



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

П.р. $ac : 3^{21} \cdot 7^{38}$, то $abc : 7^{38}$.

$$\begin{cases} ab : 3^{11} \\ bc : 3^{18} \\ ac : 3^{21} \end{cases}$$

Пусть V_n - макс. степень входящая 3
в n , т.е. $n : 3^{V_n}$, $n \not: 3^{V_n+1}$.

Тогда:

$$\begin{cases} V_a + V_b \geq 11 \\ V_b + V_c \geq 18 \\ V_a + V_c \geq 21 \end{cases}$$

$$2(V_a + V_b + V_c) \geq 50$$

$$V_a + V_b + V_c \geq 25 \Rightarrow abc : 3^{25}$$

$$abc : 3^{25} \text{ и } abc : 7^{38} \Rightarrow abc : 3^{25} \cdot 7^{38}$$

Приведем пример, когда $abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$

$$\begin{cases} a = 3^7 \cdot 7^{19} \\ b = 3^4 \\ c = 3^{14} \cdot 7^{19} \end{cases}$$

Ответ: $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\frac{a+b}{a^2-10ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

$$\frac{a}{b} \text{ несокр.} \Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

Докажем, что $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$

Пусть это не так, тогда

$$\begin{cases} a+b : k \\ ab : k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 2, k - \text{простое}$$

$$a : k \text{ или } b : k \quad (\text{т.к. } k - \text{простое})$$

Не учитывая общности $a : k$

$$\begin{cases} a : k \\ a+b : k \end{cases} \Rightarrow b : k, \text{ но } \text{НОД}(a, b) = 1$$

Противоречие.

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 10ab : m \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(a+b)^2 - 10ab : m}_{:m} \Rightarrow 10ab : m \text{ и } (a+b) : m$$

$$\text{Но } \text{НОД}(a+b, ab) = 1$$

$$\Rightarrow 10 : m \Rightarrow m \leq 10. \text{ Приведем пример,}$$

$$\text{где } m = 10:$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 3, b = 7$$

$$\frac{3}{7} - \text{кросокр.}$$

$$\frac{10}{10^2 - 2 \cdot 10} = \frac{10}{-110} \quad \text{сократили на 10}$$

$$\text{Ответ: } m = 10$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

Возведем в квадрат

$$2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 + 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1-8x+16x^2$$

$$4x^2-6x-6 = 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}$$

$$6x^2-3x-3 = \sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}$$

$$(6x^2-3x-3)^2 = (2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)$$

$$36x^4+9x^2+9-24x^3+18x-36x^2 =$$

$$= 4x^4+2x^3+6x^2-6x^3-3x^2-9x+8x^2+4x+12$$

$$32x^4-32x^3+38x^2+23x-3$$

$$(x+1)(32x^3-64x^2+26x-3)$$

$$(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)(32x^2-56x+12)=0$$

$$(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)(8x^2-14x+3)=0$$

$$(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

Проверим $x=-1$; $x=\frac{1}{4}$; $x=\frac{3}{2}$, подставив в данное выражение.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

1) $x = -1$

$$\sqrt{2+3+4} - \sqrt{2-1+3} = 5$$

$$2+3=5 \quad \text{верное тождество}$$

2) $x = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 3} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{8} + 3\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{8} + 3\frac{1}{4}} = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{верное тождество}$$

3) $x = \frac{3}{2}$

$$\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 3} = -5$$

$$2 - \sqrt{9} = -5$$

Ответ: $-1; \frac{1}{4}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

Пусть общая касает. пересек в в м.
D, а D в м. E

Продлим ~~до~~ ED до перес с дугой O₂O,
Плоска пересечения - P.

Поскольку $\triangle PO_1D \sim \triangle PO_2E$ (кривой угол +
общий при P)

$$PO_1 = x.$$

$$\frac{x}{x+9,5} = \frac{4}{9,5}$$

$$9,5x = 4x + 38$$

$$5,5x = 38$$

$$x = \frac{76}{11}$$

$$PE =$$

$$DE = PE - PD =$$

$$\sqrt{\left(\frac{76}{11} + \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{76}{11}\right)^2 - 16}$$

$$2 \cdot \frac{76^2}{121} + 2 \cdot \frac{76 \cdot 17}{22} - 16$$

$$\frac{2 \cdot 76^2}{121} + \frac{187 \cdot 76}{121} - 16$$

$$\frac{76(152 + 187)}{121} - 16 =$$

$$\frac{2 \cdot 76 \cdot 339}{121} - 16 = \frac{49592}{121}$$

$$\text{Ответ: } \frac{49592}{121}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

