Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 10-01

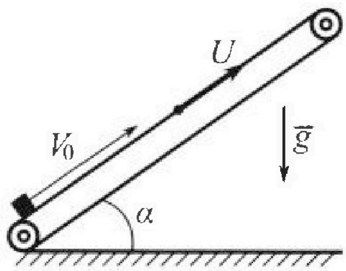
Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

1. Мяч, посланный теннисистом вертикально вверх, поднимается на максимальную высоту за $T = 2$ с.

1) Найдите начальную скорость V_0 мяча.
2) Теннисист посылает мяч с начальной скоростью V_0 под различными углами к горизонту в направлении высокой вертикальной стенки, находящейся на расстоянии $S = 20$ м от места броска. На какой максимальной высоте мяч ударяется о стенку?

Ускорение свободного падения g =10 м/с^2. Мяч движется в плоскости перпендикулярной стенке. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым. Все высоты отсчитываются от точки старта.

2. Лента транспортера, предназначенного для подъема грузов, образует с горизонтальной плоскостью угол α такой, что $\sin\alpha = 0{,}8$ (см. рис.).



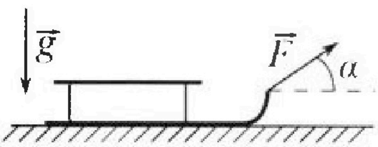
В первом опыте небольшую коробку ставят на *покоящуюся* ленту транспортера и сообщают коробке начальную скорость $V_0 = 4$ м/с. Коэффициент трения скольжения коробки по ленте $\mu = \frac{1}{3}$. Движение коробки прямолинейное.

1) За какое время T после старта коробка пройдет *в первом опыте* путь $S = 1$ м?

Во втором опыте коробку ставят на ленту транспортера, *движущуюся* со скоростью $U = 2$ м/с, и сообщают коробке скорость $V_0 = 4$ м/с.

2) На како м расстоянии L от точки старта скорость коробки во втором опыте будет равна $U = 2$ м/с?
3) На какой высоте H, отсчитанной от точки старта, скорость коробки во втором опыте станет равной нулю? Ускорение свободного падения g =10 м/с^2. Все кинематические величины измерены в лабораторной системе отсчета.

3. Санки дважды разгоняют из состояния покоя до одной и той же скорости V_0 за одинаковое время.



В первом случае санки тянут, действуя постоянной по модулю силой, направленной под углом α к горизонту (см. рис.).

Во втором случае такая же по модулю сила, приложенная к санкам, направлена горизонтально. После достижения скорости V_0 действие внешней силы прекращается.

1) Найдите коэффициент μ трения скольжения санок по горизонтальной поверхности.
2) Через какое время T после прекращения действия силы санки остановятся? Ускорение свободного падения g.

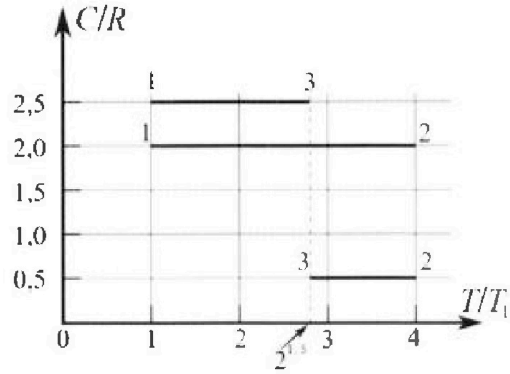
Санки находятся на горизонтальной поверхности. Движение санок прямолинейное.

Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 10-01

Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

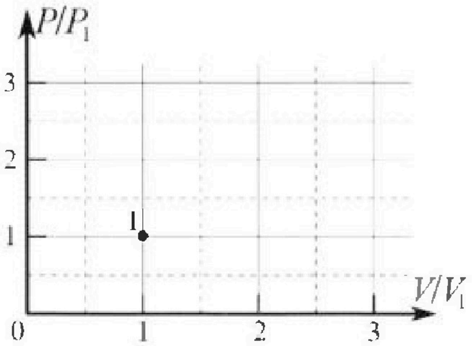
4. Тепловой двигатель работает по циклу 1-2-3-1. Рабочее вещество – один моль одноатомного идеального газа. Для вычисления КПД цикла ученик десятого класса построил график зависимости молярной теплоемкости C газа (в единицах универсальной газовой постоянной R) от температуры в процессах: 1-2, 2-3, 3-1 (см. рис.). Температура газа в состоянии 1 $T_1 = 400$ К, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



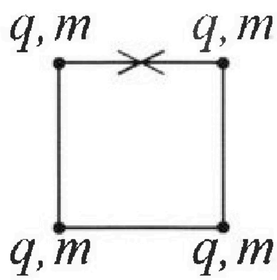
1) Найдите работу A_{12} газа в процессе 1-2.

2) Найдите КПД η цикла.

3) Постройте график цикла в координатах $(P/P_1, V/V_1)$, где P_1 и V_1 давление и объём в состоянии 1. Для построения графика перенесите шаблон (см. ниже) в чистовик своей работы. Точка 1 на графике соответствует состоянию 1 газа в цикле.



5. Четыре заряженных шарика связаны легкими нерастяжимыми нитями так, что шарики находятся в вершинах квадрата со стороной b (см. рис.). Масса каждого шарика m, заряд q.



1) Найдите силу T натяжения нитей.

Одну нить пережигают.

2) Найдите скорость V любого, выбранного Вами шарика, в тот момент, когда шарики будут находиться на одной прямой.

3) На как ом расстоянии d от точки старта будет находиться в этот момент любой из двух шариков, изначально расположенных вверху (на рисунке)?

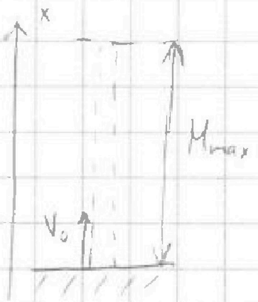
Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Действие сил тяжести считайте пренебрежимо малым.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



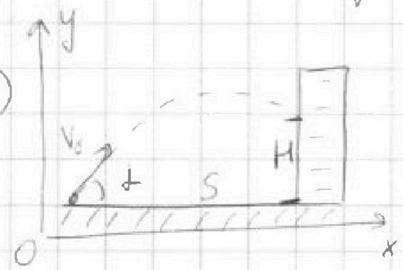
№ 1

1) За время T мяч поднимается на максимальную высоту. ~~Вт~~ В наивысшей точке скорость мяча обращается в нуль.

Движение происходит в поле тяжести земли => на мяч постоянно действует ускорение g в ИСО. Значит, скорость мяча изменяется по закону:

$V(t) = V_0 - gt$ - в проекции на ось X.

при $V = 0$ $V_0 - gT = 0$, $\boxed{V_0 = gT} = 20 м/с$



2) Распишем уравнение движения мяча в проекциях на оси OX и Oy;

$$\begin{cases} x(t) = V_{0x} t; \\ y(t) = V_{0y} t - \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$; $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$;

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x(t)}{V_0 \cos\alpha} \\ y(t) = V_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$y(x) = x \, tg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}$; в момент соударения со стенкой $x = S$, $y = H$;

$H = S \, tg\alpha - \frac{gS^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$ - мы получили зависимость высоты точки соударения со стенкой от угла броска. Для нахождения угла, при котором H принимает своё максимальное значение,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

необходимо взять производную данной функции и приравнять её к нулю.

