



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1 стр 1.

~~$2^{14} \cdot 4^{10}$~~   $ab : 2^{14} \cdot 4^{10} \quad bc : 2^{14} \cdot 4^{14} \quad ac : 2^{20} \cdot 4^{34}$

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 4^{\beta_1} \cdot a'; (a'; 2) = 1; (a'; 4) = 1$ .

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 4^{\beta_2} \cdot b'; (b'; 2) = 1; (b'; 4) = 1$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 4^{\beta_3} \cdot c'; (c'; 2) = 1; (c'; 4) = 1$

если  $ab : 2^{14} \cdot 4^{10}$ , то  $ab : 2^{14}$  и  $ab : 4^{10}$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 14 \quad \beta_1 + \beta_2 \geq 10$$

аналогично для двух других кратностей:

$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14, \beta_2 + \beta_3 \geq 14; \alpha_1 + \alpha_3 \geq 20; \beta_1 + \beta_3 \geq 34$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 14 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 51 \\ \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{51}{2} \end{cases}$$

(имеем право складывать)  $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 26$  (т.к.  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  равны нулю)

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 14 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 34 \end{cases} \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 64 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 32$$

(имеем право складывать)

Потом, что  $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 4^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot a' \cdot b' \cdot c'$

$abc \geq 2^{26} \cdot 4^{32}$

а если  $a' = b' = c' = 1$

Так в итоге ~~Равенство достигается при~~

~~$a = 2^{14} \cdot 4^{10}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МТФР2  
Теперь поймём, что мы плохо оценили  
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$  (равенство не достигается,  
т.к.  $\beta_1 + \beta_3 \geq 34$ ), тогда  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$

$$\text{Т.е. } abc \geq 2^{26} \cdot 4^{34} \quad (\text{при } a' = b' = c' = 1)$$

Равенство при  $a = 2^{10} \cdot 4^{20}$ ,  $b = 2^8 \cdot 4^0$ ,  
 $c = 2^{10} \cdot 4^{14}$  (все условия выполнены, мы это  
уже видели ранее)

$$\text{Т.е. } abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow (a, b) = 1$

мы хотим посчитать  $(a+b; a^2-6ab+b^2)$

Т.к эту дробь можно сократить не более чем на НОД числителя и знаменателя.

$$a^2-6ab+b^2 = (a+b)(a-4b) + 8b^2$$

Значит руководствуясь алгоритмом Евклида получаем, что

$$(a+b; a^2-6ab+b^2) = (a+b; 8b^2)$$

$$(a+b; b) = (a; b) = 1 \Rightarrow \text{и } (a+b; b^2) - \text{взр.}$$

Значит  $(a+b; 8b^2) \leq 8$  и кратно

выясняется  $(a+b; 8b^2) = \cancel{x}$  и  $\cancel{x} \leq 8$ ,  $8: \cancel{x}$ .

и  $x=8$  для  $a+b:8$ .

т.е.  $m \leq 8$   $m=8$  например при  $a=1, b=4$

$$\left( \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{49-42+1} = \frac{8}{8} \right) \text{ можно сократить на } 8$$

Ответ:  $m=8$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3 стр1

степень точки

В отн окр  $\omega$   
равна  $BC^2$ , т.к.

$BC$  - касательная,  
но также  
 $\text{pow } B_{\omega} = BO_2^2 - R_{\omega}^2 =$   
 $= BO_2^2 - 1$

аналогично

для Т. А:

$\text{pow } A_{\omega} = AC^2$

$\text{pow } A_{\omega} = AO_2^2 - R_{\omega}^2 =$   
 $= AO_2^2 - 1$

Значит:

$$BC^2 = BO_2^2 - 1$$

$$AC^2 = AO_2^2 - 1$$

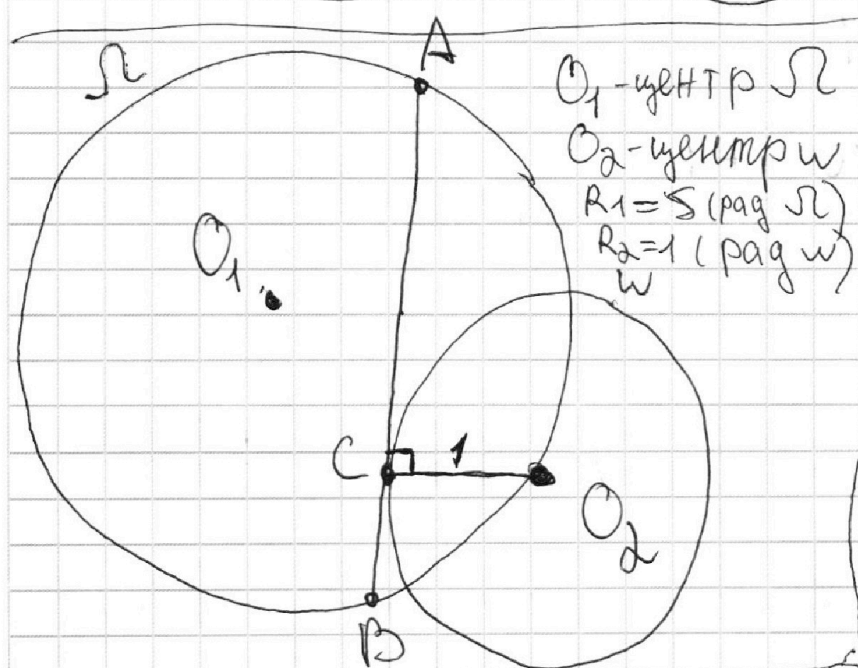
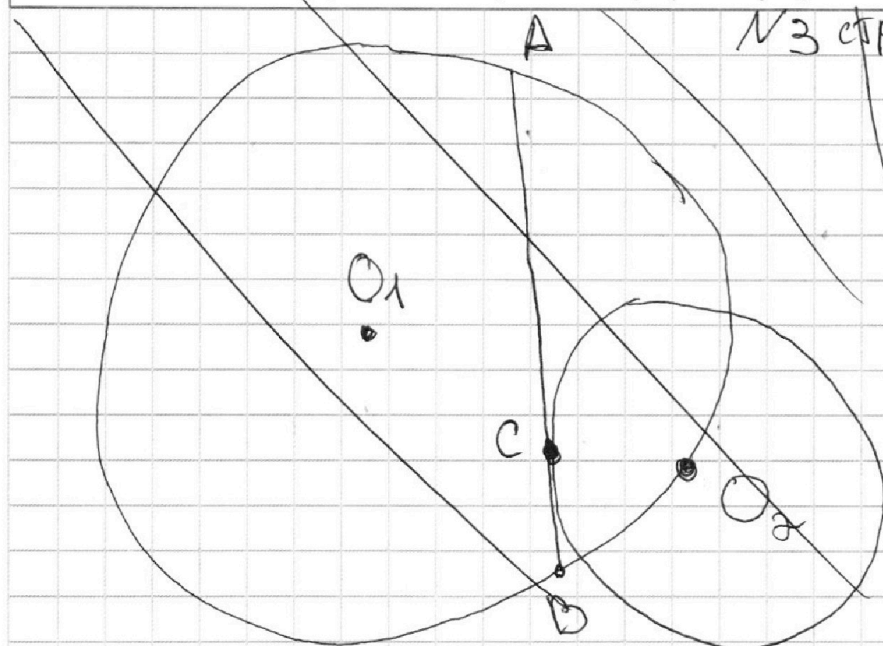
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AO_2^2 - 1}{BO_2^2 - 1}$$

но по условию  $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AO_2^2 - 1}{BO_2^2 - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow AO_2^2 - 1 = \frac{1}{2}(BO_2^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AO_2^2 = \frac{1}{2}BO_2^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow AO_2^2 = \frac{1}{2}(BC^2 + 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}BC^2$$

т.к.  $O_2$  - центр  $\omega$ , а  $AB$  касательная в т.  $C \Rightarrow CO_2 \perp AB$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



тогда  $O_2C$  - высота  $\triangle ACO_2B$ .  

$$S_{AO_2B} = \frac{O_2C \cdot AB}{2} = \frac{O_2C \cdot (AC + BC)}{2} = \frac{O_2C \cdot 8BC}{2} = 4BC$$
 (т.к.  $O_2C = R_2 = 1$ )