$$DE = \sqrt{\frac{76^2}{121} + \frac{76 \cdot 17}{11}} = \sqrt{\frac{76^2}{11} - 16}$$

$$\frac{76 \cdot (187)}{11}$$

$$\frac{5600}{11}$$

$$\frac{51528}{121}$$

$$\frac{5600}{11}$$

$$PE^2 = \left(\frac{17}{2} + \frac{76}{11}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{51528}{121}$$

$$\text{Answer: } \sqrt{\frac{51528}{121}} = \sqrt{\frac{61600}{121}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5 (продолжение)

$$2) \quad x = \frac{-y-3}{2}$$

$$\left(\frac{-y-3}{2}\right)^2 + 3y\left(\frac{-y-3}{2}\right) + 2y^2 = 0$$

$$y^2 + 6y + 9 + 3y^2 - 9y + 4y^2 = 0$$

$$2y^2 - 3y + 9 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 9 < 0 \quad x \notin \mathbb{R}$$

Ответ: выражение $\notin \mathbb{R}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$z(3y+x) = 2xy$$

$$(3x+2y)(3y+x) = 2xy$$

$$9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy = 2xy$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \quad \text{кв. трехчлен от } x.$$

$$D = 9y^2 - 8y^2 - y^2$$

$$x = \frac{\pm |y| - 3}{2} = \frac{\pm y - 3}{2}$$

$$1) x = \frac{y-3}{2}$$

$$\frac{y-3}{2} + 2y = z$$

$$z = \frac{5y-3}{2}$$

$$\left(\frac{y-3}{2}\right)^2 + 3y\left(\frac{y-3}{2}\right) + 2y^2 = 0$$

$$\frac{y^2 - 6y + 9}{2} + \frac{3y^2 - 9y}{2} + 2y^2 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 + 3y^2 - 9y + 4y^2 = 0$$

$$8y^2 - 15y + 9 = 0$$

$$D = 225 - 288 < 0 \Rightarrow x \notin R$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть V_b - скорость велосипедиста

V_m - скорости мотоциклиста

t_b - время, ~~от~~ за которое вел. проехал
AB.

t_m - время, за которое мотоц. проехал
AB

$$1) V_b t_b = V_m t_m, \text{ но } t_b = t_m + 2$$

$$V_b t_b = V_m (t_b + 2)$$

$$2) V_b (t_b + 2) = V_m t_b - 96$$

$$V_b t_b = V_m t_b + 2V_b - 96$$

$$2V_m - 2V_b = 96$$

$$V_m - V_b = 48$$

$$3) \frac{V_b t_b}{V_b + 6} = \frac{V_b t_b}{V_m + 6} + \frac{5}{4}$$

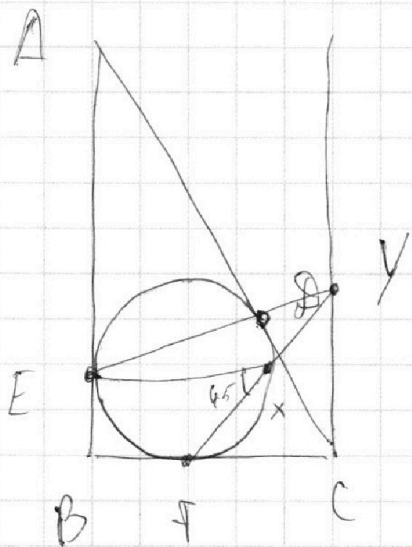
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle EXF = \angle EDF = \angle EFB = 45^\circ$$

①: Вычислено $\angle DXF$

②: Угол между касательной и хордой

③ $BE = BF$ как касат., отрезки и $\angle EBF = 90^\circ \Rightarrow \angle EFB = 45^\circ$

