



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть

Задача 1  $x_1, y_1, m$   
 $a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot m$

$m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  не дел. на 2 и на 7

$$b = 2^{x_2} \cdot 7^{y_2} \cdot n$$

$k, m, n \in \mathbb{N}$

$$c = 2^{x_3} \cdot 7^{y_3} \cdot k$$

т.к.  $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$ , 2 и 11 взаимно просты, то

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

$$y_1 + y_2 \geq 11$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

||

$$x_2 + x_3 \geq 17$$

$$y_2 + y_3 \geq 18$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$x_3 + x_1 \geq 23$$

$$y_1 + y_3 \geq 39$$

тогда заменим, что

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 45$$

$$2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 68$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 22,5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 34$$

(т.к.  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ;

но у нас  $y_1 + y_3 \geq 39 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 39$ )

то  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 28$ )

тогда  $abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 7^{y_1+y_2+y_3} \cdot k \cdot m \cdot n \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

приведем пример на  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

(т.к.  $k \in \mathbb{N}$ )

$$a = 2^{11} \cdot 7^{19}$$

$$ab = 2^{16} \cdot 7^{19} : 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$b = 2^5$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{20}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$  - несокр.



$$\text{НОД}(a; b) = 1$$

Найдём  $m$ .

$$a+b : m$$

$$(a+b)^2 - 9ab : m$$



$$9ab : m$$

$$11ab : m \quad (m \geq 2, m \cdot k, m=1 \text{ подходит})$$



$$a+b = mn$$

$m \geq 2$

$$ab = mk$$



$$a = \frac{mk}{b}$$

$$b = \frac{mk}{a}$$

$$\Rightarrow m \left( \frac{k}{a} + \frac{k}{b} \right) = mn$$

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} = n$$

т.к.  $n$ -нест., то  $k:a$   
 $uk:b$

т.к.  $a, b$  - взаимнопросты,

то  $k:ab$

$$k \geq ab \quad m \geq 2$$

$$mk \geq 2ab \Rightarrow ab \geq 2ab - \text{против.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (продолж.)



$ab$  не делится на  $m$



$g:m$ , следовательно  $m \leq g$



Наиб  $m = g$

Пример:  $a=17$   
 $b=1$

$$\frac{18}{(18)^2 - 9 \cdot 17} = \frac{2}{18^2 - 17^2} = \frac{2}{19}$$

Отв:  $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 (прод.)

$$AD^2 = BX^2 = 17^2 x^4 + 49x^2 \quad (\triangle BCX - \text{прямо})$$

$$AO_2^2 = 17^2 x^2 + 49 \quad (\triangle AO_2C - \text{прямо})$$

$$DO_2^2 = 4 \cdot 13^2 = 26^2 \quad (\text{квадрат} - \text{это два радиуса})$$



$$676 = 289x^4 + (289 + 49)x^2 + 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$x^2 = 1$  подходит; т.к.  $289 + 338 = 627$



$$(x^2 - 1)(289x^2 + 627) = 0$$

$289x^2 + 627 \neq 0$  всегда



$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

т.к.  $x > 0$ , то  $x = 1$

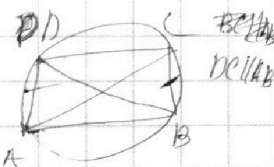


$$AB = AC + BC = 17x + 7x = 17 + 7 = 24$$

Отв.: 24

\*

Докажем это



$$\angle ABD = \angle CDB$$

⇓  $(DC \parallel AB)$   
 $\angle ADC = \angle BCD$

⇓  
 $AD = BC$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

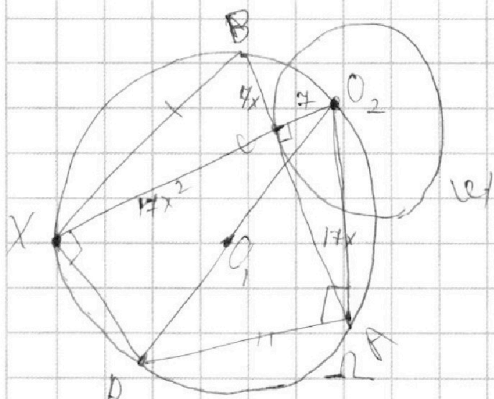
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3



