, \text{ т.к. } \cancel{z_a + z_b + z_c = 27}$$

$$\cancel{\frac{2^1 3^2 5^3}{2^1 3^2 5^3} = 1}, \text{ т.к. } \cancel{z_a + z_b + z_c = 27}$$

после $a = \cancel{2^1 3^2 5^3}$

$$b = \cancel{2^2 3^3 5}$$

$$c = \cancel{2^{12} 3^{10} 5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

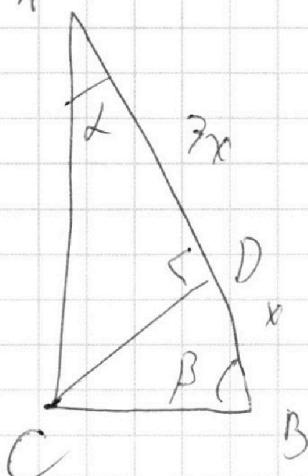
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

A



Задание 2

$$AB : DB = 3x : x = 3 : 1$$

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\triangle BCD \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow$$

$$BC^2 = BD \cdot AB = 4x^2 \Rightarrow$$

$$BC = 2x \Rightarrow$$

$$\angle d = \angle 2 = 30^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание №3

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$
$$x + \frac{\pi}{2} = t$$

$$\arcsin(\sin t) = t$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq \arcsin(\sin t) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{Нужно } t \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin t) =$$
$$+e7\pi \Rightarrow$$

$$t = +e7\pi \quad t + 10\pi = t$$

$$t = -\frac{\pi}{2} \quad 4t = -10\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{2} \Rightarrow t = -3\pi$$

$$\text{Аналогично } t \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow t = 7\pi$$

$$\text{Всему неравенству } \varphi - t \leq f(t) = t \text{ и}$$
$$g(t) = \arcsin(\sin t)$$

$$\text{Нужно } t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\arcsin(\sin t) = -\pi - t \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-5x - 5t = t$$

$$6t = -5\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$$

Несложно $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$$t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Несложно $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\arctan(\tan t) = t \Rightarrow$$

$$5t + x + \pi = 0 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

Ober: $x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{2}\right\}$

Ober: $x \in \left\{-3\pi; 2\pi; -\frac{\pi}{2}\right\}$

Ober: $x \in \left\{-3\pi; 2\pi; -\frac{\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

окружености в 7 точках не сечь не
бывает

$\triangle OQP \sim \triangle OO_1Q \Rightarrow O_1$ делит OO_1 в
отношении $3:2 \Rightarrow$

$$O_1\left(\frac{18}{5}, 0\right)$$

если $y = kx + b$, проходящая
любой прямой, такая что ее чрез O ,
 $\begin{cases} \tan \angle_2 \geq k & \text{не разделяет окружность} \\ \tan \angle_1 \leq k & \text{сама в 7 точках} \end{cases}$

$$\angle_1 = \arcsin \frac{\frac{2}{\sqrt{18}}}{\frac{10}{\sqrt{18}}} = \arcsin \frac{10}{12} =$$

$$\arcsin \frac{5}{6} \angle = \alpha, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{36}} \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{25}{11}}$$

$$\angle_2 = \pi - \arcsin \frac{3}{\sqrt{18}} = \pi - \arcsin \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$\tan \angle_2 = -\sqrt{\frac{25}{11}} \Rightarrow$ условий кадр
прямых буде $\alpha_1 + \alpha_2 = 3\pi - 3\alpha = 0$

$$k = -\frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-2\sqrt{\frac{25}{11}}, 2\sqrt{\frac{25}{11}}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