$$H = H_{max} \text{ при } H' = 0; \quad H = S\,tg\,\alpha - \frac{gS^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H' = S\,tg\,\alpha' - \left(\frac{gS^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}\right)' = \frac{S}{\cos^2\alpha} - \frac{gS^2\sin\alpha}{V_0^2\cos^3\alpha}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)' = -2\cos^{-3}\alpha \cdot -\sin\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\right\}$$

$$H' = 0 \Rightarrow \frac{S}{\cos^2\alpha} = \frac{gS^2\sin\alpha}{V_0^2\cos^3\alpha} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{V_0^2}{gS};$$

$$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1;$$

$$H_{max} = S\,tg\,\alpha - \frac{gS^2}{2V_0^2}\left(tg^2\alpha + 1\right) = \cancel{\frac{V_0^2}{g}} - \cancel{\frac{gS^2}{2V_0^2} \cdot \frac{V_0^4}{g^2S^2}} =$$

$$= \cancel{\frac{V_0^2}{2g}} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{2V_0^2} = \frac{gT^2}{2} - \frac{gS^2}{2g^2T^2} = \boxed{\frac{gT^2}{2} - \frac{S^2}{2gT^2}} =$$

$= 15$ м

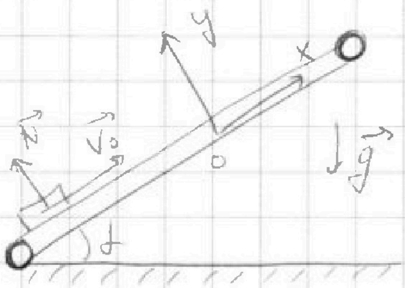
Ответ: $V_0 = gT = 20$ м/с

$$H_{max} = \frac{gT^2}{2} - \frac{S^2}{2gT^2} = 15 \text{ м}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2

1) Введём систему координат с осями OY перпендикулярно и OX параллельно плоскости ленты.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси:

$y: \quad N = mg\cos\alpha$

$x: \quad ma = -mg\sin\alpha - \mu N = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$;

$a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ — эта формула работает для случая, когда коробка движется вверх относительно неподвижной ленты.

Если же коробка с ленты съезжает, то сила трения направлена в другую сторону:

$a = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$;

Скорость коробки будет уменьшаться по модулю, обратится в нуль, а затем будет расти по модулю, тело будет съезжать.

Найдём путь тела до остановки:

$\frac{v_0^2}{2a} = S_1$; $S_1 = \frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = \frac{16}{20}$ м < 1 м $\Rightarrow$ доехав до верхней точки, коробка не пройдёт путь S;

$T = \tau_1 + \tau_2$, τ_1 - подъёма, τ_2 - спуска.

$a\tau_1 = v_0$; $\tau_1 = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для спуска:

$$\frac{v_к^2}{2a} = S - S_1; \quad \frac{v_к^2}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = S - S_1;$$

$$v_к = \sqrt{2g(S-S_1)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)};$$

$$\tau_2 = \frac{v_к}{a} = \frac{\sqrt{2g(S-S_1)(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(S-S_1)}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}};$$

$$\boxed{T = \tau_1 + \tau_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{15}} + \frac{2}{5}\right) с;}$$

2) Теперь лента движется со скоростью $u = 2$ м/с вверх.

Если в ЛСО скорость коробки $u = 2$ м/с, то относительно ленты она остановилась,

$$\frac{V_0^2 - u^2}{2a} = L, \text{ где } a = \cancel{\mu} g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha);$$

$$\boxed{L = \frac{V_0^2 - u^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} = \frac{3}{5} м;}$$

3) В отличие от ситуации, описанной в пункте 1, теперь, после достижения скорости u, коробка станет двигаться в обратную сторону относительно ленты $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$

Тогда $\frac{u^2}{2g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)} = L'$; $L_0 = L + L'$; $H = L_0\sin\alpha =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

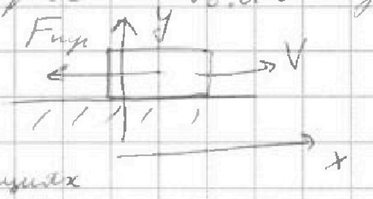
$$= \sin\alpha \left(\frac{v_0^2 - u^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} + \frac{u^2}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \right) = \sin\alpha \left(\frac{3}{5}\text{м} + \frac{1}{3}\text{м} \right) = \frac{14}{15}\text{м} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{56}{75}\text{м}}$$

Ответ: $T = \tau_1 + \tau_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{15}} + \frac{2}{5} \right) c$;

$L = \frac{3}{5}$ м

$H = \frac{56}{75}$ м

2) Мы разогнали санки до скорости V_0 и отпустили. Теперь сила трения их тормозит.



