



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

Заметим, что $ac \geq 7^{37} \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$
Пусть степень входящих 7 в $ac = 37$, т.к.
меньше быть не может (из неравенства)
тогда $ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$

Пусть степень входящих 2^{ki} в число $b =$:

- 1) $0 \Rightarrow$ ст. вх. 2^{ki} в $c \geq 17$; в $a \geq 14$; $\sum$ степеней $2^{ki} \geq 31$
- 2) $1 \Rightarrow 11-11=0$. $c \geq 16$; $a \geq 13$; $\sum \geq 30$
- 3) $2 \Rightarrow \dots c \geq 15$; $a \geq 12 \Rightarrow \sum \geq 29$
- 4) $3 \Rightarrow \dots c \geq 14$; $a \geq 11 \Rightarrow \sum \geq 28$
- 5) $4 \Rightarrow \dots c \geq 13$; $a \geq 10 \Rightarrow \sum \geq 27$
- 6) $5 \Rightarrow \dots c \geq 12$; $a \geq 9 \Rightarrow \sum \geq 26$
- 7) $6 \Rightarrow \dots c \geq 11$; $a \geq 8$, но при минимальных c и a ; $ca = 2^{19} \cdot 7^{26}$
 $\Rightarrow$ 7 пункта быть не может

($c \geq k$; $a \geq m$ знают,
что степень двойки,
входящий в число c и a
 $\geq k$ и m соответств.)

$$\Rightarrow \min \sum \text{ степеней } 2^{ki} \text{ в числе } abc = 26$$

$$\Rightarrow \min abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

пример:

~~$$b = 2^{25} \cdot 7^{17}, a = 2^{12} \cdot 7^{20}, c = 2$$~~

$$b = 2^5; a = 2^9 \cdot 7^{20}; c = 2^{12} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{14} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &= 2^{21} \cdot 7^{37} : 7^{37} \cdot 2^{20} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

нужно $a+b \div k$, тогда $a^2-6ab+b^2 \div k$.

$$(a+b)^2 \div k \Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \div k. & (1) \\ a^2-6ab+b^2 \div k & (2) \end{cases}$$

вычитаем из (2) - (1) $-6ab-2ab \div k$.

$$8ab \div k.$$

$$a+b \div k.$$

нужно $a+b \div 8ab$, тогда $a+b \div a$, но т.к. $(a,b)=1$; $b \nmid a$,
но $a \div a \Rightarrow$ такого быть не может.

тогда нужно $8ab \div a+b$

$$8ab = k(a+b)$$

$$8ab = ka + kb$$

$$b(8a-k) = ka$$

$$b = \frac{ka}{8a-k} \in \mathbb{N}$$

$$b = -a + \frac{8a^2}{8a-k}.$$

$$8a^2 \div 8a-k.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

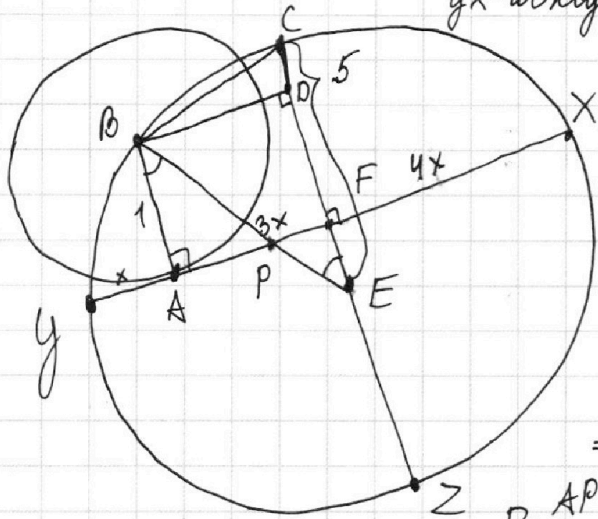
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.



$EC=EB=5$.

$AB=1$.

Пусть $PB=k$.

тогда $AP^2 = PB^2 - AB^2 = k^2 - 1$.

$\triangle BDE \sim \triangle PAB$

$\frac{BD}{PA} = \frac{DE}{AB} = \frac{BE}{PB}$

$\frac{DE}{1} = \frac{5}{k} \Rightarrow DE = \frac{5}{k}$.