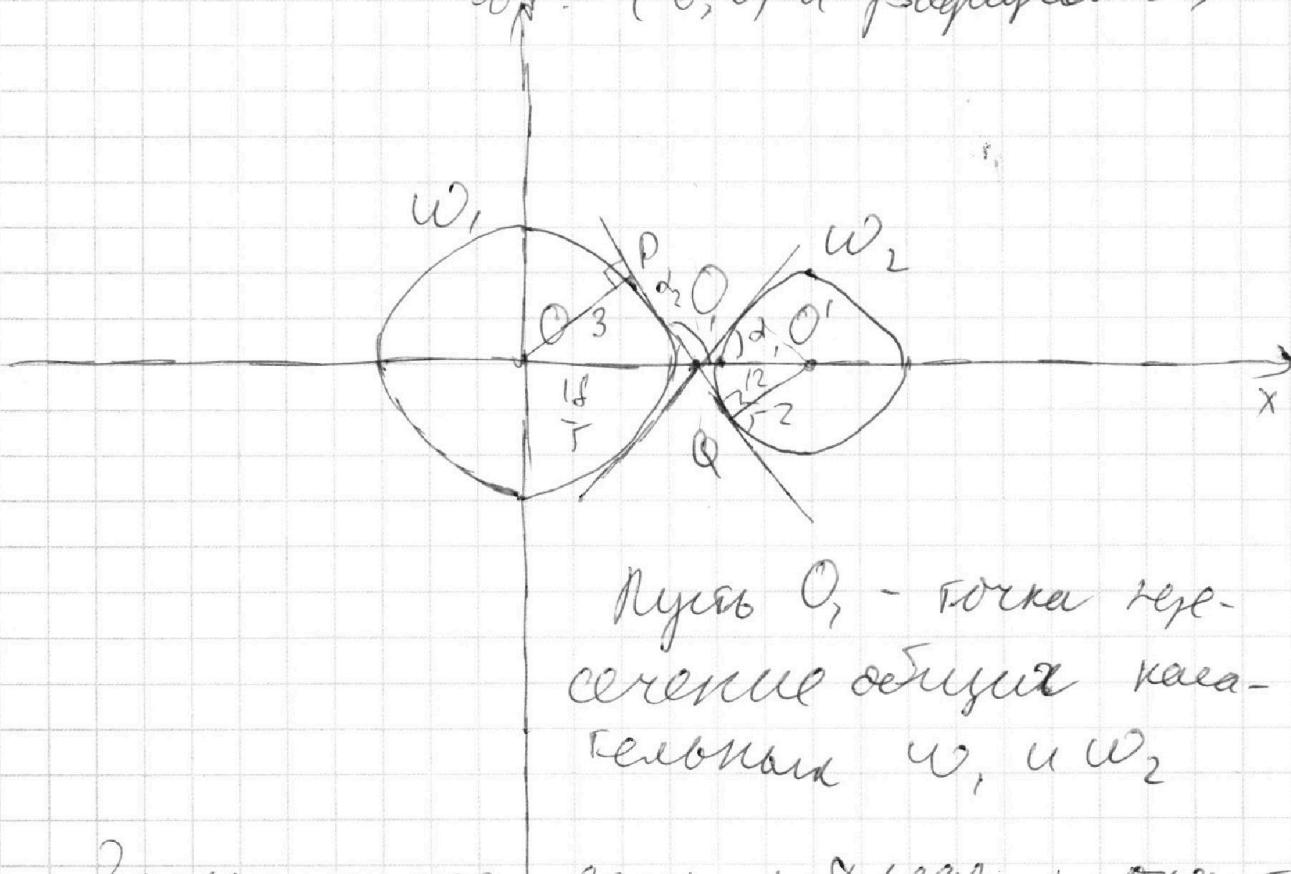
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание №4

График уравнение $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 17x + 32) = 0$

~~Определите~~ - 2 окружности:

Одна из них - с центром в $(0, 0)$
и радиусом 3, другая - с центром
 $(6, 0)$ и радиусом 2 \Rightarrow



Центр O_1 - точка тан-
генциальная обеих ка-
левных W_1 и W_2

Заметим, что линия прямая проходит
через O_1 и не разрезает обе
окружности в 2 точках, то и ка-
левая прямая, ей параллельная, не