Пусть  $O_1$  - центр  $\Omega$ ;  $O_2$  - центр  $\omega$

$O_2C \perp AB$  (AB - касан.)

$$BC = 7x \quad AB = 17x$$

Продлим  $O_2C$  до второго пересечения с  $\Omega$  в  $X$  ( $O_2O_1$ , тоже продлим до пересечения с  $\Omega$  в  $T$ ).  $O_2D$  - диаметр.  $\Rightarrow \angle DXO_2 = 90^\circ = \angle O_2CA$

Заметим, что  $XD \parallel AB \Rightarrow AD = BX$ \*

$$BC \cdot AC = O_2C \cdot XC \text{ (ст. точки)}$$

$$XC = \frac{BC \cdot AC}{O_2C} = \frac{17 \cdot 7x^2}{7} = 17x^2$$

$$\angle PAO_2 = 90^\circ \text{ (окр. на diam)} \Rightarrow AD^2 + AO_2^2 = DO_2^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4 (прод.)

$$b=0 \quad \text{или} \quad b+2\sqrt{a}+1=0$$

$\Downarrow$

$$1-9x=0$$

$$x=\frac{1}{9}$$

~~$$9x+2\sqrt{3x^2+3x+1}+1=0$$~~

~~$$9x=2\sqrt{3x^2+3x+1}$$~~

~~$$81x^2=2$$~~

не подк., т.к. в этом случае

$$b+2\sqrt{a}=-1$$

$$a+\sqrt{a}=-1-\sqrt{a} < 0$$

$$x=\frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{3}{81}-\frac{6}{9}+2}-\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{3}{9}+1}=0$$

$\Downarrow$   
против. ОДЗ ( $b+\sqrt{a} \geq 0$ )

$$\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{4}{3}}=0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{4}{3}}$$

$$\text{Оmb: } \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\text{Р.ф. } y = 3x^2 - 6x + 2 \quad \text{Р.ф. } y = 3x^2 + 3x + 1$$

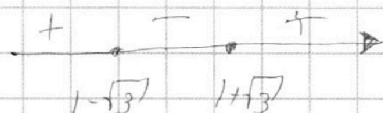
$$D = 36 - 6 \cdot 4 = 12$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

при любых  $x$



$$x \in \left(0; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$$

Пусть  $3x^2 + 3x + 1 = a$

$$1 - 9x = b \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = a + b$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a} \quad a \geq 0$$

$$a+b = b^2 + a + 2\sqrt{a}b \quad a+b \geq 0$$

$$b^2 + 2(\sqrt{a}-1)b = 0 \quad b + \sqrt{a} \geq 0$$

$$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



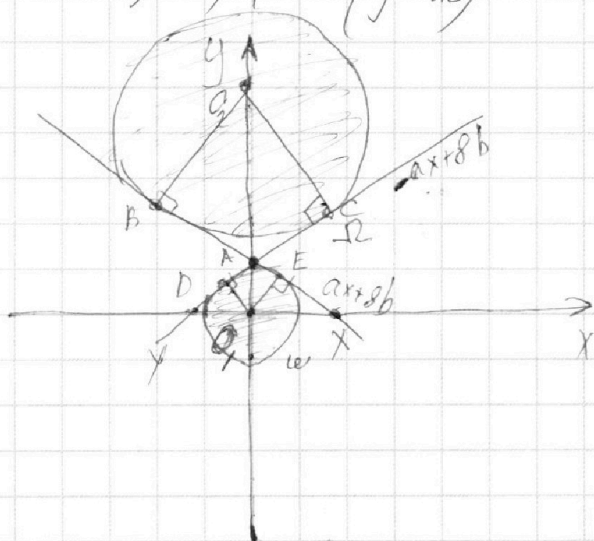
Задача 6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$$

