



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача №1

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{\dots} ; \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18} ; \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}.$$

Представим числа  $a, b, c$  в виде произведения 2 и 7 в некоторой степени:

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

Конечно, числа  $a, b, c$  могут содержать другие простые множители, но тогда пр-ые  $ab, bc$  точно не будут минимальными. Из условий делимости произведений чисел следует:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15 ; \\ a_2 + b_2 \geq 11 ; \\ b_1 + c_1 \geq 17 ; \\ b_2 + c_2 \geq 18 ; \\ a_1 + c_1 \geq 23 ; \\ a_2 + c_2 \geq 39 ; \end{cases}$$

Сложим пер-ва (они одинаковые) соответственно по индексам:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{55}{2} ; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 ; \end{cases}$$

Т.к. числа натуральные то и  $a_1, b_1, c_1$  - натуральные:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 ; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 ; \end{cases}$$

Т.к.  $a_2 + c_2 \geq 39$ , то и  $a_2 + b_2 + c_2 \geq 39$ :

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Осталось привести пример с такими степенями:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$$

Такой пример существует. Минимальное произведение abc:

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

1) ОДЗ:  $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Решим 1-е неравенство:  $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 24}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

~~$x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$~~

Решим 2-е неравенство:

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x$$

В итоге: ОДЗ:  $x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

2) Проверим обе части уравнения на  $(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$ .  
Эта скобка всегда  $> 0$ , т.к.  $3x^2 + 3x + 1 > 0$ . В левой части разность квадратов:

$$\begin{aligned} (3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) &= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}); \\ 1 - 9x &= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}); \end{aligned}$$

Первый корень:  $x = \frac{1}{9}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \leq 1 \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 \leq 0 \\ 3x(x+1) \leq 0 \end{cases}$$

2.1  $3x^2 - 6x + 1 \leq 0$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 12}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} > 0 \quad \left\{ \sqrt{6} < \sqrt{9} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} < 1$$

2.2  $3x(x+1) \leq 0$

$$x \in [-1; 0]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем систему:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}; \\ -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$$

Множества не пересекаются. Значит корней у уравнения нет. Значит, корень у уравнения только один  $x = \frac{1}{9}$ .

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

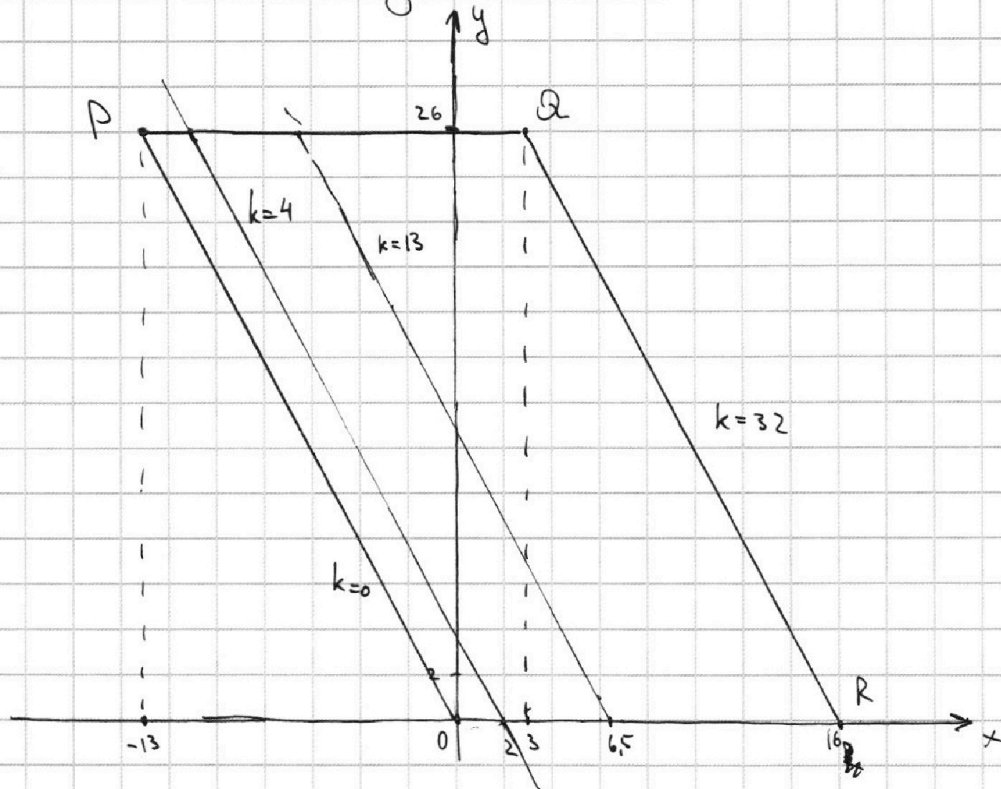
1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 5