$\Rightarrow CD = 5 - DE = 5 \left(\frac{k-1}{k} \right)$

$AP = \sqrt{BP^2 - 1} = \sqrt{k^2 - 1}$

$\frac{BD}{AP} = \frac{BE}{PB} \Rightarrow BD = \frac{5 \cdot \sqrt{k^2 - 1}}{k}$

$BC^2 = BD^2 + DC^2 = \frac{25(k^2 - 1)}{k^2} + 25 \frac{(k-1)^2}{k^2} = \frac{25}{k^2} (k^2 - 1 + k^2 - 2k + 1) = \frac{50(k^2 - k)}{k^2}$

$= \frac{50(k-1)}{k}$ $BD = AF = 3x = \frac{5\sqrt{k^2 - 1}}{k} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{k^2 - 1}}{3k}$

$PE = 5 - BP = 5 - k \Rightarrow \frac{FE}{1} = \frac{PE}{BP} \Rightarrow FE = \frac{5-k}{k}$

$CF = 5 - \frac{5-k}{k} = \frac{6k-5}{k}$

$4x \cdot 4x = CF \cdot FZ = \frac{6k-5}{k} \cdot \left(5 + \frac{5-k}{k} \right) = \frac{(6k-5)(4k-5)}{k^2}$

$16 \frac{25(k^2 - 1)}{(3k)^2} = \frac{(6k-5)(4k-5)}{k^2}$

- Запишем, что это квадратное уравнение относительно k , найдя которое, мы сможем найти $x \Rightarrow$ найдем yx .

$\frac{16 \cdot 25(k^2 - 1)}{9} = \frac{24k^2 - 50k + 25}{1}$

$16 \cdot 25(k^2 - 1) = 9 \cdot 24k^2 - 450k + 225$

$k^2 (16 \cdot 25 - 9 \cdot 24) + 450k - 16 \cdot 25 - 225 = 0$

$184k^2 + 450k - 625 = 0$

$D = 662500 = 5 \cdot 10 \sqrt{265}$

$k = \frac{-450 \pm 50 \sqrt{265}}{368}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ (2x-3)(x-1) \\ + \quad - \quad + \\ \hline 1 \quad 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2x^2+2x+1 \geq 0 \\ D=4-8 < 0 \\ \Rightarrow \text{всегда } > 0 \end{array}$$

Пусть $2x^2+2x+1=a$.

$$\sqrt{a+2-7x} - \sqrt{a} = 2-7x$$

$$\sqrt{a+2-7x} = \sqrt{a} + 2-7x$$

Возведем в квадрат:

$$a+2-7x = a + (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{a}$$

$$(2-7x)^2 + (2-7x)(2\sqrt{a}-1) = 0$$

$$1) \quad 2-7x=0$$

$$x = \frac{2}{7} \quad \text{подставим: } \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 2-2$$

$$2) \quad 2-7x + 2\sqrt{a}-1=0$$

$$7x-2 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} - 1$$

$$7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$\frac{22+4\sqrt{61}}{82} = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{11+16}{41} =$$

$$= \frac{27}{41} - \text{уд. усе.}$$

$$\Rightarrow \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \text{ тоже удов. усе.}$$

Рассмотрим строгую:

$$7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$7x-1 \geq 0$$

$$x \geq \frac{1}{7}; \quad \frac{11-2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} \Rightarrow \text{данный корень отпадает.}$$

Рассмотрим строгую:

$$2-7x+\sqrt{a} = \sqrt{a+2-7x}$$

$$2-7x+\sqrt{a} \geq 0$$

$$7x-2 \leq \sqrt{a}$$

$$1) \quad x \leq \frac{2}{7} \quad (\text{подходят})$$

$$2) \quad x > \frac{2}{7};$$

$$49x^2 - 28x + 4 \leq 2x^2 + 2x + 1$$

$$47x^2 - 30x + 3 \leq 0$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 12 \cdot 47}}{94} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 564}}{94} = \frac{30 \pm \sqrt{336}}{94} \approx \frac{30 \pm 18}{94}$$

$x_1 > 7$ корень, полученный в п.2.

$$x_1 = \frac{30+18}{94} = \frac{48}{94}$$

$$\frac{48}{94} > \frac{27}{41}$$

$$\frac{24}{47} > \frac{27}{41}, \text{ а это не так } \Rightarrow \text{корень не подходит.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

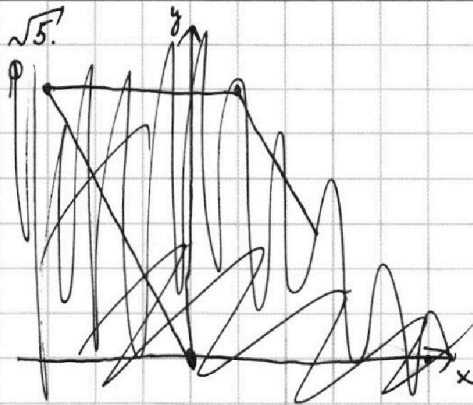
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала найдем ка-во
точек на границе нашего паралле-
логр. $PO_1 = \frac{1}{2} PO_2 \Rightarrow PO$ проходит через т. К
Рассмотрим РК вблизи:

Заметим, что если зафиксировать т. В, то точки А, а точнее их координ. будут удовлетворять уравнению прямой.