с др. стороны  

$$S_{AO_2B} = \frac{AO_2 \cdot BO_2 \cdot \sin \angle AO_2B}{2} \quad (\angle AO_2B = \alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} AO_2 &= \sqrt{49BC^2 + 1} \\ BO_2 &= \sqrt{BC^2 + 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AO_2B} = \frac{\sqrt{49BC^2 + 1} \cdot \sqrt{BC^2 + 1}}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AO_2B} = \frac{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}{2} \cdot \sin \alpha$$

тогда  

$$4BC = \frac{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$8BC = \sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{8BC}{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}$$

Хорда  $AB$  окружности может быть выражена  
 через  $\angle \alpha$  и  $R_1$ , а именно  $AB = 2R_1 \cdot \sin \alpha$ .

$$AB = 8BC \text{ (по условию)} \Rightarrow 8BC = 2 \cdot 5 \cdot \frac{8BC}{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}$$

поделим все на  $8BC$  ( $BC \neq 0$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 1}{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1} = 20$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 стр 3.

возведем в кв, т.к.  $AB$  и  $BC$  и  $AC > 0$ .

$$49BC^4 + 50BC^2 + 1 = 400 \Rightarrow 49BC^4 + 50BC^2 - 399 = 0$$

$$BC^2 = t, t > 0 \Rightarrow 49t^2 + 50t - 399 = 0.$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 399 = 80404$$

$$t = \frac{-50 + \sqrt{80404}}{98} \quad (\text{т.к. } t > 0)$$

$$t = \frac{-50 + 16\sqrt{34}}{98} = \frac{-25 + 8\sqrt{34}}{49}$$

$$BC^2 = \frac{-25 + 8\sqrt{34}}{49} \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{8\sqrt{34} - 25}{49}} =$$

$$AB = 8BC = 8\sqrt{\frac{8\sqrt{34} - 25}{49}} = 8\sqrt{\frac{2151}{49}} =$$

$$= \frac{8}{7}\sqrt{2151} = \frac{8}{7} \cdot 3\sqrt{239}$$

$$\text{Ответ: } AB = \frac{24}{7}\sqrt{239}$$

$$49t^2 + 50t - 399 = 0 \Rightarrow (49t + 99)(t - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } t > 0, t = 1 \Rightarrow BC^2 = 1 \Rightarrow BC = 1, \text{ т.к. } BC > 0$$

$$\Rightarrow AB = 8BC = 8.$$

$$\text{Ответ: } AB = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нч.

Очевидно, что  $x=1$  - подходит.  
Возведем в кв (если найденные  $x$   
не входят в ОРЗ откинем их  
сделаем проверку).

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$-45x^2 + 25x = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$(-45x^2 + 25x)^2$  можно возвести  
в кв при  $x \in [0; \frac{5}{9}]$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x + 2x + 1 + 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 40x - 14\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 26 + 4x = 14x\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 + 4x - 26 = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}(14x - 4)$$

$$2401x^4 + 49x^2 + 646 = (2x^2 + 2x + 1)(196x^2 - 112x + 16)$$

$$2401x^4 + 49x^2 + 646 + 686x^3 - 3548x^2 - 364x = (2x^2 + 2x + 1) \cdot x(196x^2 - 112x + 16)$$

$$2401x^4 - 3499x^2 + 686x^3 - 364x + 646 = 392x^4 - 224x^3 + 32x^2 + 392x^3 - 224x^2 + 32x + 196x^2 - 112x + 16$$

Отв:  $x=1$

П.к.  $x=1$  - корень, поделим на  $x-1$  больше корней не получим

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3)$$

$$4(4x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 9x + 3)$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

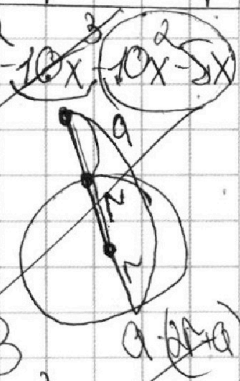
$$2250$$

$$2246$$

$$2246 \overline{) 41}$$

$$2246 \overline{) 41}$$

$$2009 \overline{) 4}$$



$$(a+m)^2 + 2$$



|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

~~$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$~~

ОДЗ:  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(2x-3) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1]; [1.5; +\infty)$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + (x+1)^2} > 0$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

это верно, только когда правая часть не отрицательна.  $\Rightarrow 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \Rightarrow$

$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 4x - 2$

1 случай.  $4x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{4}$ , тогда

при  $x \in (-\infty; \frac{2}{4}]$  нер-во выполняется

2 случай  $4x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{4} \Rightarrow$  можно право возвести в квадрат, т.к. левая часть нер-ва положит.