1) Заметим, что точки, где которых  $2x + y = \text{const}$

лежат на одной прямой  $y = k - 2x$  ( $k = \text{const}$ , некоторо число). А также эти ~~линии на x~~ прямые параллельны сторонам параллелограмма. Это заметно упрощает задачу. Всего таких прямых, где которых  $2x + y = k = \text{const}$  ~~33~~ (от 0 до 32) ~~выходит~~ (так чтобы на этой прямой была бы хотя бы одна точка с целыми коэффициентами).

2) Посчитаем ~~то~~ кол-во точек с целыми <sup>координатами</sup> коэффициентами на этих прямых. Прямые, которые ~~выходят~~ пересекают ось  $Ox$  в точке с целым значением.

Подробнее рассмотрим эти прямые (рис. 1 на след. стр.)  
 На прямых, которые выходят из целого  $x$  ~~точек~~ кол-во точек:

$$N_i = \frac{y_i}{2} + 1$$

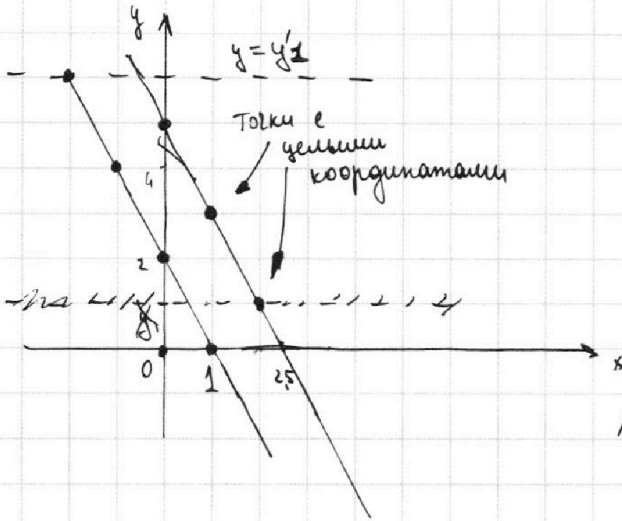
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Кол-во точек на прямой  
с целыми коэффициентами

$$N_2 = \frac{y_1}{2}$$

Округлять в меньшую сторону.

То есть, возвращаясь к  
параллелограмму, на прямой

с целыми коэффициентами, начиная с ОР точек:

$$N_1 = \frac{26}{2} - 1 = 14$$

На прямой с четными коэффициентами:

$$N_2 = \frac{26}{2} = 13$$

Для каждой пары Всего пар прямых коэффициенты  
 $k$ , для которых отличаются на 14, 19. (от 0 до  
в) 9. Из которых 10 прямых с четными коэффициентами, 9  
с четными. Для каждой точки из такой пары на  
одной прямой попадут все точки на другой. Всего  
вариантов:

$$N = 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 1440 + 1690 - 169 = 2961$$

Ответ: 2961

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



## Задача №6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0; \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0; \end{cases}$$

1) Начнем со 2-го нерав. Заметим, что  $x^2 + y^2 = 1$  - уравнение окружности радиуса 1 в точке  $(0; 0)$ , а  $x^2 + (y - 12)^2 = 16$  - уравнение окружности радиуса 4 в точке  $(0; 12)$ . Также  $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$  - это все точки вне окружности и на ней сама окружность;  $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$  - это точки внутри окружности и сама окружность. Аналогично и с  $(x^2 + (y - 12)^2 - 16)$ . Итого равносильная система:

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0; \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0; \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0; \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

Из этих соображений следует 1-я система совокупности это <sup>все</sup> точки внутри окружности радиуса 4 и сама окружность радиуса 4. А 2-я система совокупности это все точки внутри окружности радиуса 1 и сама окружность радиуса 1. Рисунок на другой странице.