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание № 5

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \\ \log_3^u (\sqrt[8]{y}) + 2 \log_{\sqrt[8]{y}} 3 = \log_{75y^2} 3^{11} - 8 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} y > 0 \\ x > 0 \end{array}, \text{ нужно } u = \log_3 x \\ v = \log_3 \sqrt[8]{y} \Rightarrow$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} u^4 + \frac{35}{u} + 8 = 0 \\ v^4 - \frac{35}{v} + 8 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} u^5 + 3,5 + 8u = 0 \quad f(u) = u^5 + 3,5 + 8u \\ v^5 - 3,5 + 8v = 0 \quad g(v) = v^5 - 3,5 + 8v \end{array} \right.$$

$$f'(u) = 5u^4 + 8 > 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R})$$

$$g'(v) = 5v^4 - 3,5 + 8v > 0 \quad (\forall v \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$f(u)$, $g(v)$ - возрастающие на \mathbb{R} ,

следовательно единственное решение - замечено, что

если есть $u = c$, $v = -c$, при-
чем $c^5 + 3,5 + 8c = 0$, то



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нагда ($c_0; -c_0$) - решение систем

$$\text{Расс-и про } f(t) = t^5 - 3,5 + 8t$$

$f(t)$ - непрерывна на \mathbb{R}

$$f(0) = -3,5$$

$f(+4) = 65 \Rightarrow$ на $[0; 4]$ ур-ни

$f(t) = 0$ имеет корень t изучен
(Геогора Болоуан-Коти) \Rightarrow

корень - единственный, т.к

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f''(t) > 0 \Rightarrow$$

Расс-и корень ур-ни $f(t) =$

$$t^5 - 3,5 + 8t = 0 \Rightarrow$$

нагда ($c_0; -c_0$) - ед. решение
системы (1) - фактическое
системы (2) ($c_0 \neq 0$) $\wedge f(0) = 0 \Rightarrow$

$$\cot(-c_0) = 0 = \log_3 5xy \Rightarrow$$

$$5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\text{Одобр: } xy = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{ccc} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{array}$$

$$x_a + x_b = 9$$

$$x_b + x_c = 14 \Rightarrow$$

$$x_a + x_c = 19$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$2(x_a + x_b + x_c) = 21 \cdot 2$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$x_c = 12$$

$$x_b = 2$$

$$x_a = 7$$

$$2(y_a + y_b + y_c) \geq 10 + 13 + 18 = 23 + 13$$

$$y_a + y_b + y_c \geq \frac{23 + 13}{2} = 21$$

$$z_a + z_b + z_c \geq \frac{10 + 13 + 30}{2} = 20 + 6 \approx 27$$

$$(abc)_{min} = 2^4 3^4 5^2 7$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

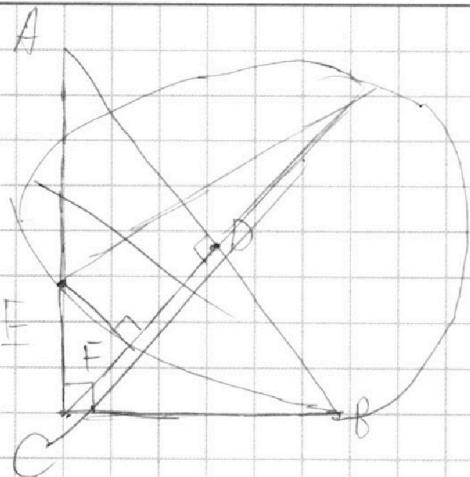
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 =$$

$$\frac{1}{2} \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8$$

$$t^4 + \frac{7}{2} t + 8 = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$t = 1$$

$$t = -1$$

$$2 +$$

$$+$$

$$-2 - 16 + 7 = 0$$

$$f'(t) = 10t^4 + 16 -$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow$$

найден

$$2(5t^4 +$$

$f(t) = \log_{\frac{1}{2}}(5t^4 + 8)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

