



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 13

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ .

- [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
- [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 8 *Триумф*  $ab = 3^{11} \cdot 7^{11}$ ;  
 $bc = 3^{18} \cdot 7^{16}$ ;  
 $ac = 3^{21} \cdot 7^{38}$

Тогда  $a^2 b^2 c^2 = 3^{50} \cdot 7^{55} \Rightarrow abc = 3^{25} \cdot 7^{28} \cdot k$ ,  
где  $k$  - натуральное число

Значит,  $abc \geq 3^{25} \cdot 7^{28}$

Заметим, что  $ac : 7^{38} \Rightarrow abc : 7^{38} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

Пример:  $a = 3^7 \cdot 7^{19}$ ;  $b = 3^4 \cdot 7^{16}$ ;  $c = 3^{14} \cdot 7^{19}$

$$\begin{aligned} ab &= 3^{11} \cdot 7^{19} : 3^{11} \cdot 7^{19} \\ bc &= 3^{18} \cdot 7^{16} : 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac &= 3^{21} \cdot 7^{38} : 3^{21} \cdot 7^{38} \end{aligned}$$

Ответ:  $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 2  $\exists$  числа  $a+b=mk$ ;  $a^2-8ab+b^2=mn$

$$\begin{cases} a = mk - b \\ a^2 - 8ab + b^2 = mn \end{cases} \Rightarrow (mk - b)^2 - 8(mk - b)b + b^2 = mn$$

$$m^2k^2 - 2mkb + b^2 - 8mkb + 8b^2 + b^2 = mn$$

$$m^2k^2 - 10mkb + 10b^2 = mn$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2k^2 : m \\ 10mkb : m \\ mn : m \\ m^2k^2 - 10mkb + 10b^2 : m \end{array} \right. \Rightarrow 10b^2 : m$$

Существует простое  $p$  такое, что  $m:p$ ;

$$b^2 : p \Rightarrow b : p \text{ (т.к. } p \text{-простое)}$$

тогда  $\frac{a+b}{b} : p \Rightarrow a:p \Rightarrow$  число  $\frac{a}{b}$  можно сократить  
на  $p$

типовое.

Значит,  $\text{НОД}(b^2; m) = 1 \Rightarrow 10:m \Rightarrow m \leq 10$

Пример чисел  $m=10$ :  $a=1$ ;  $b=3$

~~$a+b$~~   $\frac{a}{b} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$  - несократимая

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{10}{1-72+81} = \frac{10}{10} = 1$$

Ответ:  $m=10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$$

$$2x^2 - 3x + 4 - (2x^2 + x + 3) = 1 - 4x \sqrt{2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + x + 3}$$

$$1 - 4x = 1 - 4x \left( \sqrt{2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} + \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} \right)$$

$$1 - 4x = 0$$

⇒

$$\sqrt{2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} + \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ \sqrt{2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} + \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

≥ 0

$$(1): \text{ Заметим, что } \begin{cases} 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq \frac{23}{8} \\ 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq \frac{23}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} \geq \sqrt{\frac{23}{8}} \\ \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} \geq \sqrt{\frac{23}{8}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} + \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} \geq$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{23}{8}} > 2 > 1$$

Значит, уравнение (1) не имеет решений

Ответ:  $x = \frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

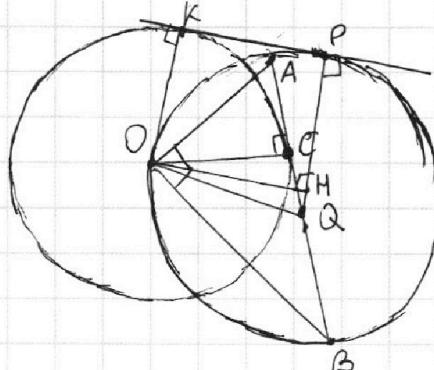
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



Тусыг  $O$ -центр  $\omega$ ;

$Q$ -центр  $\Omega$ ;

$KP$ -общая касательная;  
 $K \in \omega$ ;  $P \in \Omega$

1)  $AB$ -диаметр  $\Omega$   $\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$