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Рассмотрим т. В. Пусть это наша т. В. тогда все точки, лежащие на прямой в удовлетворяют условию. Заметим, что пр. а || стороне параллелограмма $\Rightarrow$ проходит так же через $4 \cdot 3 + 1 = 13$ точек с целочисленными коорд. $\Rightarrow$ для каждой т. В, лежащей в заштрихованной области, найдется 13 т. А. Если т. В не в заштрихованной обл., то т. А не сущ.

Площадь заштрихов. области = $(3 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 3) = 9 \cdot 24 = 216$

По формуле Брока: $P + \frac{i}{2} - 1 = 216$, где P - # т. на границе.

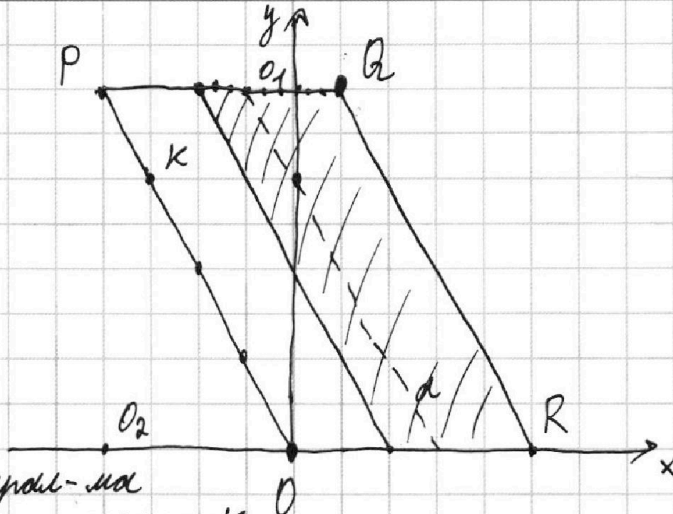
$$P = 13 + 13 + 8 + 8 = 26 + 16 = 42$$

$$\frac{i}{2} = 217 - 42 = 175$$

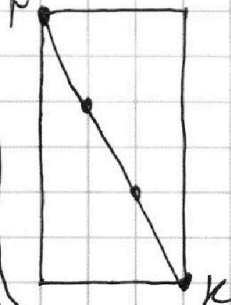
$$\Rightarrow i = 350 \Rightarrow i \cdot 13 = 350 \cdot 13 = 4550$$

нар т. А и В

Ответ: 4550



Заметим, что на отрез. РК ле-
жит 2 точки с целочисл. ко-
ординатами.
 $\Rightarrow$ на пр. PO лежит
 $4 \cdot 3 + 1$ точек с целочисл.
координ. то же самое для QR.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



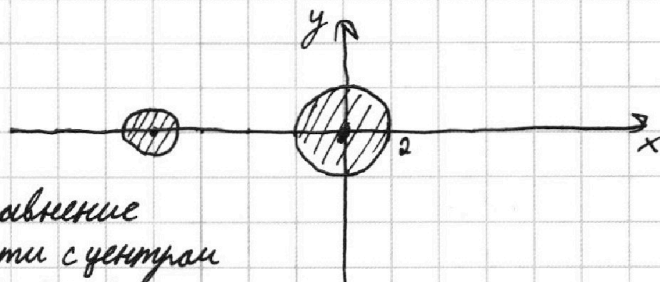
№6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

это уравнение
окружности с центром
в т. $(-8; 0)$ и $r = 1$

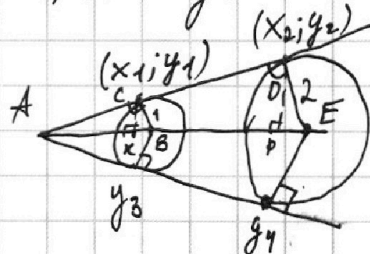
это уравнение
окружности с центром
в т. $O(0; 0)$ и $r = 2$



Заметим, что первое уравнение — это прямая.

2-е неравенству удовлетворяет заштрихованная зона.

прямая должна иметь с 2-мя окружностями 2 общие точки
 $\Rightarrow$ она должна являться касательной.