$2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2 - 28x + 4 \Rightarrow 44x^2 - 30x + 3 \leq 0$

$44 \left( x - \frac{15 + 2\sqrt{21}}{44} \right) \left( x - \frac{15 - 2\sqrt{21}}{44} \right) \leq 0$

$x \in \left[ \frac{15 - 2\sqrt{21}}{44}, \frac{15 + 2\sqrt{21}}{44} \right]$

Т.о мы наложим ограничения на  $x$ . Решим теперь ур-ние



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

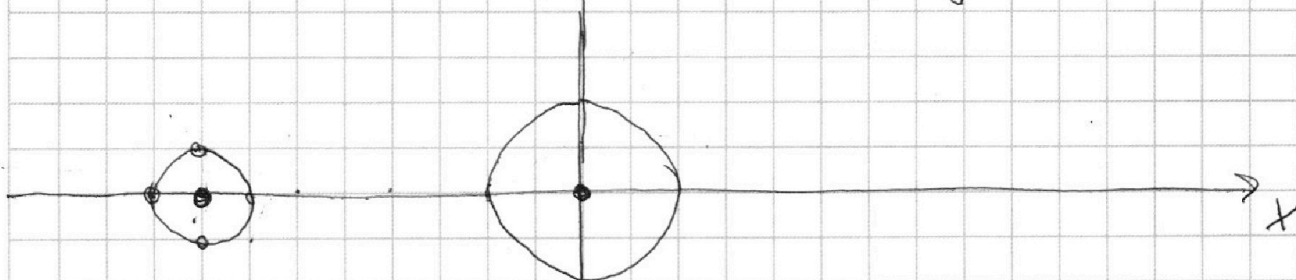
|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6  
Ур-ние системы задает прямую  $ax+10b=y$   
 $(x+8)^2+y^2-1$  - ур-ние окр. с центром  
в т.  $(-8; 0)$  и  $r=1$   
 $x^2+y^2-1$  - ур-ние окр. с центром в т.  $(0; 0)$   
и  $r=1$   
Тогда для всех точек внутри и на границе  
одной из окружностей пер-во будет выполнено,  
т.к. две скобки либо разных знаков, либо одна  
из них ноль. Это удовлетворяет пер-во.



Тогда, т.к. мы хотим, чтобы система  
имела два решения, а первое ур-ние -  
прямая, эта прямая должна быть  
касательной к обеим окружностям (иначе,  
если она пересекает какую-то, то все точки  
лежащие на этой прямой внутри окр. будут являться  
решениями, но их очевидно  $\infty$ ).

~~Если она не к.~~ Т.е. мы можем сделать  
вывод, что



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если прямая пересекает окр, то 2 кол-ва  
реш, если не касается, то 1 решение; соотв  
т.к. нам нужно 2 реш, прямая должна  
касаться обеих окружностей.  
т.е. нужно чтобы  $ax + 10b = y$  было  
ур-нием касательной к обеим окр.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

упадет на середину  $AC$  и  $AB$  соотв,  
в т.  $B_1$  и  $E_1$ .

$\triangle CNB_1 \sim \triangle BIK$  (т.к.  $\angle BKI = \angle CNB_1 = 90^\circ$ ,  
 $\angle NCB_1 = \angle IBK$ )

аналогично  $\triangle BMC_1 \sim \triangle CIL$ .