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$y: mg = N;$

$x: ma = -F_{тр} = -\mu N;$

$ma = -\mu mg; \quad a = -\mu g;$

Санки движутся с постоянным ускорением =>

=> ~~закон~~ скорость санок изменяется по закону:

$V = v_0 + at = v_0 - \mu g t;$

тогда при обращении скорости в нуль

$v_0 - \mu g t_* = 0; \quad t_* = \frac{v_0}{\mu g}; \quad \mu = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \equiv T = \frac{v_0}{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{(1-\cos\alpha) g};$

Ответ: $\mu = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha g}$

$T = \frac{v_0 \sin\alpha}{(1-\cos\alpha) g}$

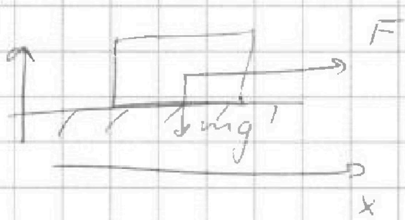
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

1) Сила F, действующая на санки, приложена к их центру масс.

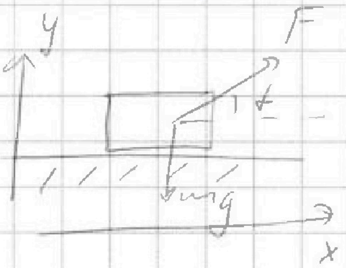


Тогда в первом случае:

$y: N = mg;$

$x: ma = F - \mu N = F - \mu mg;$

$a = \frac{F}{m} - \mu g;$



$(1)\ a\tau = v_0;\quad \left(\frac{F}{m} - \mu g\right)\tau = v_0;$

Во втором случае:

$y: F\sin\alpha + N = mg;\quad N = mg - F\sin\alpha$

$x: ma = F\cos\alpha - \mu N = F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha =$

$= F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg;\quad a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g;$

$(2)\ a\tau = v_0 \Rightarrow \left(\frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g\right)\tau = v_0;$

приравнивая (1) и (2), получаем

$\frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \cancel{\mu g} = \frac{F}{m} - \cancel{\mu g};$

$\cos\alpha + \mu\sin\alpha = 1;$

$\mu\sin\alpha = 1 - \cos\alpha;\quad \boxed{\mu = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4

Для начала выведем одну формулу. По определению молярная теплоёмкость вещества:

$C = \frac{dQ}{\nu dT}$, где $dQ = dU + dA$;

Газ одноатомный => $dU = \frac{3}{2}\nu R dT$;

$C = \frac{3}{2}R + \frac{dA}{\nu dT}$;

Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$PV = \nu RT$. Дифференцируя, получаем

$PdV + VdP = \nu R dT$; $\quad dA = pdV$

$C = \frac{3}{2}R + \frac{pdV}{pdV + Vdp}R = \boxed{\frac{3}{2}R + \frac{R}{1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}}}$;

Пользуясь этой формулой, поймём, какой была зависимость $P(V)$ в процессах 1-2, 2-3, 3-1;

<u>1-2</u>: $\frac{3}{2}R + \frac{\cancel{pdV}\,R}{1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}} = 2R$ - из графика;

$\frac{V}{p}\frac{dp}{dV} = 1$; $\frac{dp}{p} = \frac{dV}{V}$ => $\ln\frac{p}{p_1} = \ln\frac{V}{V_1}$;

$p = \frac{p_1}{V_1}V$ - прямая, проходящая через начало координат

Уравнение состояний:

