



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$ab : 2^{15} \cdot 7^7 ; \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18} ; \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39} .$$

Представим числа a, b, c в виде произведений 2 и 7 в некоморой степени:

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

Конечно, числа a, b, c могут содержать другие простые множители, но тогда произведение abc точно не будет минимальным. Учтём это и решим систему произведений чисел следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 \geq 15 ; \\ a_2 + b_2 \geq 11 ; \\ \\ b_1 + c_1 \geq 17 ; \\ b_2 + c_2 \geq 18 ; \\ \\ a_1 + c_1 \geq 23 ; \\ a_2 + c_2 \geq 39 ; \end{array} \right.$$

Суммы первых (или однозначные) соответственно по индексам:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{55}{2} ; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 ; \end{array} \right.$$

Т.к. числа натуральные то и a_1, b_1, c_1 - натуральные:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 ; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 ; \end{array} \right.$$

Т.к. $a_2 + c_2 \geq 39$, то и $a_2 + b_2 + c_2 \geq 39$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 ; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 39 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Составьте приведенные примеры с максимальной степенью:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$$

Такой пример существует. Минимальное произведение abc:

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x, \text{ Задача } \sqrt{4}$$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0; \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0; \end{cases}$

Решим 1-е нер-во: $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 + 24}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$x_2 = \cancel{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$\cancel{x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3})} \cup \cancel{[1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)}$$

Решим 2-е нер-во:

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x.$$

В итоге: ОДЗ: $x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

2) Домножим обе части ур-ия на $(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$.
Эта скобка всегда > 0 , т.к. $3x^2 + 3x + 1 > 0$. В левой части разности квадратов:

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1});$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1});$$

Первый корень: $x = \frac{1}{9}$.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

3) Острова следят:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \leq 1; \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 \leq 0; \\ 3x(x+1) \leq 0; \end{cases}$$

2.1 $3x^2 - 6x + 1 \leq 0$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 12}}{6} = 1 + \frac{2\sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > 0$$

$$\left\{ \sqrt{6} < \sqrt{9} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} < 1$$

2.2 $3x(x+1) \leq 0$

$$x \in [-1; 0]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем систему:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}; \\ -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$$

Множества не пересекаются. Значит решений корней нет, уравнения
точно нет. Значит, корень у ур-ия только один $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

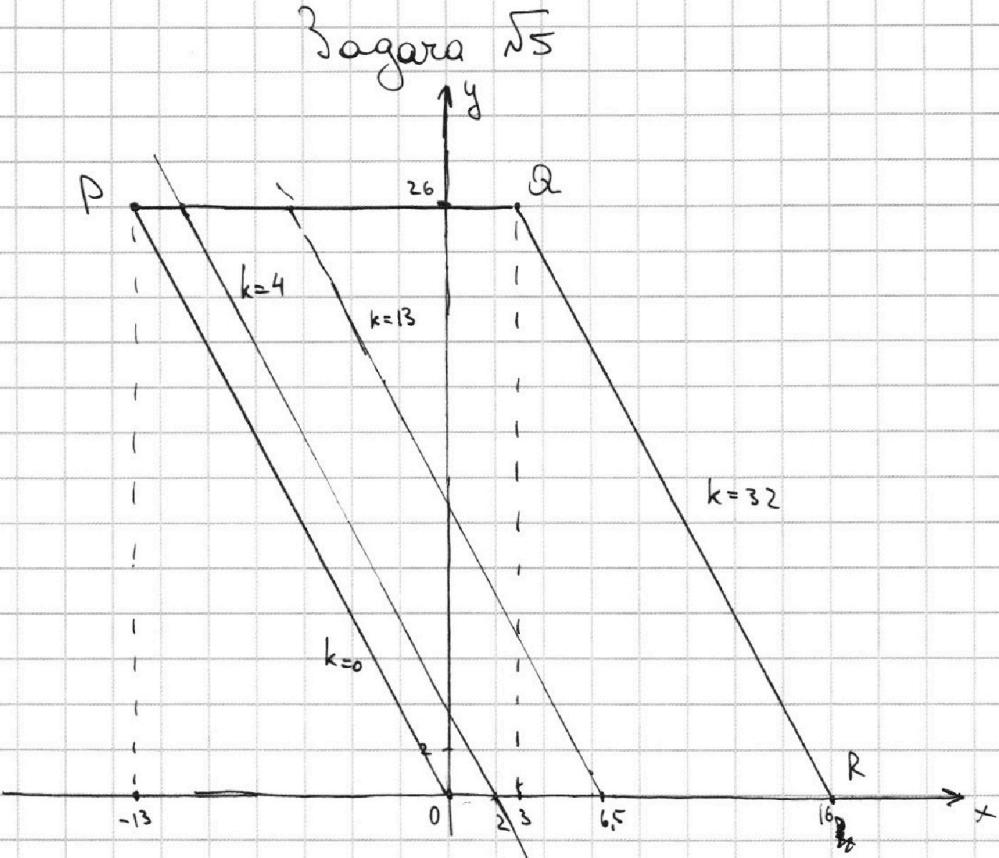
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что точки, для которых $2x+y=\text{const}$