Построим ин-ство решений нерав-

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$$



Окр.  $\Omega$   
центр  $O_1: (0,0)$   
радиус 1

Окр.  $W$   
центр  $O_2: (0,12)$   
радиус 4

Первое уравнение - уравнение прямой

чтобы было ровно 2 точки, эта прямая должна быть об-к. касат. к  $W$  и  $\Omega$ ; таких касательных всего две

Картинка симметрична отн. оси  $y \Rightarrow$

$\triangle O_1DAE$  и  $\triangle O_2BVF$

Эти касат.  $AV$  и  $BF$  пересекаются в двух точках на оси  $y$  когда при  $x$  это  $a$  и  $-a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (прод.)

Из симметрии

$$\triangle O_1EA \sim \triangle O_2BA$$

$\Downarrow$

$$\frac{O_1E}{O_2B} = \frac{O_1A}{O_2A}$$

$O_2B$   
 $O_1E$  - радиусы

~~$O_1A = 4O_2B$~~   $\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4O_1A = O_2A$

~~$O_1A + O_2B = AB = 12$~~

$\Downarrow$   
 $O_1A + O_2A = O_2O_1 = 12$

~~$O_2B = 4O_1A$~~

~~$\Rightarrow 5O_1A = 12$~~

$\Downarrow$   
 $5O_1A = 12$

~~$O_1A = 2,4$~~

$O_1A = 2,4$

~~$O_2B = 9,6$~~

$O_2A = 9,6$

~~$O_1A$~~

A имеет координ.  $(0, 2, 4)$ , а  $8b = 2,4$

по м. Пифагора

$\Rightarrow b = \frac{2,4}{8} = \frac{1}{2} \cdot 0,3$

$$AB = \sqrt{AO_2^2 - O_2B^2} = \sqrt{9,6^2 - 16} = \sqrt{76,16}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (прод.)

Условие.

$$\triangle O_2BA \sim \triangle XO_1A \quad \left( \begin{array}{l} \angle AO_1X - \text{прямой,} \\ \angle O_2AB = \angle XAO_1 \end{array} \right)$$

$$\frac{AB}{AO_1} = \frac{O_2B}{O_1X}$$

$$O_1X = \frac{O_2B \cdot AO_1}{AB} = \frac{2,4 \cdot 4}{\sqrt{76,16}} = \frac{9,6}{\sqrt{76,16}}$$

~~O<sub>1</sub>X~~

Координаты т. X это  $\left( \frac{9,6}{\sqrt{76,16}}; 0 \right)$

~~O<sub>1</sub>X + a~~

$$a \cdot \frac{9,6}{\sqrt{76,16}} + 2,4 = 0$$

$$a = - \frac{2,4 \cdot \sqrt{76,16}}{9,6}$$

а также

$$a = \frac{2,4 \cdot \sqrt{76,16}}{9,6}$$

Отв:  $a = \pm \frac{\sqrt{76,16}}{4}$

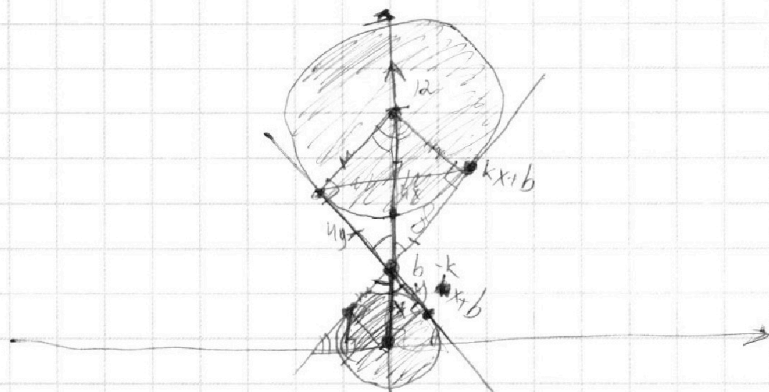
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = -ax + 8b$$