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{EX}{XY} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{EX}{XY} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{XY}{EX} = \sin 135^\circ$$

$$= \frac{XY \cdot XF}{EX \cdot YF} = \frac{XD \cdot YE}{EX \cdot YF}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порядок QR-кода недопустим!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} \quad \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

$$\begin{array}{r} 152 \cdot 339 \\ 339 \\ \hline 152 \\ 678 \end{array}$$

$$\frac{7}{3} \quad \frac{10}{100} = 630$$

$$\begin{array}{r} 1895 \\ 339 \\ \hline 51528 \end{array}$$

N3

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

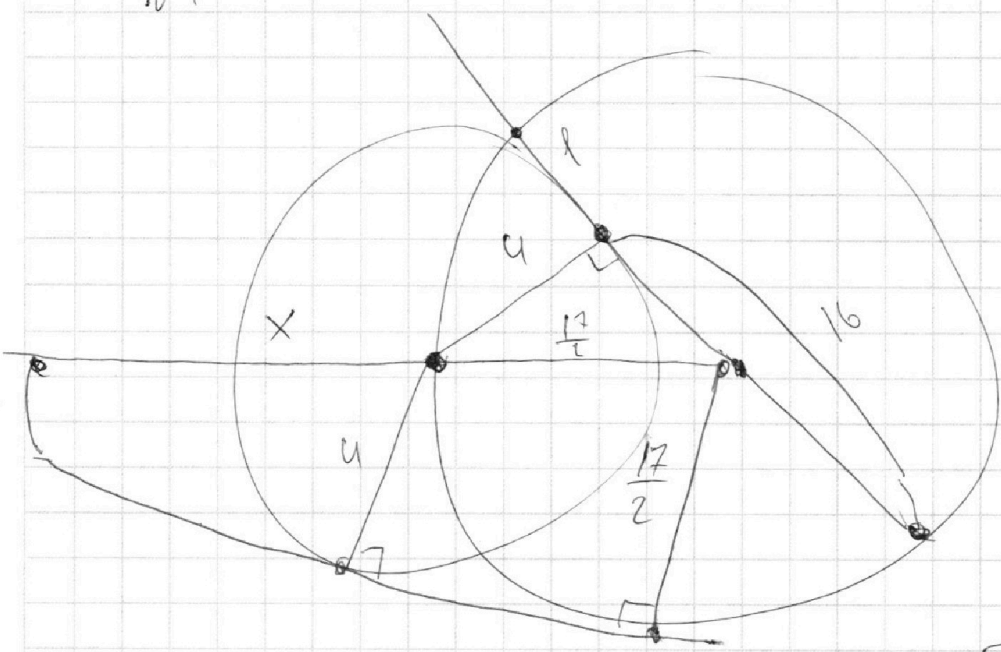
$$\sqrt{3} - \sqrt{8} =$$

$$\begin{aligned} & 2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 - \sqrt{\dots} = \\ & = 1-8x+16x^2 \end{aligned}$$

N4

$$1936$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 17 \overline{) 121} \\ \underline{16} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$



$$\begin{aligned} \frac{4}{17} &= \frac{x}{2x+17} \\ 8x+68 &= 17x \\ 9x &= 68 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 51528 \\ 1936 \end{array}$$

$$49592$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$ab: 3^{11} 7^{11}$$

$$k: 3^{18} 7^{16}$$

$$ae: 3^{21} 7^{38}$$

№2

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$abc: 3^{25} 7^{38}$$

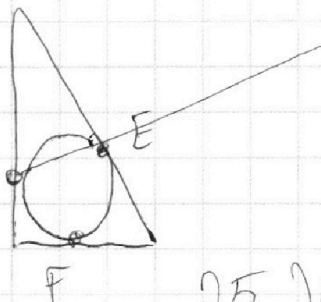
$$a+b$$

$$V_a + V_b \geq 11$$

$$V_b + V_c \geq 18$$

$$V_a + V_c \geq 21 \quad 14 - 54$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ -40 \\ \hline 25 \end{array}$$