точки касания имеют коор. $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$

$$\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{CB}{DE} = \frac{AB}{AE}$$

$$BE = AB = 8$$

Опустим высоту из т. C и т. D на AE = т. K и т. P.

$$\frac{CK}{CB} = \frac{AC}{AB}; \frac{DP}{DE} = \frac{AD}{AE}$$

$$CK = \frac{AC \cdot 1}{8} = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$DP = \frac{AD \cdot 2}{16} = \frac{2\sqrt{63}}{8}$$

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

$$AC = \sqrt{63}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{63}}{8}; y_2 = \frac{2\sqrt{63}}{8}$$

$$AD^2 + DE^2 = AE^2$$

$$AD = 2\sqrt{63}$$

$$x_1 = 8 + KB = -8 + \sqrt{1 - \frac{63}{64}} = -8 + \frac{1}{8} = -8\frac{1}{8}$$

$$x_2 = -\left(\sqrt{4 - \frac{4 \cdot 63}{64}}\right) = -\sqrt{\frac{256 - 252}{64}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

y_3 и y_4 симметричны y_1 и y_2 — соответственно.

подставим в формулу 1 из системы:

$$\begin{cases} a(-8\frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{63}}{8} + 10b = 0 \\ a(-\frac{1}{4}) - \frac{2\sqrt{63}}{8} + 10b = 0 \end{cases}$$

$$(2(-8\frac{1}{8}) - (-\frac{1}{4}))a + 10b = 0$$

$$(2 \cdot (-\frac{65}{8}) + \frac{1}{4})a + 10b = 0$$

$$(-\frac{64}{4})a + 10b = 0$$

$$10b = 16a$$

$$a(-8\frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{63}}{8} + 16a = 0$$

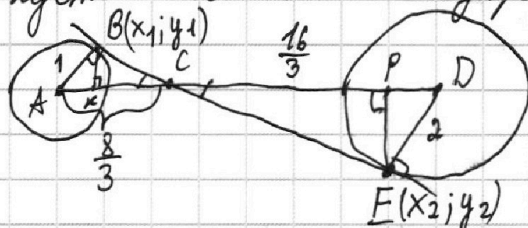
$$a(16 - \frac{65}{8}) = \frac{\sqrt{63}}{8} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{63}}{8 \cdot \frac{63}{8}} = \frac{1}{\sqrt{63}}; \text{ при } y_3 \text{ и } y_4, \text{ коэф. } a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение).

пусть касательные внешние: $\frac{16}{3}$ и $\frac{8}{3}$ из подобия Δ (см. рисунок)



(BK - высота - PE)

$$\frac{BK}{AB} = \frac{BC}{AC}$$

$$BK = \frac{BC \cdot 1}{\frac{8}{3}}$$

$$BC^2 = \frac{64}{9} - \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$$

$$BC = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\Rightarrow BK = \frac{\sqrt{55}}{8} = 4$$

$$(x_1 + 8)^2 + y_1^2 = 1$$

$$(x_1 + 8)^2 = 1 - \frac{55}{64} = \frac{9}{64}$$

$$(x_1 + 8)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{8} - \frac{64}{8} = -\frac{61}{8}; y_1 = \frac{\sqrt{55}}{8};$$

$$\frac{PE}{DE} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow PE = \frac{CE \cdot DE}{CD} = \frac{2CE}{CD} \text{ (по подобию)}; PE = 2BK = \frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$x_2^2 + \frac{55}{16} = 4$$

$$x_2^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4} \text{ (отриц. зн. по рисунку)}; y_2 = -\frac{\sqrt{55}}{4}$$

подставим (y_1, x_1) и (y_2, x_2) в 1^ю уравн. прямой.

$$\begin{cases} a(-\frac{61}{8}) - \frac{\sqrt{55}}{8} + 10b = 0 \\ a(-\frac{3}{4}) + \frac{\sqrt{55}}{4} + 10b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\frac{61}{4})a + 20b + (-\frac{3}{4})a + 10b = 0 \\ (-\frac{64}{4})a = -30b \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\frac{3}{4})a + \frac{\sqrt{55}}{4} + \frac{16}{3}a = 0.$$

$$a(\frac{16}{3} - \frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$a(\frac{64-9}{12}) = -\frac{\sqrt{55}}{4} \Rightarrow a = -\frac{12\sqrt{55}}{4 \cdot 55} = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

при симметричных y_1, y_2 относительно прямой OX

значение a стоит противоположным по знаку.

$$\Rightarrow \text{Ответ: } a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}; a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Р. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{11} \cdot 7^{10} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &: 2^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot k \\ a &= 2^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot k \\ b &= 2^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot p \\ c &= 2^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot p \\ a^2 b^2 c^2 &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\ abc &: 2^{10} \cdot 7^3 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