$PV = \frac{p_1}{V_1}V^2 = \nu RT$; $\frac{p_1}{V_1}V_2^2 = \nu R \cdot 4 T_1 = \nu R \cdot 4 T_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2

$$P_1 V_1 = \nu R T_1;$$

$$\frac{p_1}{V_1} V_2^2 = 4\nu R T_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2^2}{V_1^2} = 4; \quad V_2 = 2 V_1;$$

$$p_2 = \frac{p_1}{V_1} V_2 = 2 p_1$$

$\underline{2-3}$:

$$\frac{3}{2} R + \frac{R}{1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}} = \frac{1}{2} R;$$

$$\frac{R}{1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}} = -R; \quad 1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV} = -1; \quad \frac{V}{p}\frac{dp}{dV} = -2;$$

$$\frac{dp}{p} = -2\frac{dV}{V}; \quad \ln\frac{p}{p_2} = -2\ln\frac{V}{V_2};$$

$$\frac{p}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V}\right)^2; \quad p = \frac{p_2 V_2^2}{V^2};$$

Уравнение состояния: $p_2 V_2 = 4\nu R T_1;$

$$\frac{p_2 V_2^2}{V_3^2} \cdot V_3 = 2^{\frac{3}{2}} \nu R T_1;$$

$$\frac{p_2 V_2^2}{V_3} = 2^{\frac{3}{2}} \nu R T_1; \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{4}{2^{\frac{3}{2}}};$$

$$p_2 V_2 = 4\nu R T_1;$$

$$V_3 = \sqrt{2}\, V_2 = 2\sqrt{2}\, V_1;$$

$$p_3 = p_1;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

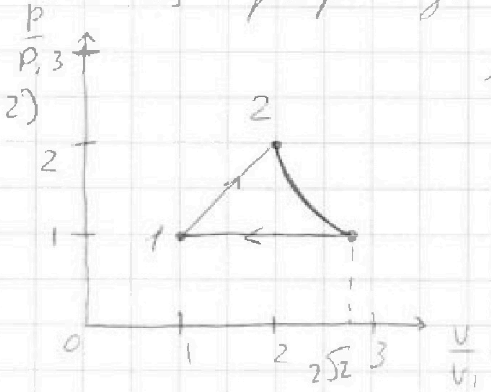
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3-1: ~~$\frac{3}{2}R + \frac{R}{1+\frac{V}{p}\frac{dp}{dV}} = \frac{5}{2}R$~~

$C = \frac{5}{2}R$, газ одноатомный $\Rightarrow$ $P = const = P_1$;

Итого, график зависимости имеет вид:



1) Работа газа считается как площадь под графиком $\Rightarrow$

$$\boxed{\Rightarrow A_{12} = \frac{P_1 + 2P_1}{2}\cdot V_1 = \frac{3}{2}P_1V_1 = \frac{3}{2}\nu R T_1 = 4986 \text{ Дж}}$$

3) $\eta = \frac{A}{Q_+}$; $\quad A = A_{12} + A_{23} - A_{13}$;

$Q_+ = Q_{23}$, т.к. только в этом процессе подводится тепло;

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23} - A_{13}}{\frac{3}{2}(4P_1V_1 - 2\sqrt{2}P_1V_1) + A_{23}} = \frac{\frac{3}{2}P_1V_1 - (2\sqrt{2}-1)P_1V_1 + A_{23}}{\frac{3}{2}(4P_1V_1 - 2\sqrt{2}P_1V_1) + A_{23}};$$

$$A_{23} = \int_{2V_1}^{2\sqrt{2}V_1} PdV = \int_{2V_1}^{2\sqrt{2}V_1} \frac{8P_1V_1^2}{V^2}dV = (4-2\sqrt{2})P_1V_1;$$

$$\eta = \frac{(\frac{5}{2}-2\sqrt{2})P_1V_1 + (4-2\sqrt{2})P_1V_1}{(6-3\sqrt{2})P_1V_1 + (4-2\sqrt{2})P_1V_1} = \frac{(\frac{13}{2}-4\sqrt{2})\cancel{P_1V_1}}{(10-5\sqrt{2})P_1V_1} =$$

$$= \frac{13-8\sqrt{2}}{20-10\sqrt{2}}$$

Ответ: $A_{12} \approx 5$ кДж, $\eta = \frac{13-8\sqrt{2}}{20-10\sqrt{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