2)  $Q$ -центр  $\Omega$   $\Rightarrow AQ = QB$   
 $AB$ -диаметр  $\Omega$   $\Rightarrow AQ = QB$

3) В трапеци.  $\triangle AOB$ :  $AQ = QB = OQ = \frac{16+1}{2} = 8,5$   
 $OQ = QP$  (радиусы  $\Omega$ )  $\approx 8,5$

4)  $AB$ -касаг. к  $\omega \Rightarrow OC \perp AB \Rightarrow OC$ -бисектриса в трапеци.  $\triangle AOB$   
 $\Rightarrow OC^2 = AC \cdot CB \Rightarrow OC = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{16} = 4$

$OC = Ok$  (радиус  $\omega$ )  $= 4$

5) доказываем  $OH \perp PQ$

$OH$  РК-направл-ник  $\Rightarrow OH = kP$ ;  $Ok = HP = 4$

6)  ~~$HQ = PQ - HP = 8,5 - 4 = 4,5$~~

по т. Пифагора в  $\triangle OHQ$ :  $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2}$

$OH = \sqrt{(8,5)^2 - (4,5)^2} = \sqrt{72,25 - 20,25} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} = kP$

Ответ:  $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓  
6 түсінб  
 $y$ -скорость велосипедиста;  
 $x$ -скорость мотоциклиста;  
 $S$ -расстояние между А и В

$$\text{мото: } \begin{cases} \frac{S}{y} = \frac{S}{x} + 2 \\ x \cdot \frac{S}{y} = y \cdot \frac{S}{x} + 36 \Leftrightarrow \\ \frac{S}{y+6} = \frac{S}{x+6} + 1,25 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{S}{x-y} = 2 \\ S \frac{x-y}{xy} = 36 \Leftrightarrow \\ S \frac{x^2-y^2}{xy} = 36 \Leftrightarrow \\ S \frac{x-y}{(x+6)(y+6)} = 1,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \frac{2xy}{x-y} & (1) \\ S = \frac{36xy}{(x-y)(x+y)} & (2) \\ S = \frac{1,25(x+6)(y+6)}{x-y} & (3) \end{cases}$$

$$U_3 (1) \text{ и } (3): \frac{2xy}{x-y} = \frac{36xy}{(x-y)(x+y)}$$

$$x \neq y \neq 0 \Rightarrow \frac{48}{x+y} = 9 \Rightarrow x+y = 48$$

$$U_3 (1) \text{ и } (2): \frac{2xy}{x-y} = \frac{1,25xy + 4,5x + 7,5y + 45}{x-y}$$

$$0,75xy = 7,5(x+y) + 45$$

$$x+y=48 \Rightarrow 0,75xy = 405 \Rightarrow \cancel{xy=60} \quad xy=540$$

$$\begin{cases} x+y=48 \\ xy=540 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 48^2 - 4xy \\ xy=540 \end{cases}$$

$$(x-y)^2 = 2304 - 2160$$

$$x-y=12$$

Последив б 6 (1), получим.  
Ответ: 90 км

$$S = \frac{2 \cdot 540}{12} = 90 \text{ (км)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                               |                               |                               |                               |                               |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1<br><input type="checkbox"/> | 2<br><input type="checkbox"/> | 3<br><input type="checkbox"/> | 4<br><input type="checkbox"/> | 5<br><input type="checkbox"/> | 6<br><input type="checkbox"/> | 7<br><input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$U_B = x$$

$$U_M = y$$

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

$$\frac{S}{U_M} = \frac{S}{U_B + 2}$$

$$2xy = \frac{36xy}{(x-y)(x+y)}$$

$$\frac{13}{750} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{450}$$

$$2x^2y + 2xy^2 = 36xy$$

$$2x + 2y = 36$$

$$48 - x = \frac{96-3x}{2} \Rightarrow S\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 2$$