$\triangle CIN \sim \triangle BIM$ , т.к.  $\angle CIN = \angle BIM$   
 как вертикаль,

$\triangle NAI \sim \triangle XIB$  (аналог) (опир на  $MM$ ).  
 $\angle NCI = \angle MBI$

$$\frac{AI}{IB} = \frac{NA}{XI} \quad (1)$$

$\triangle ACY \sim \triangle AXB$  (т.к.  $\angle CAU = \angle XAB$ ,  
 т.к.  $CU$  - бис-са  $\angle BAC$ ,  
 $\angle ACY = \angle AXB$  (опир на  $AB$ ))

$$\frac{AC}{AX} = \frac{AY}{AB} = \frac{CY}{XB}$$

т.к.  $AU$  - бис-са  $\Rightarrow \frac{CY}{XB} = \frac{AC}{AB}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

М.у. стр 3

$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1} = \frac{KB}{CB_1} \quad (\triangle CNB_1 \sim \triangle BIK)$$

$$\frac{IL}{MC_1} = \frac{CL}{BC_1} = \frac{CI}{BM} \quad (\triangle BMC_1 \sim \triangle CIL)$$

$$\frac{CI}{IB} = \frac{CN}{BM} \quad (\triangle CIN \sim \triangle BIM)$$

$$XI = XC = XB$$

$$CN = NI = NA; \quad AM = BM = MI \quad \text{по лемме о трезугольнике.}$$

$$\frac{IK}{NB_1} = \frac{r}{2}; \quad \frac{IL}{MC_1} = \frac{r}{4,5} \quad \left( \begin{array}{l} \text{т.к. } IK = IL = r \text{ впис} \\ MB_1 = 2; MC_1 = 4,5 \end{array} \right)$$

$$\frac{IB}{NC} = \frac{r}{2}; \quad \frac{CI}{BM} = \frac{r}{4,5}$$

$$IB = \frac{NC \cdot r}{2}; \quad CI = \frac{BM \cdot r}{4,5} \Rightarrow \frac{CI}{IB} = \frac{\frac{BM \cdot r}{4,5}}{\frac{NC \cdot r}{2}} = \frac{BM}{NC} \cdot \frac{4}{9}$$

$$\text{т.к. } \frac{CI}{IB} = \frac{CN}{BM} \Rightarrow \frac{BM}{NC} \cdot \frac{4}{9} = \frac{CN}{BM} \Rightarrow$$

$$\left( \frac{BM}{CN} \right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{3}{2} \quad (\text{т.к. } \frac{BM}{CN} > 0)$$

$$\triangle CNI - \text{р.б} \quad \triangle BMI - \text{р.б}$$

$$\angle NCI = \angle NCA + \angle ACI = \angle NBA + \angle ABM =$$

$$= \angle IBA + \angle ABM = \angle IBM \Rightarrow \angle NIC = \angle BIM$$

$$\Rightarrow \triangle NCI \sim \triangle MBI \Rightarrow \frac{CI}{BI} = \frac{CN}{BM} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BI}{NC} = \frac{N}{2} \Rightarrow \frac{BI}{NI} = \frac{N}{2} \Rightarrow BI = \frac{NI \cdot N}{2}$$

$$\text{В.К. } \frac{CI}{BI} = \frac{2}{3} \Rightarrow BI = \frac{3CI}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3CI = NI \cdot N$$

$$BI = \frac{NI \cdot N}{2}$$

$$\frac{AI}{IB} = \frac{NA}{XI} \quad (1) \Rightarrow AI = \frac{IB \cdot NA}{XI} =$$

$$= \frac{NI \cdot N \cdot NA}{2 \cdot XI} = \frac{NA^2 \cdot N}{2 \cdot XI} = \frac{NA^2 \cdot N}{2 \cdot IB}$$