3) $\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}$; $Q_+ = Q_{12}$, т.к. из графика в условии видно, что только на этом участке ($\Delta T > 0$)

тогда $\eta = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{31}}{Q_{12}} = \cancel{K \frac{i}{2} R\left(\frac{P_3V_3}{\nu R} = \frac{P_2V_2}{\nu R}\right)}$

$$= 1 + \frac{\frac{i}{2}\cancel{R}\left(\frac{P_3V_3}{\cancel{\nu R}} - \frac{P_2V_2}{\cancel{\nu R}}\right) + \frac{5}{2}R\left(\frac{P_1V_1}{\cancel{R}} - \frac{P_3V_3}{\cancel{R}}\right)}{2\cancel{R}\left(\frac{P_2V_2}{\cancel{R}} - \frac{P_1V_1}{\cancel{R}}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}\left(P_1 \cdot 2\sqrt{2}V_1 - 4P_1V_1\right) + \frac{5}{2}\left(P_1V_1 - 2\sqrt{2}P_1V_1\right)}{2\left(4P_1V_1 - P_1V_1\right)} =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}\cancel{P_1V_1} - 2\cancel{P_1V_1} + \frac{5}{2}\cancel{P_1V_1} - 5\sqrt{2}\cancel{P_1V_1}}{6\cancel{P_1V_1}} =$$

$$= 1 + \frac{-4\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{6} = \frac{6 - 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{13}{2} - 4\sqrt{2}}{6} = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{12};$$

Ответ: $A_{12} \approx 5$ кДж, $\eta = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Как мы поняли из пункта 2, в момент, когда все шарики находятся на прямой, у каждого шарика скорость V;

Ответ: $T = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) k \frac{q^2}{b^2}$;

$V = \sqrt{\frac{k}{3mb}}\, q$;

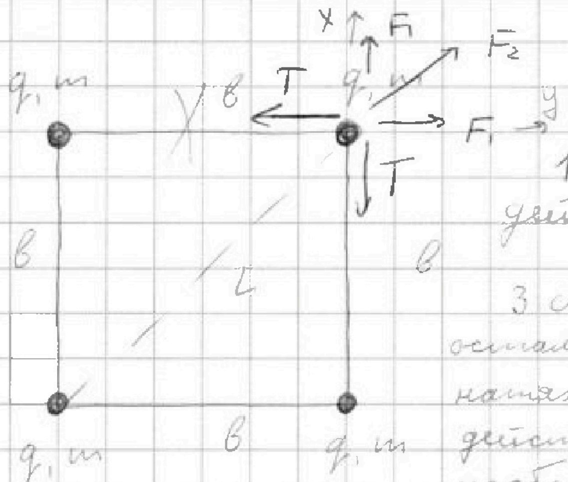
$d = \frac{\sqrt{5}}{2} b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№ 5

1) На каждый из шариков действуют несколько сил:

3 силы взаимодействия с остальными шариками и две силы натяжения нитей. Все эти силы, действующие на один из шариков, изображены на рисунке;

По закону Кулона:

$$F_1 = k\frac{q^2}{b^2}, \quad F_2 = k\frac{q^2}{l^2} = k\frac{q^2}{2b^2};$$

Все шарики покоятся => если ввести оси вдоль нитей, то должно выполняться равенство:

$$T = F_1 + F_2\cos 45^\circ = F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2;$$

$$\boxed{T = k\frac{q^2}{b^2} + \frac{\sqrt{2}}{4}k\frac{q^2}{b^2} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)k\frac{q^2}{b^2}}$$

2) После пережигания верхней нити шарики начнут двигаться. Нити всегда будут натянуты, так как шарики заряжены одноимённо => отталкиваются.