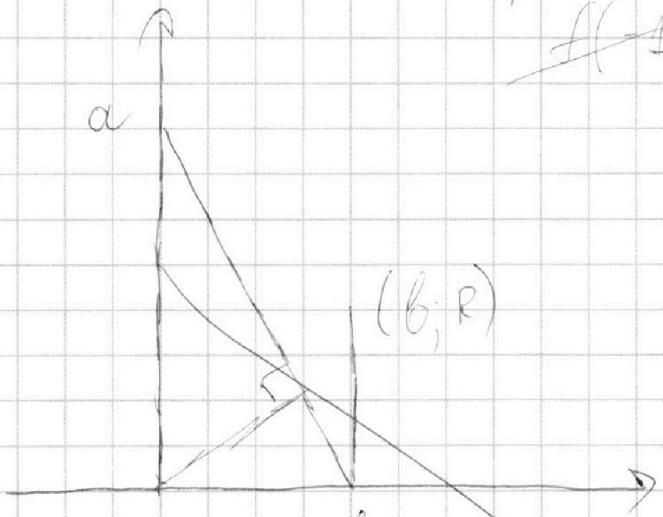
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2t^5 + 16t \in \mathbb{Z} = 0$$

Морзи-дифференциальное
 $f(-1)$



$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \quad \text{или} \quad (x-b)^2 + (y-R)^2 = R^2$$
$$y = \frac{b}{a}x - \text{бисектриса}$$
$$\frac{y}{a} = 1 - \frac{x}{b}$$
$$y = a - \frac{x}{b}$$
$$y = \frac{b}{a}x$$
$$y^2 - 2Ry + R^2 = R^2 - b^2$$
$$(y-R)^2 = R^2 - b^2$$
$$y^2 - 2Ry + R^2 - R^2 + b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 23^5 - 8 \\ \log_3^4 xy + 2 \log_{xy} 3 = \log_{2xy} 3^{11} - 8 \end{cases} \Rightarrow xy$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$$\log_3^4 xy + 3,5 \log_{xy} 3 = -8$$

$$\begin{aligned} & \log_3^4 \\ & u^4 - v^4 + 3,5 \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \cdot s = 0 \\ & (u+v) \end{aligned}$$

$$u^4 + 3,5 u \cdot s = 0$$

$$v^4 - 3,5 v + s = 0$$

$$u^4 + \frac{3,5}{u} + s = 0 \quad u^5 + 3,5 \cdot 8 u = 0$$

$$v^4 - \frac{3,5}{v} + s = 0 \quad v^5 - 3,5 + 8 v = 0$$

$$u^5 + v^5 + s(u+v) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

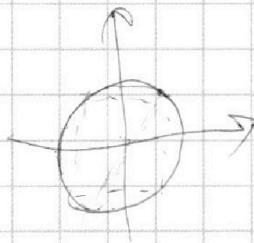
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{5\pi}{2} - 5\arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{2} \xrightarrow{x}$$

$$7\pi - 5\arccos(\cos x) = x$$

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$-3\pi < x \leq 2\pi$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \Rightarrow$$

$$5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin t) =$$

$$x + \frac{\pi}{2} = t$$

$$\arcsin(\sin t) =$$

$$5 \arcsin(\sin t) = t$$

$$7\pi - 5(2k\pi) - x$$

$$2\pi k + x$$

$$5(2k + t) = t$$

$$10ak + t$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\tan(\sin t) = t$$
$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin t) = t \Rightarrow 5t = t \Rightarrow t = 0$$
$$t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin t) = t \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$$

$$\sin(\pi - t) = \sin t \Rightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$5(\pi - t) = t$$

$$5\pi - 5t = t$$

$$5\pi = 6t$$

$$t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$t \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\arcsin(\sin t) = t - 2\pi$$