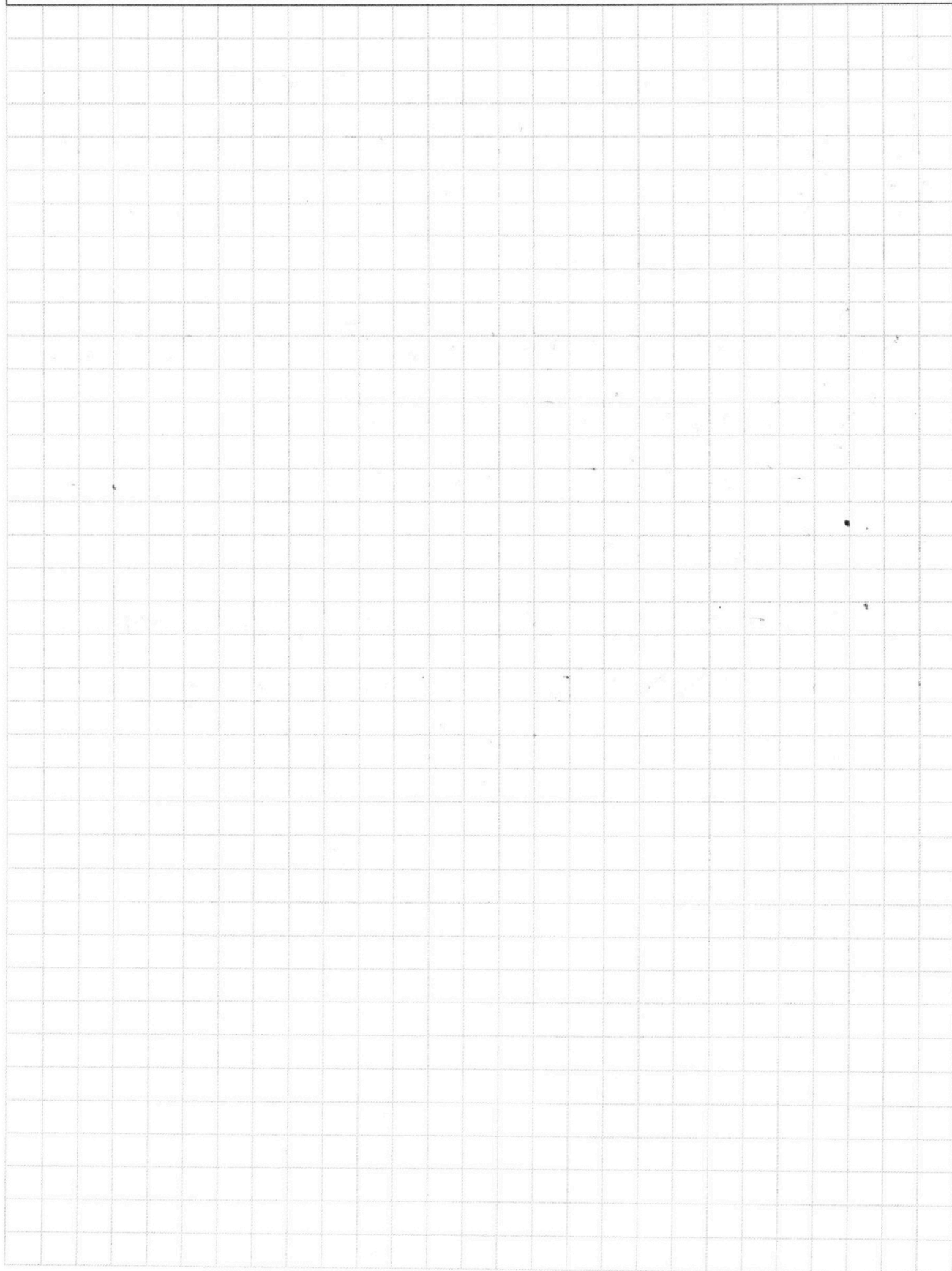
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= 4 - 28x + 49x^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$-45x^2 + 25x = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