$$S\left(\frac{x-y}{xy}\right) = 2$$

$$\frac{xy}{x-y} > 2 \Rightarrow S = \frac{2xy}{x-y}$$

$$\frac{S}{U_M + 6} = \frac{S}{U_B + 6} + 1,25$$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} = \frac{S}{x} + 2 \\ x \cdot \frac{S}{y} = y \cdot \frac{S}{x} + 36 \\ \frac{S}{y+6} = \frac{S}{x+6} + 1,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} = S + 2x \\ \frac{S}{y} = \frac{yS}{x} + 36 \Rightarrow S\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = 36 \\ \frac{S}{y+6} = \frac{S}{x+6} + 1,25 \end{cases}$$

$$S = \frac{36}{\frac{(x-y)(x+y)}{xy}} = 36$$

$$S = \frac{36xy}{(x-y)(x+y)}$$

~~$$\frac{S}{y} = S + 2x$$~~

~~$$\frac{S}{y} = \frac{4S}{x} + 36$$~~

$$xS + 6S = yS + 6S + 1,25xy + \sqrt{2}$$

$$y = \frac{S}{\frac{S}{x} + 2} = \frac{S}{\frac{S+2x}{x}} = \frac{Sx}{S+2x}$$

$$\frac{S}{750} \times \frac{6}{30} = \frac{3}{450}$$

$$\frac{1,25}{750} \times \frac{6}{30} = \frac{1,25}{450}$$

$$\frac{S}{\frac{Sx}{x+6} + 6} = \frac{S}{x+6} + 1,25$$

$$\frac{S^2 + 2Sx}{Sx + 6S + 12x} = \frac{S}{x+6} + 1,25$$

$$S^2x + 2Sx^2 + 6S^2 + 12Sx = S^2x + 6S^2 + 12Sx + 125Sx^2 +$$

$$+ 7,5Sx + 15x^2 + 7,5Sx + 45S + 90x$$

$$2Sx^2 = 1,25Sx^2 + 15Sx + 15x^2 + 45S + 90x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 48 - x \\ S = \frac{2xy}{x-y} \\ \frac{S}{y+6} = \frac{S}{x+6} + 1,25 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 18440 \\ - 2880 \\ \hline 15560 \end{array} \quad \begin{array}{r} 22320 \\ - 2304 \\ \hline 20016 \end{array}$$

~~y < 0~~

$$\frac{S}{54-x} = \frac{S}{x+6} + 1,25$$

$$S \left( \frac{x+6 - 54+x}{48x - x^2 + 324} \right) = 1,25$$

$$S = \frac{60x - 1,25x^2 + 405}{2x - 48}$$

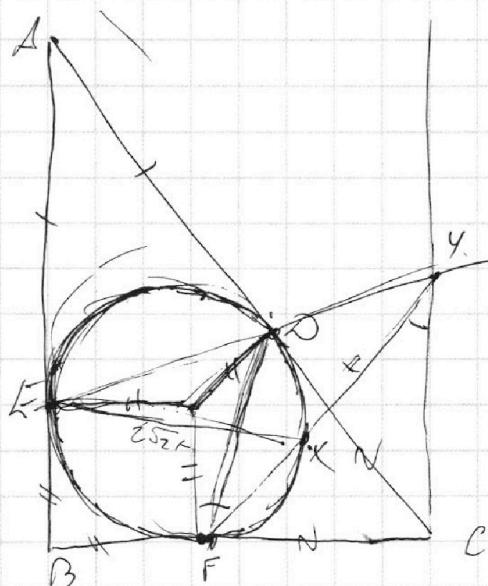
$$S = \frac{2x(48-x)}{x-48+x} = \frac{96x^2 - 2x^2}{2x-48} = \frac{48-x^2}{x-48}$$

$$\frac{48-x^2}{x-48} = \frac{60x - 1,25x^2 + 405}{2x-48} \quad | \cdot (2x-48)(x-48)$$

$$(48-x^2)(2x-48) = (60x - 1,25x^2 + 405)(x-48)$$

$$96x - 2304 - 2x^3 + 48x^2 = 60x^2 - 1,25x^3 + 405x - 2880 + 60x^2 - 13440$$

$$0,75x^3 + 72x^2 + 305x - 20016 = 0$$



$$3x+2y=2 \quad \frac{2}{3x+2y} = \frac{3}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2}$$

max - ?