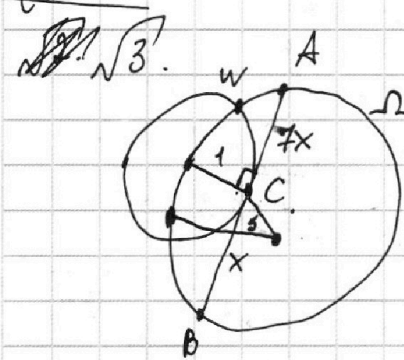
$$\alpha + 2 - 7x = (2 - 7x)^2 + \alpha + 2\sqrt{\alpha}$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 14 \\ b_1 + c_1 = 17 \\ a_1 + c_1 = 20 \\ 2b_1 = \end{cases}$$

W

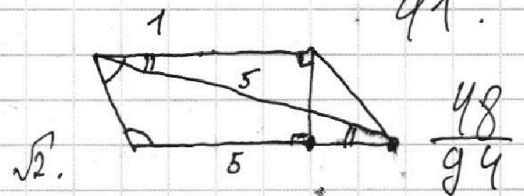
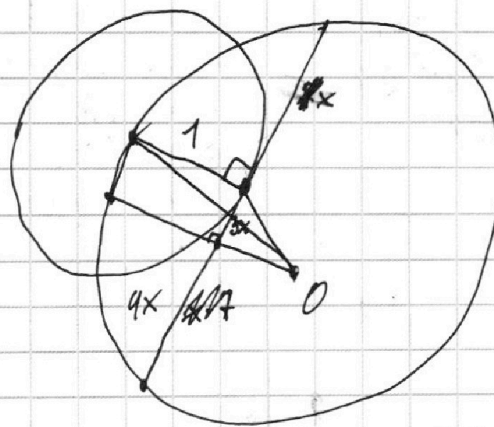
$\sqrt{4}$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} &= 2-7x \\ \sqrt{2(x^2-2x+1)-x+1} - \sqrt{2(x^2+2x+1)-2x-1} &= 2-7x \\ \sqrt{2(x-1)^2-(x-1)} - \sqrt{2(x+1)^2-(2x+1)} &= 2-7x \\ D = 25 - 24 = 1 & \quad D = 4 - 8 \\ x = \frac{5 \pm 1}{4} = 1 & \quad x = \frac{5 \pm 1}{4} = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{x^2+(x+1)^2} &= 2-7x \\ x^2-2x+1+x^2-3x+2 & \\ (x-1)^2+(x^2-2x+1) & \end{aligned}$$

$\frac{27}{41}$



$$\frac{a}{b} - \text{н.с.} \quad \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

7.

$\frac{27}{41} \quad \frac{48}{94} = \frac{24}{47}$

$$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)} = 4-28x$$

$$45x^2-25x = -2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)}$$

$$5x(9x-5) = -2\sqrt{\dots}$$

$$2x^2+2x+1 = 2(x^2-2x+1) + 6x-1$$

$$\begin{aligned} 2(x^2-2x+1)-x-1 & \\ \sqrt{2x^2+2x+1}-\sqrt{a} &= 2-7x \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{a-7x+2}-\sqrt{a}=2-7x.$$

$$a-(7x+2)=(2-7x)^2+2(2-7x)\sqrt{a}+a$$

$$\frac{(2x-3)(x-1)}{x}$$

$$\frac{11 \cdot 23 \cdot 529}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{11 \cdot 69 \cdot 21}{1 \cdot 8 \cdot 21}$$

$$\frac{97x^2 - 305x + 84}{82}$$

$$\frac{90}{32} \quad 2 = 900 - 12 \cdot 47$$

$$\frac{10}{32} \quad 47 \quad 23 \cdot 29$$

$$\frac{47}{12} \quad 94$$

$$\frac{47}{56} \quad 4$$

$$\frac{16 \cdot 105}{820}$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

№5.

$$(2-7x)^2 + (2-7x)(2\sqrt{a}+1) = 0.$$

$$\frac{(2-7x)}{x} = 0$$

$$2-7x = -2\sqrt{a}-1.$$

$$2-7x+1 = -2\sqrt{a}.$$

$$7x-3 = 2\sqrt{a^2+2a+1}.$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 + 8x + 4.$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0.$$

$$D = 2500 - 20 \cdot 41 = 820$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