$$(12 - b)(8 - b)$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

$$y = kx$$

$$k = \frac{y}{x}$$

$$12 = 5x$$

$$x = \frac{12}{5} = 2,4 = b$$

$$\frac{4 - 2,4}{2} =$$

$$\frac{4y}{1}$$

$$kx_1 + 2,4 = y_1$$

$$x_1^2 + (y_1 - 12)^2 = 16$$



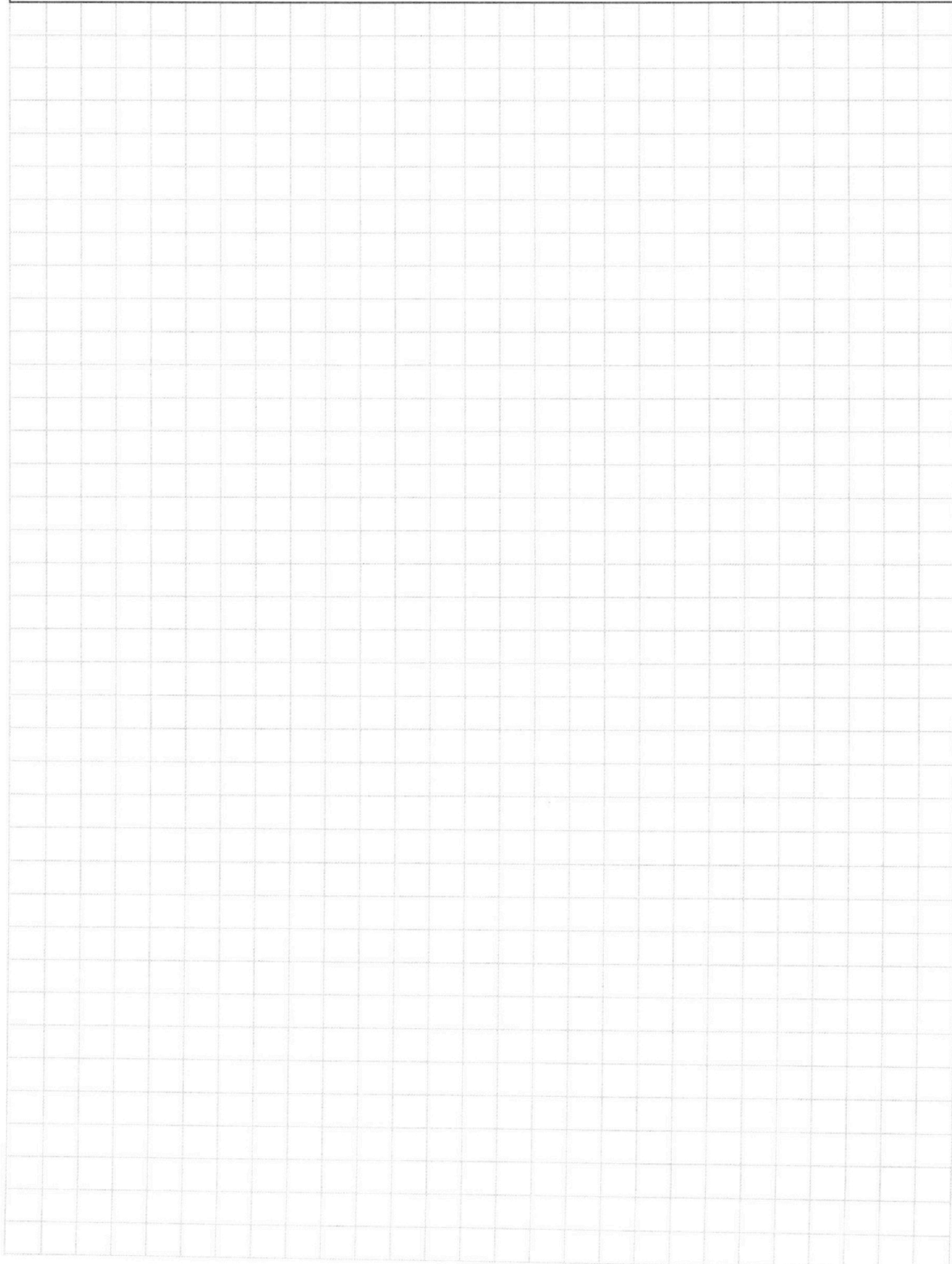
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