$$5(t - 2\pi) = t$$

$$5t - 10\pi = t$$

$$4t = 10\pi$$

$$t = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(u+v)fu$$

$$7a - 27f + 7c \geq 26 \geq 30$$

26 > 0

$$u^5 + v^5 + 8(u+v) = 0$$

$$f(u), u^5 + 3,5 + 8u = 0$$

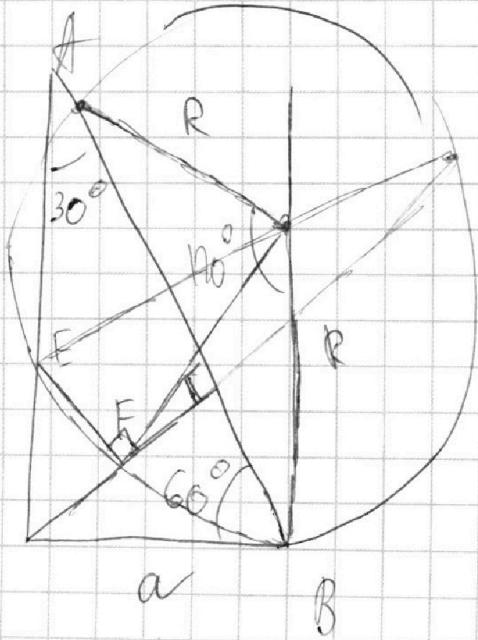
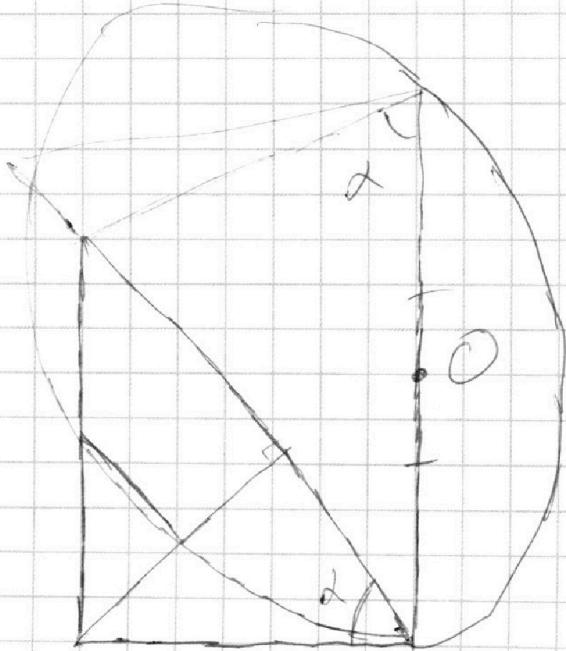
$$g(v) = v^5 - 3,5 + 8v = 0$$

$$f(u) \geq 0$$

$$f(g(v)) \geq 0 \Rightarrow \text{если } g(v) \geq 0 \Rightarrow$$

$$u+v=0 - \text{нельзя} \Rightarrow$$

$$u+v=0 \Rightarrow \frac{1}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

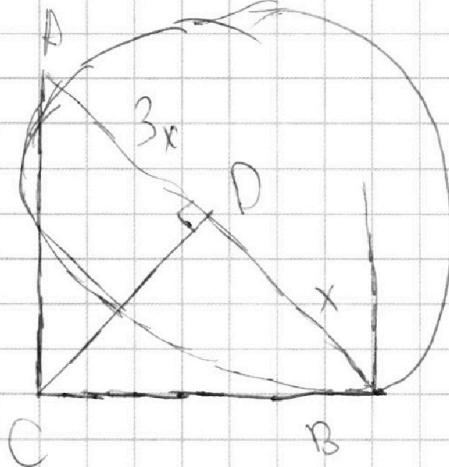
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$3x \cdot 4x = AC$$