лежат на одной прямой $y=k-2x$ ($k=\text{const}$, некоторое
число). А также эти ~~линии~~ ~~на~~ прямые параллельны
сторонам параллелограмма. Это заметно упрощает
задачу. Всего таких прямых, для которых $2x+y=k=\text{const}$
~~33~~ (от 0 до 32) ~~беско~~ (так ~~многие~~ на этой прямой было бы
хоть бы одна точка с ~~одинаковыми~~ координатами).

2) Посчитаем ~~координатами~~ кол-во точек с ~~одинаковыми~~ координатами
на этих прямых. Прямые, которые ~~выходит~~ перес-
екают ось Ох в точке с ~~одинаковыми~~ значениями

Погодней рассмотрим эти прямые (рис. 1 на след. стр.)
На прямых, которые выходят из чистого x ~~есть~~ кол-во точек:

$$N_1 = \frac{|y_1|}{2} + 1$$



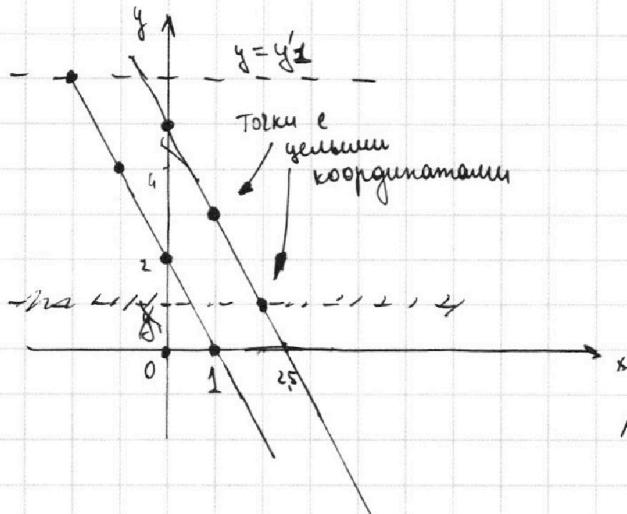
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.



Кол-во токек на прямых
с целыми коэффициентами

$$N_1 = \frac{26}{2} + 1 = 14$$

Окружите в меньшую сторону.
то есть, возвращайтесь к
параллелограмму, на прямых

с целыми коэффициентами начиная с OP токек :

$$N_1 = \frac{26}{2} + 1 = 14$$

На прямых с целыми коэффициентами :

$$N_2 = \frac{26}{2} = 13.$$

~~Две каждой пары~~ Всего пар прямых коэффициентов
k, для которых отмечены на 14, 19. (от о до
в) из которых 10 прямых с целыми коэффициентами, а
3 с дробными. Две каждой пары сложатся на
одной прямой подойдут все токек на другой. Всего
вариантов:

$$N = 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 1440 + 1690 - 169 = 2961$$