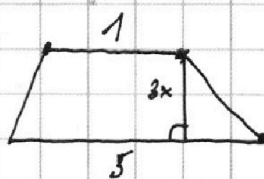
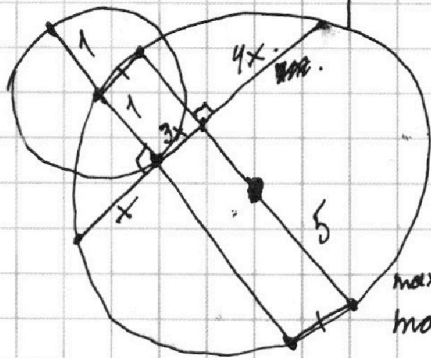
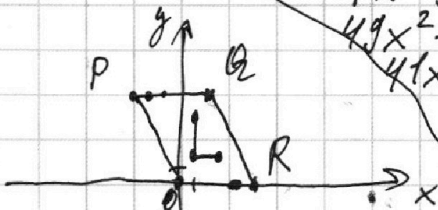
$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

$$\frac{1680}{16} \quad 1720 \quad 420 \cdot 4$$

№3.



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12.$$

$$\max x_2 - x_1 = 27$$

$$\max y_2 - y_1 = 24$$

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad x = \frac{30 \pm (23-24)}{94}$$

$$a+b : k. \quad x = \frac{54}{94}$$

$$a^2+2ab+b^2 : k$$

$$a^2-6ab+b^2 : k$$

$$-4ab : k. \quad \frac{99+4\sqrt{61}}{82}$$

$$4ab : k$$

$$a+b : k. \quad 564$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$\frac{11}{12} \quad 484$$

$$a = 2 \cdot \left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \right) \cdot 2 - 7x + \sqrt{a} \geq 0$$

$$\frac{242 + 44\sqrt{61} + 4 \cdot 61}{41^2}$$

$$\frac{242 + 44\sqrt{61} + 4 \cdot 61}{41^2}$$

$$\frac{242 + 44\sqrt{61} + 4 \cdot 61}{41^2}$$

$$7x - 2 \geq 0$$

$$7x - 2 \geq 0$$

$$7x - 2 \geq 0$$

$$7x - 2 \geq 0$$

$$7x - 2 \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

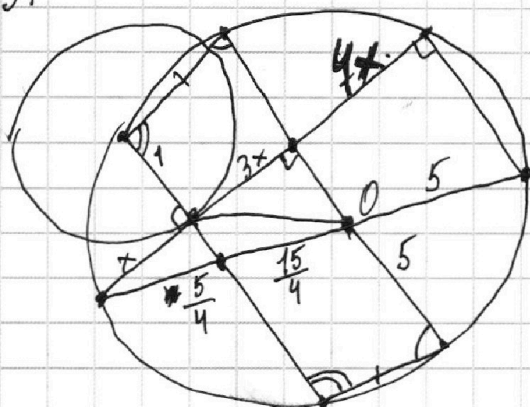
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$



н.п.

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$b = 1.$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \quad \times.$$

$$c : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 7^{37}$$

$$b = 2$$

$$a : 2^{13} \cdot 7^{10}$$

$$c : 2^{16} \cdot 7^{17}$$

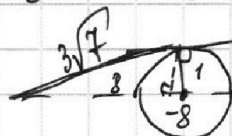
$$ab^2c : 2^{31} \cdot 7^{27}$$

$$\begin{array}{r} \times 350 \\ 13 \\ \hline 1050 \\ + 35 \\ \hline 4550 \end{array}$$

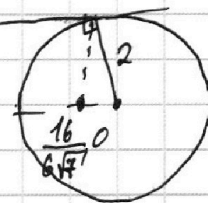
$$x = \frac{8}{3\sqrt{7}}.$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{x}$$

$$2\sqrt{7}.$$



$$64 - 1 = 63.$$



$\sqrt{6}$

$$\frac{k}{x} = \frac{5}{4x}.$$

$$4kx = 5x$$

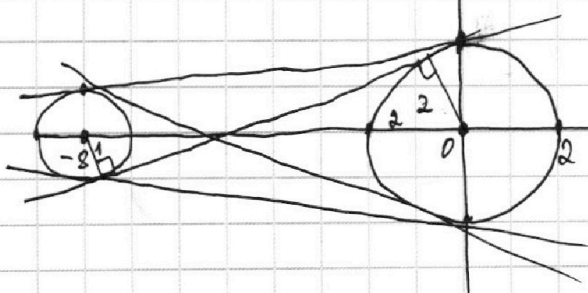
$$k = \frac{5}{4}.$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \quad (x^2 + y^2 = 4) \leq 0$$

н.п.

