



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 11

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} ; \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18} ; \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}.$$

Представим числа a, b, c в виде произведения 2 и 7 в некоторой степени:

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

Конечно, числа a, b, c могут содержать другие простые множители, но тогда ab, bc, ac точно не будут минимальными. Из условий делимости произведений чисел следует:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15 ; \\ a_2 + b_2 \geq 11 ; \\ b_1 + c_1 \geq 17 ; \\ b_2 + c_2 \geq 18 ; \\ a_1 + c_1 \geq 23 ; \\ a_2 + c_2 \geq 39 ; \end{cases}$$

Сложим пер-ва (или одинаковые) соответственно по индексам:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{55}{2} ; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 ; \end{cases}$$

Т.к. числа натуральные то и a_1, b_1, c_1 - натуральные:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 ; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 ; \end{cases}$$

Т.к. $a_2 + c_2 \geq 39$, то и $a_2 + b_2 + c_2 \geq 39$:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 39 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



6



7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Осталось привести пример с такими степенями:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$$

Такой пример существует. Минимальное произведение abc:

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Решим 1-е неравенство: $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 24}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

~~$$x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$~~

Решим 2-е неравенство:

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x$$

В итоге: ОДЗ: $x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

2) Докажем обе части ур-ия на $(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$.
Эта скобка всегда > 0 , т.к. $3x^2 + 3x + 1 > 0$. В левой части разность
квадратов:

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

Первый корень: $x = \frac{1}{9}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \leq 1 \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 \leq 0 \\ 3x(x+1) \leq 0 \end{cases}$$

2.1 $3x^2 - 6x + 1 \leq 0$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 12}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > 0$$

$$\sqrt{6} < \sqrt{9} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} < 1$$

2.2 $3x(x+1) \leq 0$

$$x \in [-1; 0]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем систему:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}; \\ -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$$

Множества не пересекаются. Значит ~~нет~~ корней ~~у~~ ур-ня
точно нет. Значит, корни у ур-ня только один $x = \frac{1}{9}$.

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

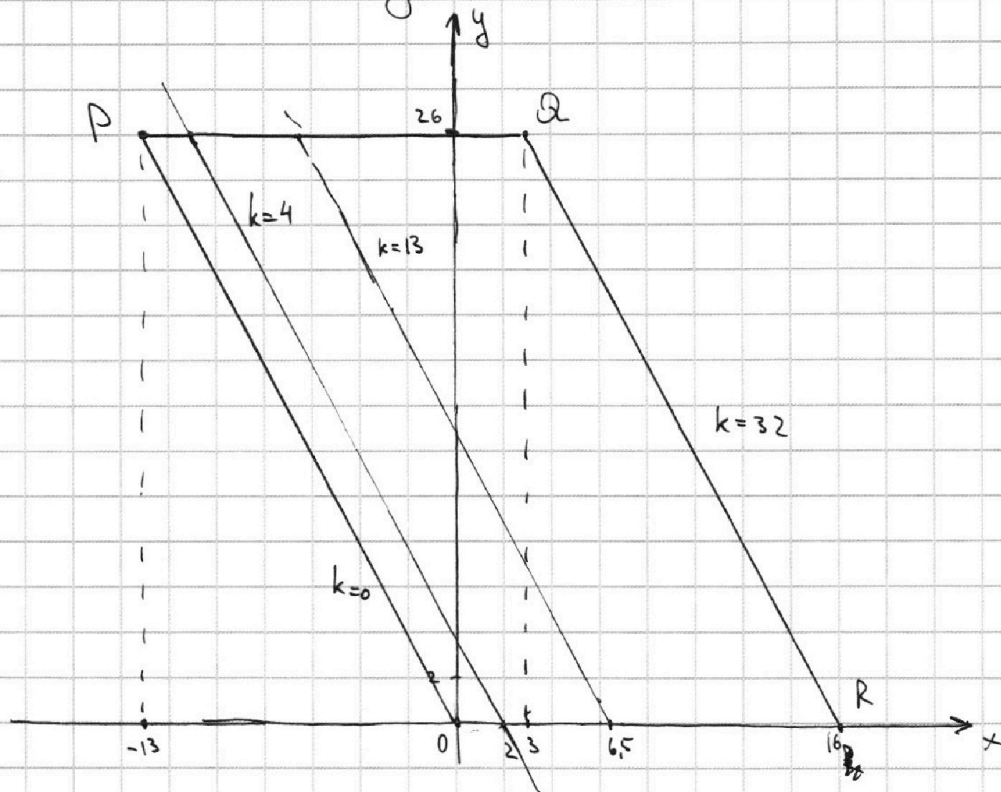
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5