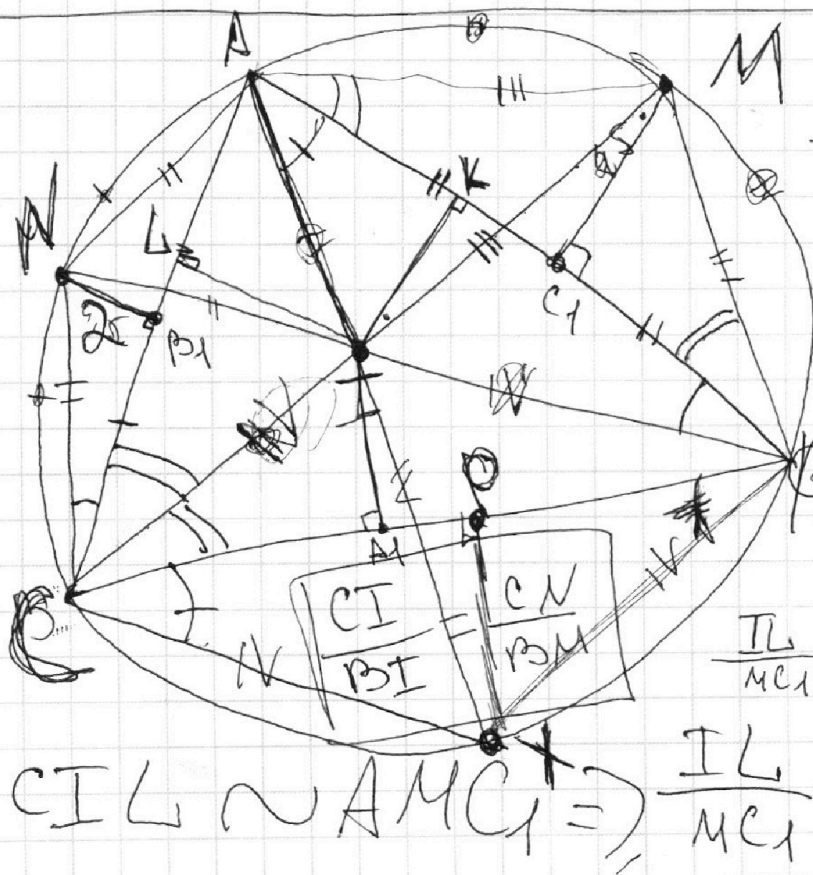
$$-45x^2 + 25x \geq 0 \quad 5(9x^2 - 5x) \leq 0$$

$$9x^2 - 5x \leq 0 \quad x(9x - 5) \leq 0 \quad x \in [0; \frac{5}{9}]$$

$$2025x^4 + 625x^2 - 2250x^3 = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$2025x^4 + 625x^2 - 2250x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$2009x^4 - 2246x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$



$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1}$$

$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1}$$

$$= \frac{KB}{CB_1}$$

$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1} = \frac{KB}{CB_1} = \frac{R}{2}$$

$$\frac{IL}{MC_1} = \frac{CL}{AC_1} = \frac{CI}{AM} = 4,5$$

$$CIL \sim AMC_1 \Rightarrow \frac{IL}{MC_1} = \frac{CL}{AC_1} = \frac{CI}{AM}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



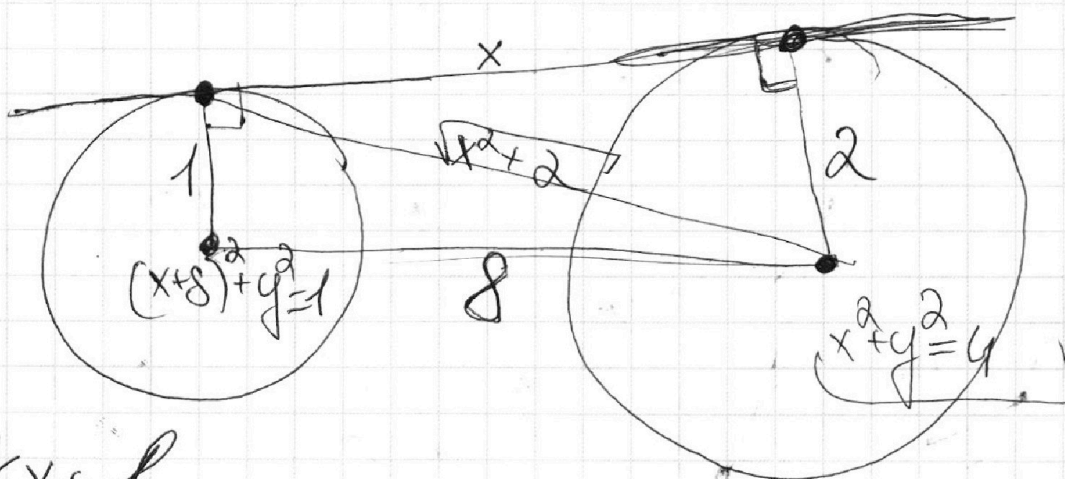
$$\frac{IB}{NC} = \frac{R}{2}, \quad \frac{CI}{BM} = \frac{R}{4,5}$$

$$IB = \frac{NC \cdot R}{2}, \quad CI = \frac{BM \cdot R}{4,5}$$

$$\frac{CI}{IB} = \frac{\frac{BM \cdot R}{4,5}}{\frac{NC \cdot R}{2}} = \frac{BM \cdot R \cdot 2}{4,5 \cdot NC \cdot R} = \frac{BM}{NC} \cdot \frac{4}{9}$$