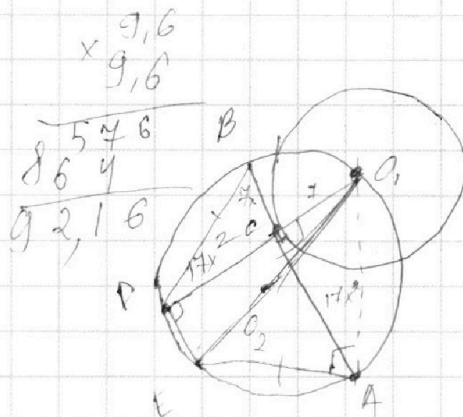
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$92,16 - 16 =$$

$$= 76,16$$

$b^2 + 7^2 = 169 + 49 = 218$

$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-a} = b-a$

$b + 2\sqrt{a} = -1$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 117} \\ \underline{51} \phantom{0} \\ 117 \phantom{0} \\ \underline{117} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

$AE^2 = DB^2 = 17^2 x^4 + 49x^2$

$AC_1^2 = 17^2 x^4 + 49$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$289x^4 + 66x^2 + 49 = 0$

$$289x^4 + 66x^2 + 49 = 0$$

$$\begin{array}{r} 289 + 49x^2 \\ - 627 \\ \hline 338 \end{array}$$

$0 = 627 + 12x^2 + 12x^4 - 627$

$627 = 289x^4 + 338x^2 + 49$

$289 + 338 - 627 =$

$289x^4 + 338x^2 - 627 > 0$

$= 0$

$4 + x^2 + 2x^4 = 2 \cdot 18$

$1 + x^2 + 2x^4 = 18$

$1 + x^2 + 2x^4 = 18$

$x^2 - 9x^2 + 18x^2 - 18 = 0$

$0 = 1 - \sqrt{10} + 9$

$(x^2 - 1)(289x^2 + 627) = 0$

$x = 1$

$AB = 24\sqrt{2}$

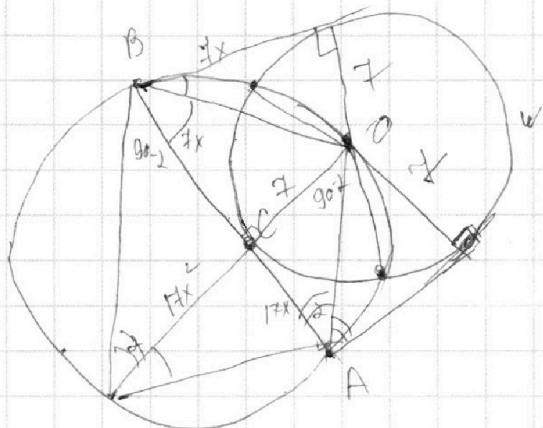
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