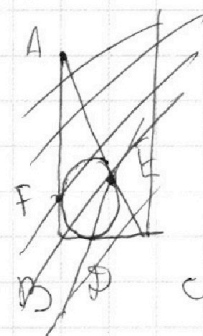


$$25 - V_c = 11$$

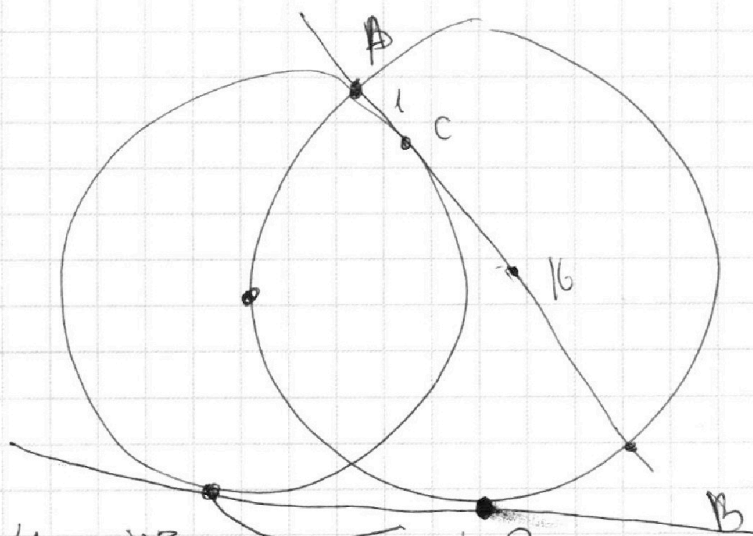
$$V_c = 14$$

$$V_a = 7$$

$$V_b = 4$$



$$a+b, ab$$



$$\begin{array}{l} 32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 \\ 32x^3 + 32x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Omega \\ x+1 \end{array}$$

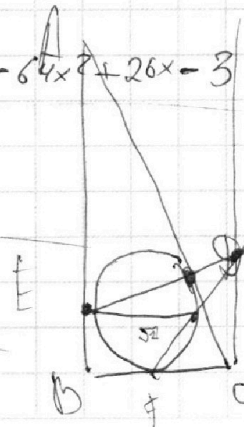
$$-64x^3 - 38x^2$$

$$-64x^3 - 64x^2$$

$$26x^2 + 23x$$

$$26x^2 + 26x$$

$$-3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S \quad V_b \quad V_m \quad t_b \quad t_m$$

$$\frac{S}{V_b} = \frac{S}{V_m} + 2$$

$$V_b (t_b) = V_m (t_b - 2)$$

$$V_b (t_b - 2) = V_m \cdot t_b - 96$$

$$\cancel{V_b t_b - 2V_b = V_m t_b - 96}$$

$$\cancel{V_b t_b - 2V_b = V_m t_b - 96}$$

$$V_b t_b = V_m t_b - 2V_b$$

$$V_b t_b = V_m t_b + 2V_b - 96$$

$$2V_b - 96 = -2V_m$$

$$V_b - V_m = 48$$

$$V_m - V_b = 48$$

$$V_b t_b = 48 t_b + V_b t_b - 2V_m$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 76 \\ 76 \\ \hline 456 \\ 532 \\ \hline 5776 \end{array}$$