В момент, когда все шарики будут на одной прямой, два крайних будут двигаться вдоль оси X из пункта 1 в силу нерастяжимости нитей; по ЗСИ два центральных шарика будут двигаться с той же скоростью, что и крайние, но направленной противоположно => в этот момент скорости всех шариков по модулю V.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

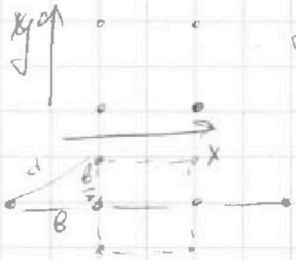
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Благодаря закону сохранения импульса мы сразу можем получить ответ на третий вопрос. ~~Верхние~~ нижние шарики в силу симметрии рисунка могли двигаться только вниз.

На систему не действуют внешние силы => центр масс покоится. По оси y центр масс имеет координату $y_c = \frac{b}{2}$, это значит, что когда все шарики выстроятся в одну прямую, она пройдёт через центр исходного квадрата.



Тогда по теореме Пифагора

$$\boxed{d = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4} b^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} b}$$

Для ответа на второй вопрос нужно записать ЗСЭ для системы. В силу нерастяжимости нитей скорости шариков всегда перпендикулярны нитям => сила натяжения работы не совершает. Никаких других диссипативных сил в системе также нет.

Вначале была только энергия взаимодействия между шариками:

$$E_н = W_н = \frac{1}{2} \sum_i W_i = \frac{1}{2}\left(k\frac{q^2}{b} + k\frac{q^2}{b} + k\frac{q^2}{2b}\right)\cdot 4 =$$

$$= 2\left(2k\frac{q^2}{b} + \frac{1}{2}k\frac{q^2}{b}\right) = 5k\frac{q^2}{b},$$

В конце у шариков есть кинетическая энергия:

$$4\cdot\frac{mv^2}{2} = K; \quad E_к = K + W_к = 2mv^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(k\frac{q^2}{b} + k\frac{q^2}{b} + k\frac{q^2}{2b}\right)2}_{\text{для центральных}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left(k\frac{q^2}{b} + k\frac{q^2}{2b} + k\frac{q^2}{3b}\right)\cdot 2}_{\text{для крайних}}$$

$$5k\frac{q^2}{b} = 2mv^2 + 2k\frac{q^2}{b} + k\frac{q^2}{2b} + k\frac{q^2}{b} + k\frac{q^2}{2b} + k\frac{q^2}{3b};$$

$$2mv^2 = \frac{2}{3}k\frac{q^2}{b}; \quad v^2 = \frac{kq^2}{3mb}; \quad v = \sqrt{\frac{k}{3mb}}\, q$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$v^2 = v_0^2 - 2gS(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$;

$v = \sqrt{v_0^2 - 2gS(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

$\frac{4}{20\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)} = \frac{4}{20\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{4}{20\cdot\frac{3}{5}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$;

$\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9+5}{15} = \frac{14}{15}$ м

$14 \times 4 = 56$

$\frac{14\cdot 4}{15\cdot 5} = \frac{56}{75}$

$15 \times 5 = 75$

$20 - \frac{20\cdot 20}{20\cdot 4} = 20 - 5 = 15$

$\frac{10\cdot 4}{2} - \frac{20^2}{2\cdot 10\cdot 4} =$

$C = \frac{\frac{3}{2}(pdV + Vdp) + pdV}{\nu dT}$; $dQ = dU + dA$; $pdV + Vdp = \nu R dT \Rightarrow$

$p = \frac{p_1}{V_1}V$; $C = \frac{dQ}{\nu dT}$;

$\boxed{p = \frac{p_0}{V_0}V}$

$\ln\frac{p}{p_0} = \ln\frac{V}{V_0}$; $\frac{p}{p_0} = \frac{V}{V_0}$; $pV = p_0V_0$; $\frac{p}{p_0} = \frac{V_0}{V}$;

$\frac{1}{1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}} = \frac{1}{2}$; $\frac{V}{p}\frac{dp}{dV} = 1$; $\frac{dp}{p} = \frac{dV}{V}$;