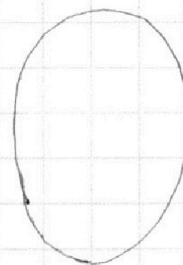


$$\Omega = 13$$

$$\omega = 7$$

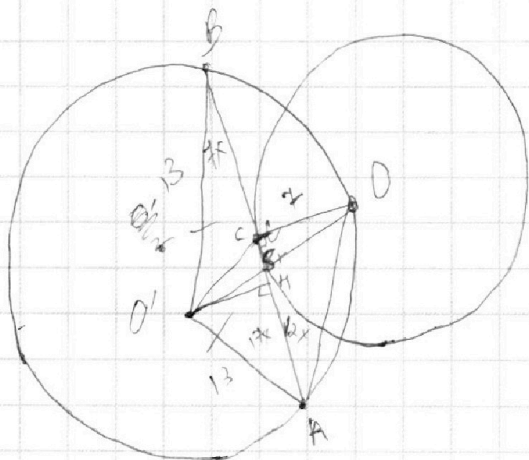
$$\frac{17x^2}{4} =$$

$$BO^2 = 49 + 49x^2$$



$$17 \cdot 7x^2 = CO^2 - 13^2$$

~~49x^2~~



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$289 - 169 = 120$$

$$289 - 49 = 240$$

$$7 \cdot 17x^2 = CO'^2 + 13^2$$

~~17x^2~~

$$CO'^2 = 7 \cdot 17x^2 + 13^2 = 25x^2 + O'H^2$$

$$O'H^2 = 13^2 - 144x^2$$

$17x^2 \cdot 144 \cdot 10^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 7^{11} \cdot 2^{15}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ca: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 7$$

$$b = 1$$

$$\frac{18}{18^2 - 9 \cdot 17}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot p$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 7^{y_2} \cdot n$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 7^{y_3} \cdot k$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + 2\sqrt{a}b + b^2$$

$$a = 14$$

$$b = 4$$

$$ab = 2^{x_1+x_2} \cdot 7^{y_1+y_2} \cdot m \cdot n$$

$$32 \cdot 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 75$$

$$y_1 + y_2 \geq 11$$

$$x_2 + x_3 \geq 17$$

$$y_2 + y_3 \geq 18$$

$$x_1 + x_3 \geq 23$$

$$y_1 + y_3 \geq 39$$

$$1 = 2\sqrt{a} + b$$

$$\frac{9}{(9^2 - 9)}$$

$$\frac{18^2}{(18^2 - 9 \cdot 14)}$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 55 \quad 2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 68$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 27,5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 34$$

$$\geq 28$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 34 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 28$$

$$y_1 = 19$$

$$x_1 = 11$$

$$y_3 = 20$$

$$x_3 = 12$$

$$y_2 = 0$$

$$81$$

$$x_2 = 5$$

$$abc = 2^{28} \cdot 5^{39}$$

$$x_1 = 14$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 9$$

$$\frac{17}{33} = 156$$

$$26 \cdot 6 = 156$$

$$9x = \pm \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$-69x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$D = 138^2 - 4 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13 =$$

$$= 16 \cdot 6 \cdot 26 = 16 \cdot 156$$

$$x = \frac{-12 \pm 4\sqrt{156}}{-69} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{156}}{-69}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{156}}{-69}$$

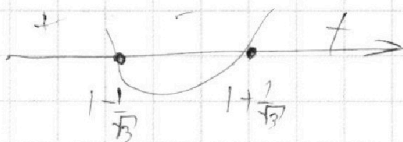
$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$



$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{-6 - 2\sqrt{156}}{-69} = \frac{6 + 2\sqrt{156}}{69}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b = \cancel{a} + b^2 + 2\sqrt{a}b \frac{30}{69} \leq \frac{6+2\sqrt{156}}{69} \leq \frac{32}{69} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$1 = b + 2\sqrt{a}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \leq \frac{30}{69}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$3 < 90$$