1) Заметим, что точки, для которых $2x + y = \text{const}$

лежат на одной прямой $y = k - 2x$ ($k = \text{const}$, некоторое число). А также эти ~~линии на x~~ прямые параллельны сторонам параллелограмма. Это заметно упрощает задачу. Всего таких прямых, для которых $2x + y = k = \text{const}$ ~~33~~ (от 0 до 32) ~~выходит~~ (так чтобы на этой прямой была бы хотя бы одна точка с целыми коэффициентами).

2) Посчитаем ~~то~~ кол-во точек с целыми ^{координатами} ~~коэффициентами~~ на этих прямых. Прямые, которые ~~выходят~~ пересекают ось Ox в точке с целым значением. Подробнее рассмотрим эти прямые (рис. 1 на след. стр.) На прямых, которые выходят из целого x ~~точек~~ кол-во точек:

$$N_i = \frac{y_i}{2} + 1$$

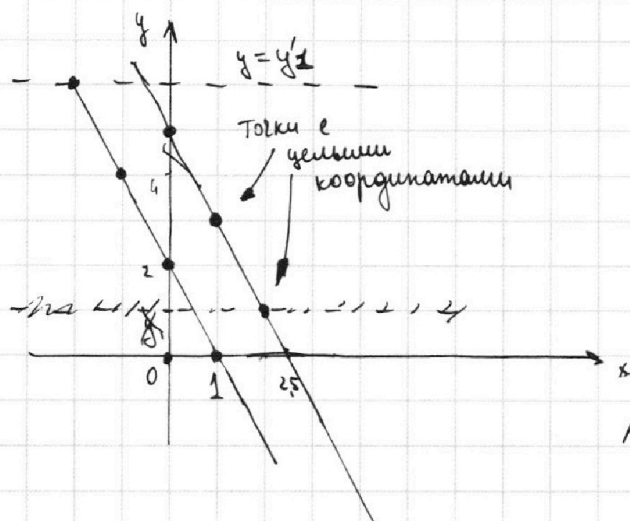
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Кол-во точек на прямых
с целыми коэффициентами

$$N_2 = \frac{y_1}{2}$$

Округлять в меньшую сторону.

То есть, возвращаясь к
параллелограмму, на прямых

с целыми коэффициентами, начиная с ОР точек:

$$N_1 = \frac{26}{2} + 1 = 14$$

На прямых с целыми коэффициентами:

$$N_2 = \frac{26}{2} = 13$$

Для каждой пары Всего пар прямых коэффициенты
 k , для которых отличаются на 14, 19. (от 0 до
в) 19. Из которых 10 прямых с целыми коэффициентами, а
9 с целыми. Для каждой точки из такой пары на
одной прямой попадут все точки на другой. Всего
вариантов:

$$N = 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 1440 + 1690 - 169 = 2961$$

Ответ: 2961

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 56

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0; \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0; \end{cases}$$

1) Начнём со 2-го пер-ва. Заметим, что $x^2 + y^2 = 1$ - ур-ие
круга окр-ти радиуса 1 в точке $(0; 0)$, а $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - ур-ие
окр-ти радиуса 4 в точке $(0; 12)$. Также $x^2 + y^2 = 1$
Значит, $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ - это все точки вне окр-ти и сама окр-ть
окр-ть; $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ - это точки внутри окр-ти и сама окр-ть.
Аналогично и с $(x^2 + (y - 12)^2 - 16)$. ~~Вывод~~ Равносильная система:

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0; \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0; \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0; \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

Из этих соображений следует 1-я система совокупности
это ~~тогда~~ ^{все} точки внутри окр-ти радиуса 4 и сама окр-ть
радиуса 4. А 2-я система совокупности это все точки внутри
окр-ти радиуса 1 и сама окр-ть радиуса 1. Рисунок
на другой странице.

2) $ax + y - 8b = 0$ - ур-ие прямой. Эта прямая должна
касаться и той и другой окр-ти. Всего возможно 4
прямых ~~две~~. Прямые две пары симметричных $\Rightarrow a_1 = -a_2;$
 $a_3 = -a_4.$

Найдём a_1 и a_3 . Эти прямые схематично изображены
на след. стр.