$$x\sqrt{12} = AC$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

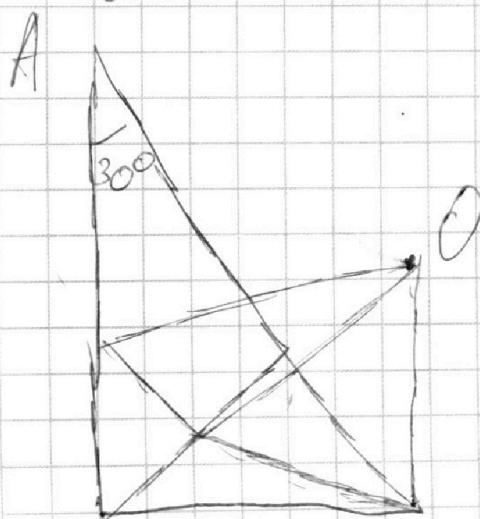
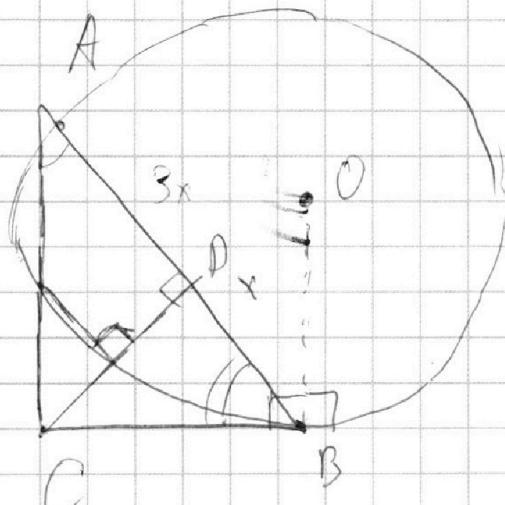
$$BC^2 = BD \cdot AB \Rightarrow$$

$$BC^2 = 4x^2$$

$$BC = 2x$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$\angle BAC = 30^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П1. $3 = 243$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \log_{x^2} 3^5 = 8$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{2 \log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{12}{2 \log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

$$\log_3 x = A$$

$$2 \log_3^5 x + 7 = -16 \log_3 x$$

$$2A^5 + 7 = -16A$$

$$2A^5 + 16A + 7 = 0$$

$$\log_3^4 (sy) + 7 \log_{sy} 3 = \log_{(sy)^2} (3^4) - 8$$

$$\log_3^4 (sy) + \frac{7}{\log_3 sy} = \frac{11}{2 \log_3 sy} - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

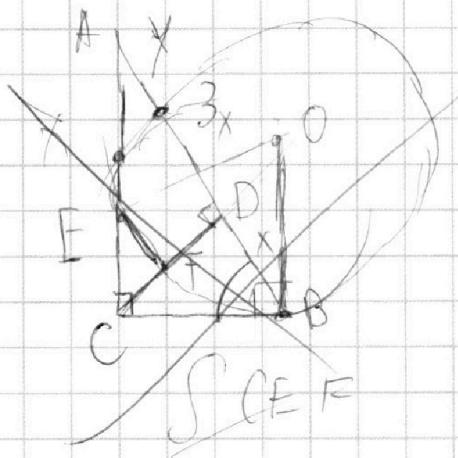
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

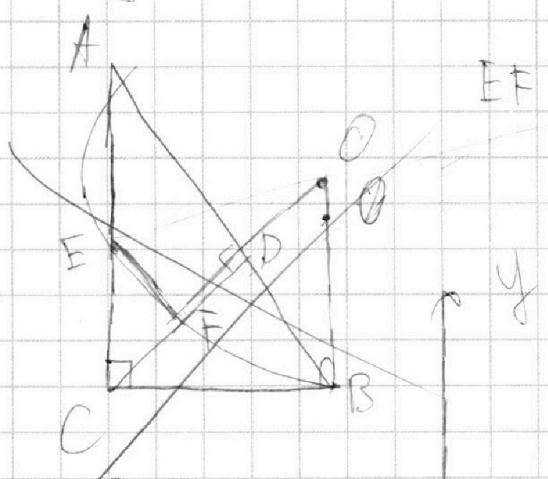
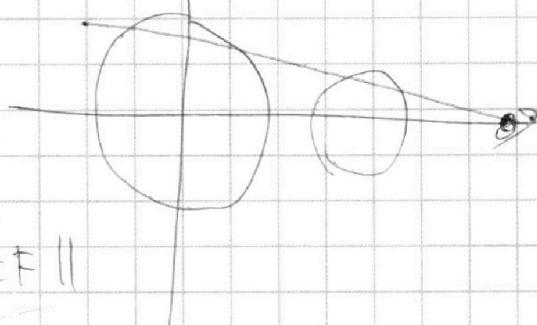
$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 2 \cdot 343 - 8$$