$$5776 - 176$$

$$5600$$



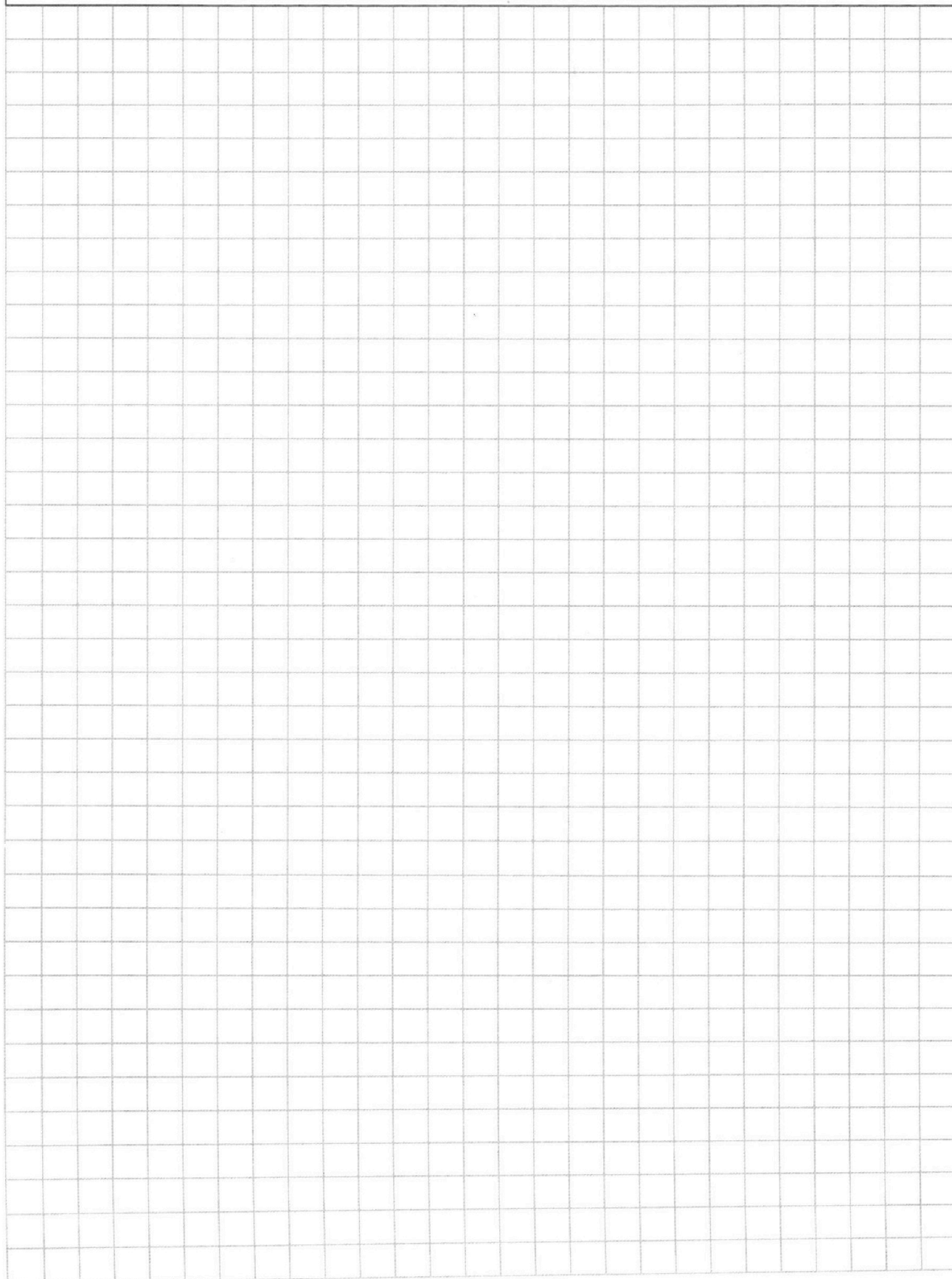
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

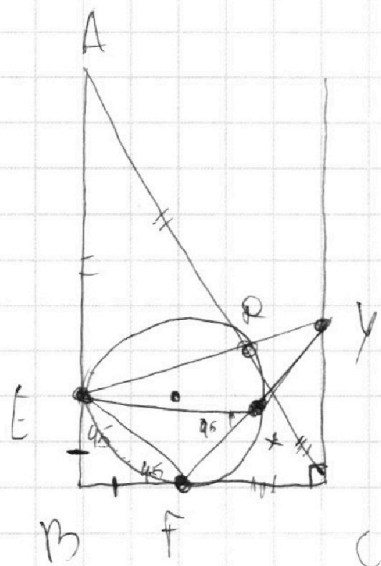
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{EX}{XY} = 2\sqrt{2} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{XY}{EX} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2}$$

$$\frac{XY}{EX} = \frac{\sin 45}{2}$$

$$XY \cdot FX = S_{EXF}$$

$$\frac{EF}{\sqrt{2}} = R$$

$$2\sqrt{2}EF = R$$

$$2\sqrt{2}EF = R$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$3 + \frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$6y^2 + 9xy + 3x^2 = 0$$

$$2y^2 + 3xy + x^2 = 0$$

$$z(3y+x) = 2xy$$

$$(3x+2y)(3y+x) = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2yx = 2xy$$

$$9y^2 - 8y^2 = y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - 1 = \sqrt{2x^2 - 3x + 3} - 4x$$
$$2x^2 - 3x + 5 = 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 16x^2 + x + 3 -$$
$$- 2\sqrt{2x^2 + x + 3}$$
$$16x^2 + 4x - 2$$

$$8x^2 + 2x - 1 = \sqrt{2x^2 + x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$8x^2 + 2x - 1 = 4x - 1$$

$$8x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = 4 + \frac{13}{2} - 3$$

$$\begin{array}{r} 32x^3 - 64x^2 + 26x - 3 \\ 32x^3 - 8x^2 \end{array} \Bigg| x - \frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} 32x^2 + 56x + 12 \end{array}$$

$$= 56x^2 + 26x$$

$$- 56x^2 + 14x$$

$$8x^2 - 14x + 3$$

$$12x - 3$$

$$D = 196 - 96 = 10$$

$$x = \frac{14 + 10}{16} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$