$$9 \cdot 24 = 216$$



$$\begin{aligned} ax - y + 10b &= 0 \\ y &= ax + 10b \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1.$$

$$x^2 + (ax)^2 + (10b)^2 + 20abx = 4.$$

$$x^2 + 16x + 64 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 1.$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2 - 4) = 0$$



$$P + \frac{i}{2} - 1 = 216.$$

$$46 - 1 + \frac{i}{2} = 216.$$

$$2(13+10) + \frac{i}{2} - 1 = 216.$$

$$45 + \frac{i}{2} = 216.$$

$$\begin{array}{r} -216 \\ 45 \\ \hline 171 \end{array} \quad 342.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

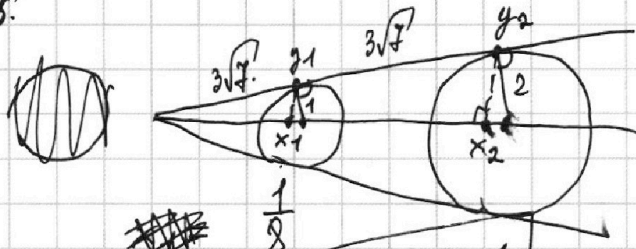
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5.



$$x_1 = -8 \frac{1}{8}$$

$$x_2 = -\frac{2}{8} \cdot \frac{256}{252}$$

~~x1 + y1~~

$$1 - (x+8)^2 = y^2$$

$$1 - \frac{1}{64} = y^2$$

$$y_1 = \pm \frac{3\sqrt{7}}{8} \quad y_2 = \pm \frac{6\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{8}{3\sqrt{7}}$$

$$x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{64}{63} + \frac{63}{64} = \frac{x}{2} = \frac{6\sqrt{7}}{16}$$

$$x = \frac{6\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{36 \cdot 7}{64} + k^2 = 4$$

$$\frac{252}{64} + k^2 = 256$$

$$\frac{4}{64} = \frac{2}{8}$$

$$\begin{cases} a \cdot (-\frac{65}{8}) - \frac{3\sqrt{7}}{8} + 10b = 0 \\ a(-\frac{2}{8}) - \frac{6\sqrt{7}}{8} + 10b = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{65}{8}a + 16a - \frac{3\sqrt{7}}{8} = 0$$

$$\frac{(128-65)a}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$-2a(\frac{65}{8}) + 10b + \frac{2}{8}a = 0$$

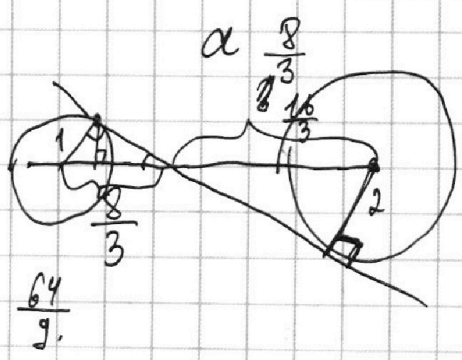
$$a = \frac{3\sqrt{7}}{63}$$

$$-\frac{65}{4}a + \frac{1}{4}a + 10b = 0$$

$$-16a + 10b = 0$$

$$10b = 16a$$

$$5b = 8a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

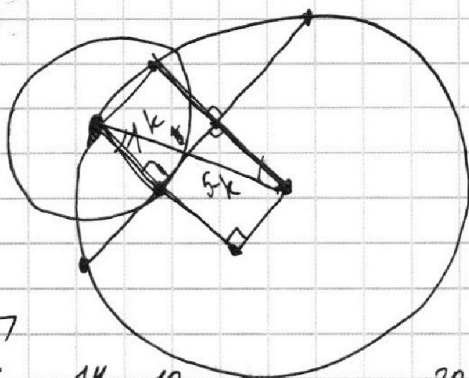
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$



$\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &\geq 2^{20} \cdot 7^{37} \\ 2^{21} \cdot 7^{37} & \end{aligned}$$

$\frac{ab}{bc}$

$$\begin{aligned} 14+17 &\leq 20+k, b=2 \\ C &\geq 2^{16} \cdot 7^{17} \\ ac &\geq 2^{20} \\ bc &\geq 2^{17} \\ ab &\geq 2^{14} \\ ac &= 7^{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 2 \\ C &= 15 \\ a &= 12 \\ \angle &= 29^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 6 \\ C &= 10 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