$$2\sqrt{8} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}, 4 = 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$$

при  $x = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \sqrt{2x^2 + x + 3}$$
$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3$$
$$4x = 8$$
$$x = \frac{2}{1}$$

$$2x^2 - 3x + 4 - \sqrt{2x^2 + x + 3} = (1 - 4x) \left( \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} \right)$$

$$1 - 4x = (1 - 4x)(\dots)$$

$$1 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$$

$$\sqrt{2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} + \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}} = 1$$
$$\geq \sqrt{\frac{23}{8}}$$

$$\sqrt{+} \geq 2\sqrt{\frac{23}{8}} > 2 > 1$$

16.17

16.17

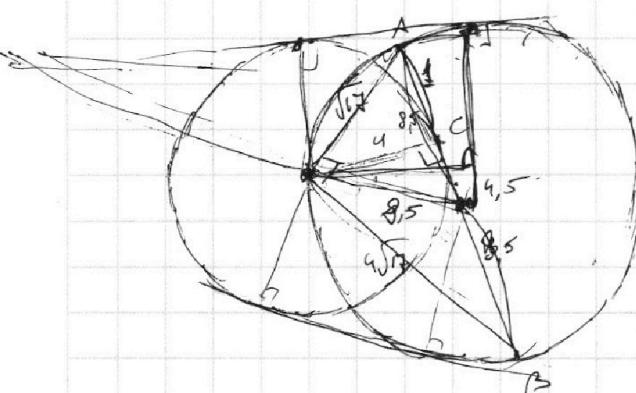
22

$$\begin{array}{r} 8,5 \\ \times 4,5 \\ \hline 42,5 \\ 32,0 \\ \hline 38,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ \times 8,5 \\ \hline 22,5 \\ 36,0 \\ \hline 38,25 \end{array}$$

$$(8,5)^2 - (4,5)^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{38,25 - 20,25} = \sqrt{62} = \sqrt{2 \cdot 31} \\ &= \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{1} ab: 3^2 7^1 \quad a^2 b^2 c^2 : 3^5 7^{55} \Rightarrow abc: 3^{25} 7^{28}$$

$$bc: 3^8 7^{16}$$

$$ac: 3^{21} 7^{38}$$

$$\begin{aligned} ab &= 3^2 7^1 \\ bc &= 3^8 7^{16} \\ ac &= 3^{21} 7^{38} \end{aligned}$$

$$\text{если } abc \not\in 3^{25} : 3^{24}, \text{ то } a^2 b^2 c^2 \not\in 3^{50}$$

$$\rightarrow a^2 b^2 c^2 = 3^{50} 7^{55} \times xyz$$

$$\begin{cases} a+b=11 & 21-a=18-b \\ b+c=18 & 18-11+a=7+a \\ a+c=21 & 21-a=4+a \\ a=7+a & a=7 \end{cases}$$

$$\cancel{abc=25} \quad b=4$$

$$c=14$$

$\frac{a}{b}$  -шестая.

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 6ab}$$

$m_{\max} - ?$

$$\begin{cases} a+b=12 & 38-a=18-b=16-12+a \\ b+c=16 & 38-a=4+a \\ a+c=38 & a=4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a+b = m k &\Rightarrow a = mk - b \\ a^2 - 8ab + b^2 = mn & (mk-b)^2 - 8(mk-b)b + b^2 = m^2 k^2 - 2mkb + b^2 - \\ - 8mkb + 8b^2 + b^2 &= m^2 k^2 - 10mkb + 10b^2 \\ m^2 k^2 - 10mkb + 10b^2 &\leq mn \Rightarrow 10b^2 \leq m \end{aligned}$$

$$\cancel{b^2 \leq m}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} a &\equiv p \\ b &\equiv m-p \end{aligned}$$

$$lcm(b^2 : m) \leq m^{\frac{1}{2}} = \frac{10}{10} = 1$$

$$p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} + p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} = p_1^{\frac{\alpha_1}{2}}$$