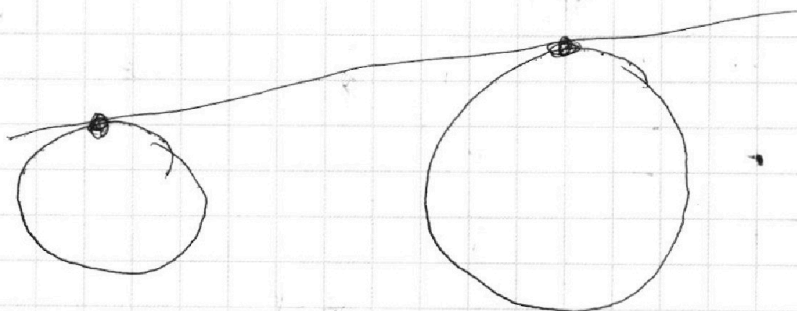
$$\frac{BM}{NC} \cdot \frac{4}{9} = \frac{CN}{BM} \Rightarrow \sqrt{\frac{BM}{CN}} = a \Rightarrow a \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$= \frac{4a}{9} = \frac{1}{a} = 4a^2 = 9 = a^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ (т.к. } a > 0)$$



$$y = kx + b$$

$$kx_1 + b =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x = 1,5$$

$$x = 1$$

$$(x-1)(2x-3)$$

$$900 - 12 \cdot 44$$

$$12 \cdot 44 = 12(48 - 1) =$$

$$12 \cdot 48 - 12 =$$

$$12 \cdot 12 \cdot 4 - 12 =$$

$$(4^3)$$

$$\frac{336}{168} = 2$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{336}{168} = 2$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$\frac{194}{44} = 4 \text{ remainder } 21$$

$$X = \frac{30 \pm 2\sqrt{83}}{44}$$

$$X = \frac{30 \pm 2\sqrt{83}}{44}$$

$$225 - 83$$

$$X = \frac{15 \pm \sqrt{83}}{44}$$

$$44$$

$$(15 + \sqrt{83})(15 - \sqrt{83})$$

$$44 \left( X - \frac{15 + \sqrt{83}}{44} \right) \left( X - \frac{15 - \sqrt{83}}{44} \right)$$

$$X = \frac{15 - \sqrt{83}}{44}$$

$$-15x + \sqrt{83}x$$

$$-15x - \sqrt{83}x$$

$$44x^2 - 44x$$

$$\frac{15 - \sqrt{83}}{44} - \frac{15 + \sqrt{83}}{44}$$

$$\frac{15 - \sqrt{83}}{44} - \frac{15 + \sqrt{83}}{44}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{4y}$$

$$\frac{15 - 2\sqrt{21}}{4y}$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{4y}$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{4y}$$

$$(50-1)^2 = 2500 - 100 + 1$$

$$\frac{15 - \sqrt{84}}{4y}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{AR}$$

$$\frac{AR}{1} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$3499$$

$$3549$$

$$\frac{15 - \sqrt{84}}{4y}$$

$$\frac{15 - \sqrt{84}}{4y}$$

$$15 - 9$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 28$$

$$x \in (-\infty, \frac{2}{y}]$$

$$(\frac{2}{y}, 1)$$

$$1, 5$$

$$15 + 2\sqrt{21}$$

$$x \in (-\infty, \frac{1}{y})$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{4y}$$

$$= 991 \cdot 8 \cdot 8 =$$

$$49^2 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x + 1 - 10\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 28$$

$$49x^2 + 4x + 2 + 2x - 28 = 10\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 + 9x - 26 = 10\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49 \quad 2401x^4 +$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x^2 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 14x$$

$$9651$$

$$9651$$

$$9651$$

$$9651$$

$$9651$$