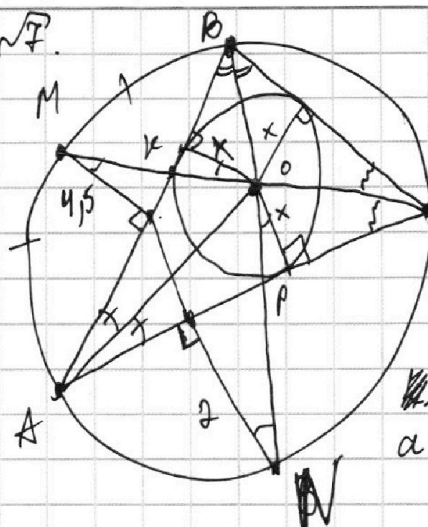
$$\begin{aligned} b &= 5 \\ C &= 11 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 4 \\ C &= 12 \\ a &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &\geq 2^{21} \cdot 7^{37} \\ b &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{ka}{ka-1-a} \mid \frac{8a-k}{8}$$

$\sqrt{7}$



$$\frac{2x}{5} = \frac{MK}{KO}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4.5} &= \frac{MK}{KO} \\ \frac{OP}{PN} &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$a(k-8b)+kb$$

$$\begin{aligned} 8ab &= k(a+b) \\ ka+kb-8ab &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad b &= 2 \\ C &\geq 2^{16} \\ a &\geq 2^{13} \end{aligned}$$

$$2^k \cdot 2^{(17-k)} \cdot 2^{(14-k)}$$

$$k=8a-1$$

$$\frac{ka}{ka-1-a} \mid \frac{8a-k}{8}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

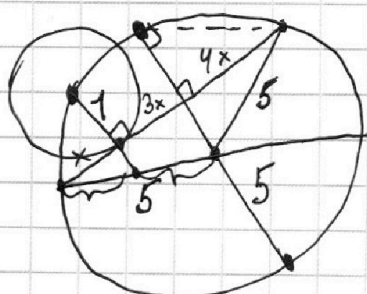
$$\begin{aligned} a+b &: k \\ a^2-6ab+b^2 &: k \\ a^2-6ab+b^2+a+b &: k \\ a(a+1-3b)+b(b+1-3a) & \end{aligned}$$

$$a^2+2ab+b^2 : k$$

$$\begin{aligned} 4ab &: k \\ a+b &: k \end{aligned}$$

$$\frac{a}{k} \neq 2$$

$\sqrt{3}$



и и

$$\begin{aligned} ab &: k \\ a+b &: k \\ a+b &: 9ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4ab &: k \\ a+b &: k \end{aligned}$$

$$a+b+2ab+2ab : k$$

$$a(2b+1)$$

$$4ab : a+b \quad a(1+b)+1+b$$

$$a+b : 8a-1$$

$$a^2-6ab+b^2 : 8a-1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b:k.$$

$$a^2-6ab+b^2:k$$

$$\sqrt{3}.$$

$$8ab:k.$$

$$a+b:k.$$

$$a^2-6ab+b^2:k.$$

$$a^2-6ab+b^2-a-b:k.$$

$$2a^2-4ab+2b^2:k.$$

$$2(a^2-ab+b^2):k.$$

$$(a-b)^2:k.$$

$$(a+b)^2:k.$$

$$2b \cdot 2a:k.$$

$$a=kp+d. \quad b=d.$$

$$kp$$

$$(a+b)$$

$$(a+b)^2-8ab$$

$$ab \quad a+b$$

$$8ab:a+b.$$

$$8ab=k(a+b)$$

$$ka+kb=8ab.$$

$$ka=b(8a-k)$$

$$\frac{ka}{8a-k}=b.$$

$$ka \geq 8a-k.$$

$$a(k-8) \geq -k.$$

$$a \geq \frac{k}{8-k}.$$

$$\frac{5}{k} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{5}{k}.$$

$$25 - \frac{25}{k^2} = 25 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k^2-1}{k^2}$$

$$5 \sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}} =$$

$$k^2-1$$

$$(k-1) \cdot (k+1) =$$

$$Q = 450^2 + 2500 \cdot 184$$

$$265 \overline{) 15}$$

$$CD = 5 - \frac{5}{k} = 5 \left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$\begin{array}{r} \times 184 \quad \times 45 \\ \times 2500 \quad \times 45 \\ \hline 92000 \quad 225 \\ \hline 368 \quad 1025 \\ \hline 460000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 25 \\ \hline + 80 \\ 32 \\ \hline 400. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 625 \\ \times 2500 \\ \hline 216 \\ \hline 184. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6625 \overline{) 25} \\ \underline{50} \\ 150 \\ \underline{125} \\ 25 \end{array}$$

$$202500 + 460000 =$$

$$= 662500.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