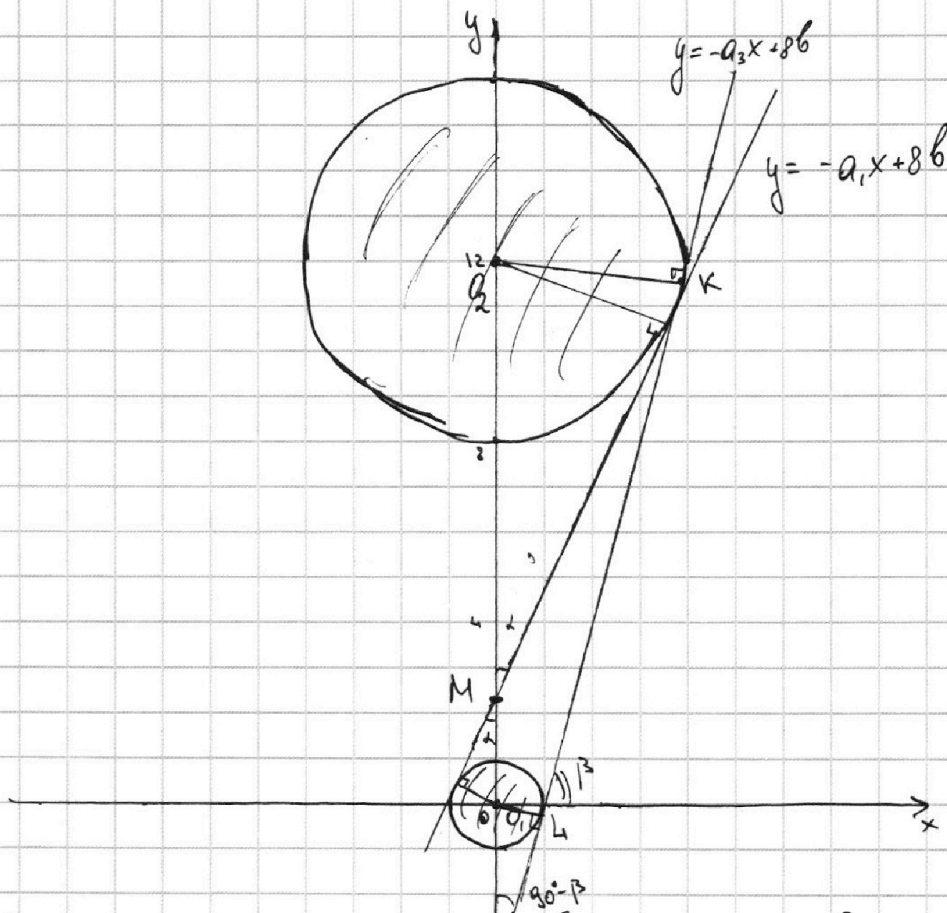
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из подобия тр-ков образованных осью Oy, прямой $y = -a_1x + 8b$, и радиусов окр-тей проведенных к точкам касания.

$$\frac{1}{O_1M} = \frac{4}{MO_2}$$

$$\frac{MO_2}{MO_1} = 4; \quad MO_1 + MO_2 = O_1O_2 = 12 \Rightarrow MO_1 = 2,4$$

$$MO_2 = 9,6$$

$$a_1 = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{O_2M} = \frac{4}{9,6}$$

$$= \frac{\sqrt{9,6^2 - 4^2}}{9,6} = \frac{\sqrt{5,6 \cdot 13,6}}{9,6} = \frac{\sqrt{7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 33}}{40} = \frac{\sqrt{17 \cdot 7}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Теперь найдем a_3 . Из подобия $\triangle NO_1L \sim \triangle NO_2K$:

$$\frac{1}{NO_1} = \frac{4}{NO_2}$$

$$\begin{cases} NO_2 = 4NO_1 \\ NO_1 + 12 = NO_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NO_1 = 4 \\ NO_2 = 16 \end{cases}$$

$$a_3 = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{16 - 1}}{1} = \sqrt{15}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = -\sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{\sqrt{119}}{5}; a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}; a_3 = \sqrt{15}; a_4 = -\sqrt{15}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