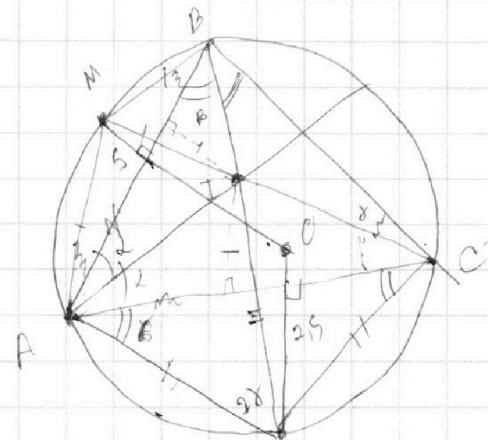
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

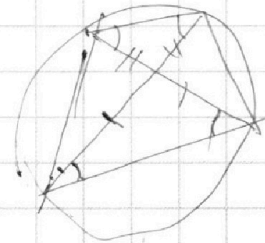
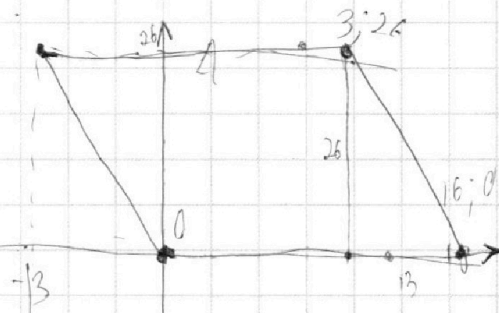
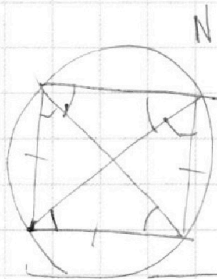


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle MAN = \angle MIN = 2\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ + 2\alpha$$

$$\angle BON = 13/33$$



$$g:m$$

$$\downarrow$$

$$m=g$$

$$2(x_2) - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 0$$

$$x_2 = 16 \quad y_2 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad y_1 = 26 \quad \checkmark$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b = mn$$

$$ab = mk$$

$$k:a, k:b \quad k \neq ab$$

$$a+b:m \Leftrightarrow a:m \vee b:m \vee$$

$$ab:m$$

$$a:m \Rightarrow b:m$$

$$x \cdot 26$$

$$a = \frac{mk}{b}$$

$$b = \frac{mk}{a}$$

$$\left. \begin{aligned} a+b &= mn \\ ab &= mk \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{k}{b} + \frac{k}{a} = n$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{m}{n} \Rightarrow a = \frac{m}{n} a$$

$$\frac{ab}{a} = \frac{mk}{a} = \frac{m}{n} a$$

$$a = \frac{m}{n} a - b$$

$$ab = \frac{m}{n} a - b^2 = \frac{m}{n} a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$(3x^2) / x$$

$$D = 36 - 3 \cdot 8 = 12$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a + 1 - 9x}$$

$$\sqrt{a + 1 - 9x} - \sqrt{a} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a + b = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} = 0$$

$$a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12$$

к.р.н. н.н.н.

$$1 - 9x = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\text{Проб. } \sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{4}{3}} = 0 \checkmark$$

$$12 + 5 + 6 = 33 / 9$$

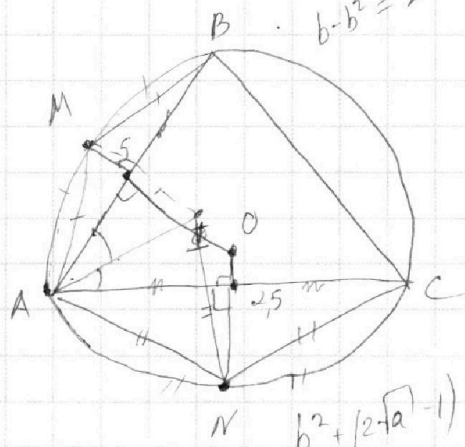
$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$2^{15} x$$

$$a+b = a + 2\sqrt{a}b + b^2$$

$$b - b^2 = 2\sqrt{a}b$$



$$b^2 + (2\sqrt{a} - 1)b = 0$$

$$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$$