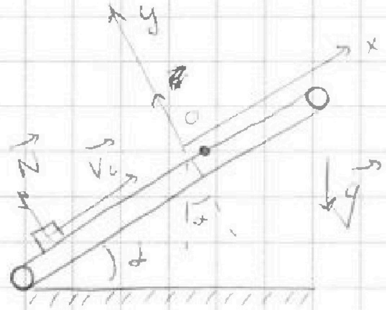
1–2: $\frac{3}{2}R + \frac{R}{1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}} = 2R$; $C = \frac{3}{2}R + \frac{pdV}{pdV + Vdp}$

$C = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1 + \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}}$; $\Rightarrow C = \frac{\frac{5}{2}pdV + \frac{3}{2}Vdp}{pdV + Vdp}R$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

1) Введём оси координат параллельно и перпендикулярно плоскости ленты и распишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси.

y: $N = mg\cos\alpha$

x: $ma = -mg\sin\alpha - \mu \underbrace{mg\cos\alpha}_{N}$ – когда коробка движется вверх относительно покоящейся ленты.

$ma = -mg\sin\alpha + \mu \underbrace{mg\cos\alpha}_{N}$ – коробка движется вниз относительно ленты.

Поделив на m, получаем $a = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$;

Тогда скорость тела изменяется по закону

x: $V = V_0 + at = V_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t$,

Скорость тела обратится в нуль при $\tau = \dfrac{V_0}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$;

Пройденный телом путь к этому моменту:

$X = \dfrac{V_0^2}{2a} = \dfrac{V_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} = 20м$ =>

=> пройдя $S = 1м$ коробка не успеет затормозить, а тогда

$$\frac{V_0^2 - (V_0 + aT)^2}{2a} = S,$$

Из ЗСЭ: $\dfrac{mV_0^2}{2} = \dfrac{mV^2}{2} + mgS\sin\alpha + \mu mgS\cos\alpha$;

$V^2 = V_0^2 - 2gS\sin\alpha - 2\mu gS\cos\alpha$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $\quad 2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 2\cdot 10\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\right) =$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad = 2\cdot 10\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) =$

$\frac{16}{20}$

$\frac{4}{10} + \sqrt{\frac{2\left(1-\frac{16}{20}\right)}{10\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)}} =$

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{10\cdot\frac{3}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{30}{5}}} + \frac{4}{10} = \sqrt{\frac{1}{15}} + \frac{2}{5}$

$\frac{16-4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\frac{2P_1\cdot\cancel{4V_1^2}}{\cancel{8V_1^2}} = P_1$ $\quad \frac{3}{2}\cdot 400 = 600$

$8{,}31 \times 6 = 49{,}86$

$PV^{\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}} = PV^{\frac{-2}{-1}} = PV^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

$\frac{gT}{2} =$ $v_0T - \frac{gT^2}{2} = \frac{gT^2}{2}$; $tg\alpha' = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \cancel{tg^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

$v_0T = gT^2$; $v_0 = \sqrt{gT}$ $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$;

$v_0\cos\alpha\, t = S$;

$v_0\sin\alpha\, t - g\frac{t^2}{2} = H$;

$t = \frac{S}{v_0\cos\alpha}$; $H = S\,tg\alpha - \frac{gS^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$;

$\frac{S}{\cos^2\alpha} -$ $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)' = (\cos\alpha^{-2})' = -2\cos\alpha^{-3} \cdot -\sin\alpha =$

$= \frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}$ $2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} =$

$\frac{S}{\cos^2\alpha} - \frac{gS^2}{v_0^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} = 0$; $\frac{1}{\cancel{\cos^2\alpha}} = \frac{gS}{v_0^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}$;

$\boxed{tg\alpha = \frac{v_0^2}{gS}}$; $\boxed{2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}}$

N1 $\left(2k\frac{q^2}{\ell} + k\frac{q^2}{2\ell}\right) \cdot 4$

N4

$1 - \frac{1}{\cos^2\alpha} =$ $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha$

$\frac{v_0^2}{g} - \frac{g\cancel{S^2}}{2v_0^2}\left(\frac{v_0^4}{g^2\cancel{S^2}} + 1\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gS^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} =$

$= \boxed{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{2v_0^2}}$