Ответ: 2961

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{array} \right. ;$$

1) Найдём со 2-го нер-ва. Заметим, что $x^2 + y^2 = 1$ - ур-е
окружности радиуса 1 в точке $(0, 0)$, а $x^2 + (y-12)^2 = 16$ - ур-е
окружности радиуса 4 в точке $(0, 12)$. Такое $x^2 +$

значит, $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ - это все точки вне окружности и на её внешней
окружности; $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ - это точки внутри окружности и на самой окружности.
Аналогично и с $(x^2 + (y-12)^2 - 16)$. Система Равносильная система:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + y - 8b = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. ;$$

Из этих соображений следует 1-я система совокупности
это ~~все~~ точки внутри окружности радиуса 4 и сама окружность
радиуса 4. А 2-я система совокупности это ~~все~~ точки внутри
окружности радиуса 1 и сама окружность радиуса 1. Рисунок
на другой странице.

2) $ax + y - 8b = 0$ - ур-е прямой. Эта прямая делит плоскость
касательно и по одному другому окружности. Всего возможно 4
прямых ~~лучей~~. Примем где пары симметричных $\Rightarrow a_1 = -a_2$; $a_3 = -a_4$.

Найдем a_1 и a_3 . Эти прямые симметрично изображены
на след. стр.

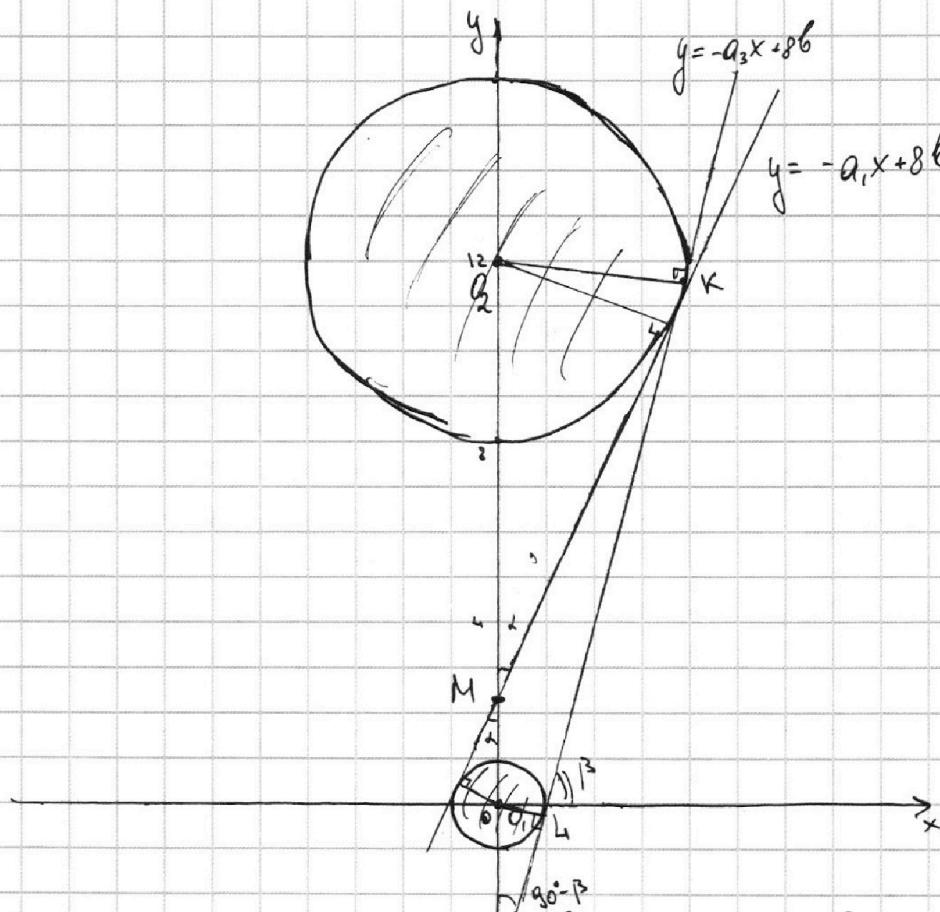
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Углы подобны трапеций образованных осью O_1O_2 , прямой $y = -a_3x + b_6$, "радиусов окр-тий проведенных к точкам касания:

$$\frac{1}{OM} = \frac{4}{MO_2}$$

$$\frac{MO_2}{MO_1} = 4 ; \quad MO_1 + MO_2 = O_1O_2 = 12 \Rightarrow MO_1 = 2,4 \quad MO_2 = 9,6$$

$$a_1 = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{4}{O_2M} = \frac{4}{9,6} \\ \end{array} \right. \quad = \frac{\sqrt{9,6^2 - 4^2}}{9,6} = \frac{\sqrt{5,6 \cdot 13,6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 39}}{40} = \frac{\sqrt{17 \cdot 7}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Теперь найдём a_3 . Из подобия $\triangle NO_1L \sim \triangle NO_2K$:

$$\frac{1}{NO_1} = \frac{4}{NO_2}$$

$$\begin{cases} NO_2 = 4NO_1 \\ NO_1 + \cancel{NO_2} = NO_2 \end{cases} \Rightarrow NO_1 = 4$$

$$a_3 = \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{4 - \cos^2 \beta}}{\cos \beta} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = -\sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{\sqrt{119}}{5}; a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}; a_3 = \sqrt{15}; a_4 = -\sqrt{15}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Черновик!

$$Q_6 : 2^{15}7^8 \quad ; \quad Q_C : 2^{23}7^{39}$$

аб. б. а. с.

1

2

3

4

5

6

7

~~abc~~

~~a~~

~~b~~

~~c~~

<div data-bbox

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

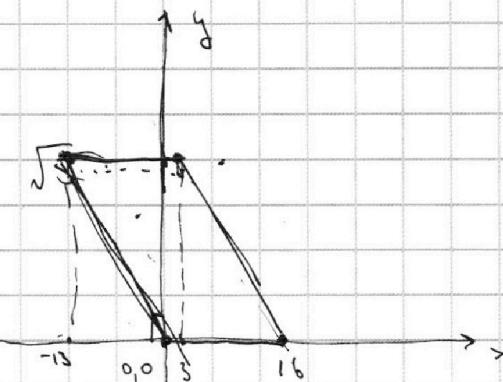
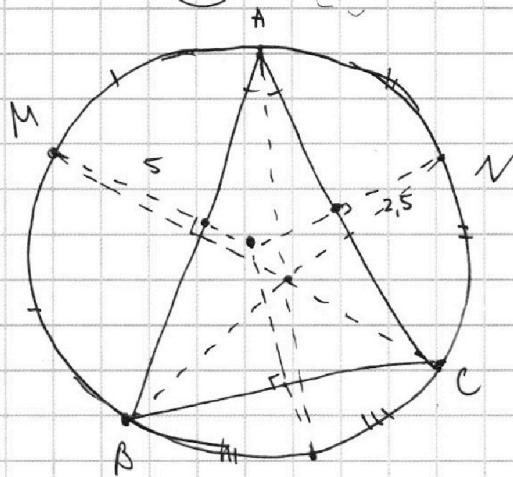


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№Черновик

$$x = y$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

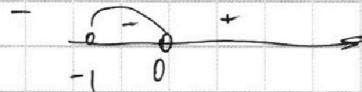


$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) &= 14 \\ 2x_2 + y_2 - 2x_1 - y_1 &= 14 \end{aligned}$$

$$\text{Баз } 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$3(x+\frac{1}{2}) < 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 < 1$$



$$3x^2 - 6x + 1 < 0$$

$$\frac{6 + \sqrt{36 - 12}}{6} = 1$$

$$\frac{6 - \sqrt{36 - 12}}{6} = 6 - \frac{\sqrt{12}}{3}$$