$$OB \perp CB$$

$$OB \perp OB \text{ на } AC$$

$$OB \perp CB \text{ и } y$$



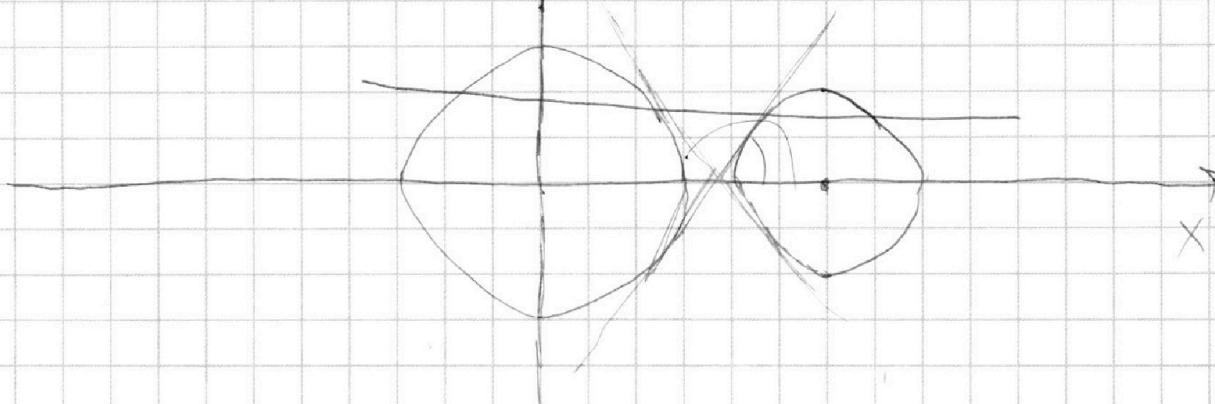
$$EF \parallel$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$$

$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$$





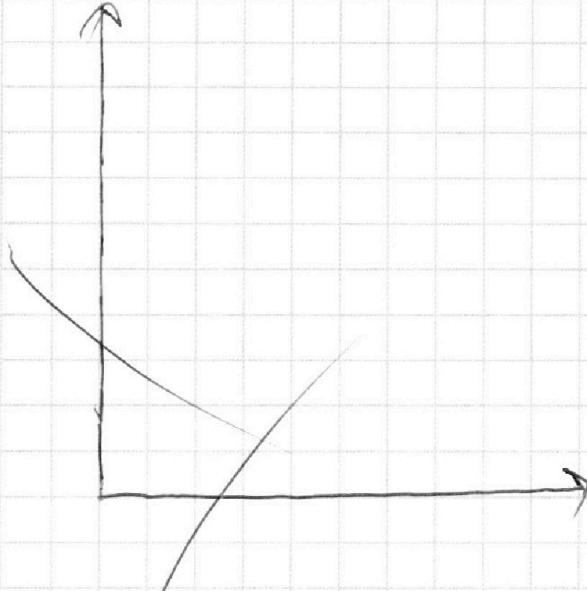
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