расчетный предел  $p$  такой, что  $p^{\frac{\alpha_1}{2}} (p^{\frac{\alpha_2}{2}} + 1) m : p \Rightarrow$

$$b^2 : p$$

$$a+b : m$$

$$m : p$$

$$b : p$$

$$\Rightarrow a : p \Rightarrow \frac{a}{b} \text{ сократила } b \text{ на } p \quad \times$$

$$\text{значит, } \frac{1000}{b^2 : m} = 3 \Rightarrow 10 : m \Rightarrow m_{\max} = 10$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$(10, 75)^2 = 200000 - 150000 = 50000$$

$$\sqrt{(2x^2 - 1,5x + 2)^2} - \sqrt{2(x^2 + 0,5x + 1,5)} = 1 - 4x$$

$$\frac{525}{3\sqrt{5}} = \sqrt{4375}$$

$$\sqrt{(2(x-0,75)^2 + 1,75)^2} - \sqrt{2(x+0,25)^2 + 2,25} = 1 - 4x$$

$$\frac{525}{6\sqrt{2}} = \frac{525}{12}$$

$$\left[ 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} \right] - \left[ 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} \right] = 1 - 4x$$

$$2 - \frac{9}{16} = \frac{32}{16} - \frac{9}{16} =$$

$$\left[ 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \right] - \left[ 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \right] = 1 - 4x$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{16} = \frac{24}{16} - \frac{1}{16} = \frac{23}{16}$$

$$\frac{23}{8} - \frac{4}{8} = \frac{23}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 60 \\ x + y = 48 \end{cases}$$

$$x = 48 - y$$

$$(48 - y)y = 60$$

$$48y - y^2 - 60 = 0$$

$$y^2 - 48y + 60 = 0$$

$$\Delta_1 = 24^2 - 60 = 576 - 60 = 516$$

$$(x+y)^2 = 48^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2304 \quad | - 4xy$$

$$(x-y)^2 = 2304 - 4xy$$

$$(x-y)^2 = 2304 - 2160$$

$$(x-y)^2 = 2064$$

$$x-y = 4\sqrt{123}$$

$$S = \frac{2xy}{4\sqrt{123}} = \frac{96}{4\sqrt{123}} = \frac{24}{\sqrt{123}}$$

$$(x-y)^2 = 444$$

$$x-y = 12$$

$$\frac{1980}{12} =$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 196 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 48 \\ 48 \\ \hline 1384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2064 \\ 1032 \\ 556 \\ 258 \\ 129 \\ 43 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2304 \\ 2160 \\ \hline 144 \\ 96 \\ \hline 44 \\ 36 \\ \hline 24 \\ 14 \\ \hline 10 \\ 8 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$4\sqrt{123}$$

$$\begin{array}{r} 244 \\ 122 \\ 61 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ 728 \\ \hline 352 \\ 352 \\ \hline 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + 2y = 8$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - 3x^2 - 6xy + 4y^2}{x^2 - 6y^2} = 405 \text{ } \cancel{10,75}$$

$$= \frac{-6x^2 - 6xy - 8y^2}{x^2 - 6y^2} \quad \begin{array}{l} \cancel{16x(x+y)} \\ \cancel{x^2 + 6y^2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times 48 \\ \hline 600 \\ 3600 \\ \hline 4500 \end{array} \quad \cancel{10,75}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 2 \\ \frac{S}{y+6} - \frac{S}{x+6} = 1,25 \end{array} \right.$$

$$S \frac{x-y}{xy} = 2 \quad \begin{array}{r} 600 \\ \cancel{300} \\ 3600 \end{array}$$

$$S \frac{x-y}{(x+6)(y+6)} = 1,25$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 75 \\ \hline 375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2xy \\ \hline x-y \end{array} = \frac{1,25xy + 7,5x + 7,5y + 45}{xy}$$

$$2xy = 1,25xy + 7,5x + 7,5y + 45$$

$$0,75xy = 7,5x + 7,5y + 45$$

$$0,75xy = 360 + 45$$

$$0,75xy = 405$$

$$xy = 60$$

$$\begin{array}{r} 40500 \\ \times 75 \\ \hline 30000 \\ \cancel{30000} \\ 375 \end{array}$$