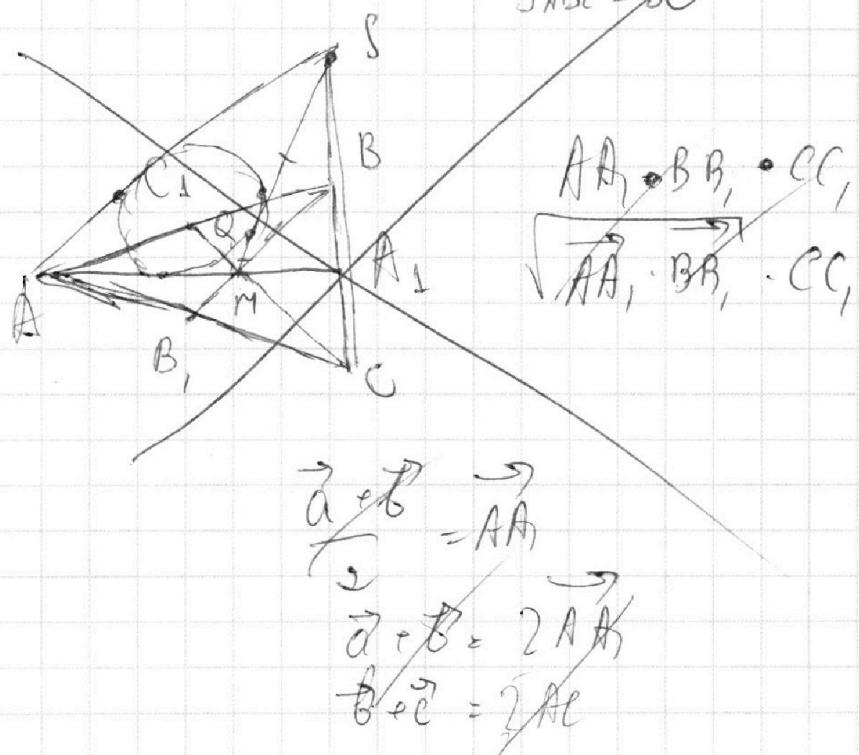
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SA = BC = 12$$

$$S_{ABC} = 90$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 7y - 3b = 0 \Rightarrow$$

$$ax + 7y = 3b$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$ax + 7y = 3b$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$4x^2 + 4y^2 = 36$$

$$4x^2 + (3b - ax)^2 = 36$$

$$4x^2 + a^2x^2 + 36b^2 - 2abx + 9b^2 = 36$$

$$(a^2 + 4)x^2 + 6abx + 5b^2 - 36 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3ab)^2 + (a^2 + 4)(36 - 9b^2) \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = 9a^2b^2 + 36a^2 + 4 \cdot 36 - 9a^2b^2 \cdot 36b^2$$

~~$$a^2 + b^2 > 4$$~~

$$a^2 - b^2 + 4 > 0$$

$$a^2 > b^2 - 4$$

~~$$a^2 - b^2$$~~

$$a^2 > 4 - b^2$$

$$b^2 - 4 > -a^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + by = 36$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$2(x - 6)^2 \leftarrow 4$$

$$4(x - 6)^2 + 4y^2 = 16$$

$$4(x - 6)^2 + (36 - ax)^2 \cancel{= 16}$$

$$4(x^2 - 12x + 36)$$

$$4(x^2 - 12x + 36) + (36 - ax)^2 = 16$$

$$2x - 6$$

$$4(x^2 - 12x + 36) + (36 - ax)^2 = 16$$

$$4x^2 - 48x + 4 \cdot 36 + 96^2 - 6abx + a^2 x^2 = 16$$

$$\cancel{x^2(a^2)}$$

$$x^2(a^2 + 4) - x(48 + 6ab) + 96^2 + 4 \cdot 32$$

$$x^2(a^2 + 4) - 2x(24 + 3ab) + 96^2 + 4 \cdot 32$$

$$\mathcal{D} = (24 + 3ab)^2 - (a^2 + 4)(96^2 + 4 \cdot 32)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 24^2 + 24 \cdot 6ab + 9a^2b^2 - \\ (a^2 + 4)(9b^2 + 4 \cdot 32)$$

$$x_a + x_b + x_c = 25$$

$$x_a = 7 \quad x_a = 7$$

$$\cancel{x_b = 2} \quad x_b = 2 \\ \cancel{x_c = 12} \quad x_c = 12$$

$$y_a + y_b + y_c = 25$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!