2)  $ax + y - 8b = 0$  - уравнение прямой. Эта прямая касается и той и другой окружности. Всего возможно 4 прямых ~~две~~. Прямые две пары симметричных  $\Rightarrow a_1 = -a_2$ ;  $a_3 = -a_4$ .

Найдем  $a_1$  и  $a_3$ . Эти прямые эквивалентно изображены на след. стр.



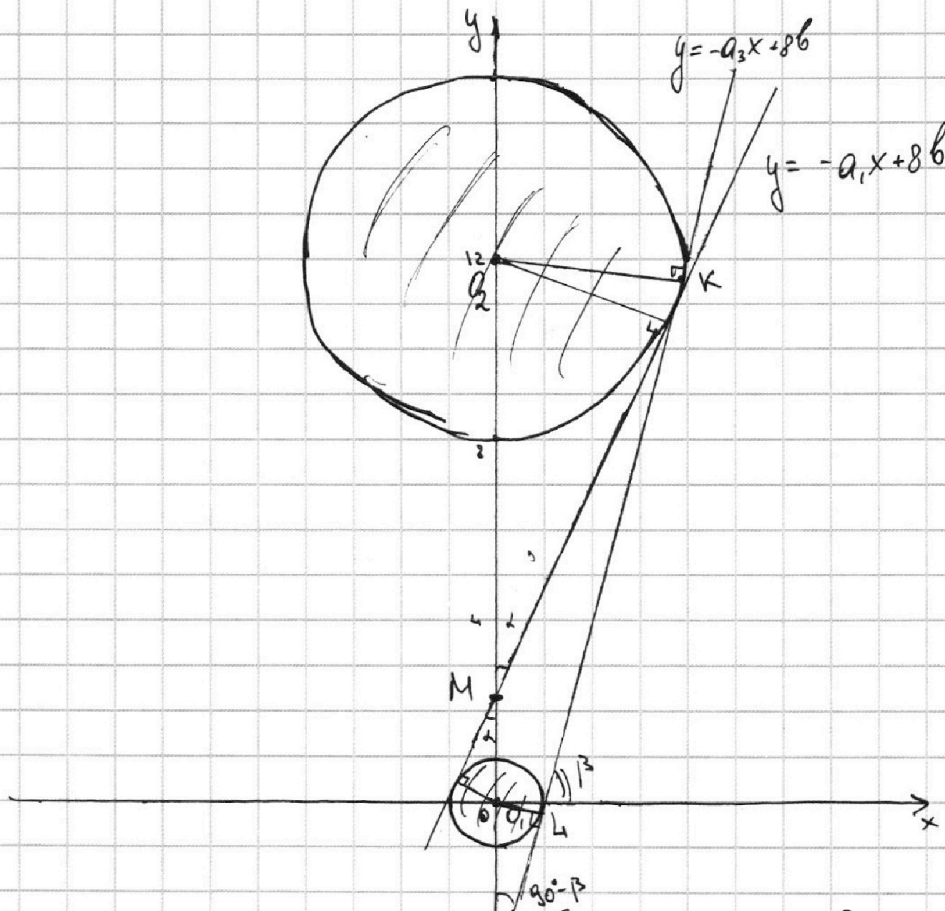
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из подобия тр-ков образованных осью Oy, прямой  $y = -ax + 8b$ , и радиусов окр-тей проведенных к точкам касания.

$$\frac{1}{O_1M} = \frac{4}{MO_2}$$

$$\frac{MO_2}{MO_1} = 4 ; \quad MO_1 + MO_2 = O_1O_2 = 12 \Rightarrow MO_1 = 2,4$$

$$MO_2 = 9,6$$

$$a_1 = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{4}{O_2M} = \frac{4}{9,6} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{9,6^2 - 4^2}}{9,6} = \frac{\sqrt{5,6 \cdot 13,6}}{9,6} = \frac{\sqrt{7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 33}}{40} = \frac{\sqrt{17 \cdot 7}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Теперь найдем  $a_3$ . Из подобия  $\triangle NO_1L \sim \triangle NO_2K$ :

$$\frac{1}{NO_1} = \frac{4}{NO_2}$$

$$\begin{cases} NO_2 = 4NO_1 \\ NO_1 + NO_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NO_1 = 4 \\ NO_2 = 16 \end{cases}$$

$$a_3 = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}}{\cos \beta} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = -\sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{\sqrt{119}}{5}; a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}; a_3 = \sqrt{15}; a_4 = -\sqrt{15}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Черновик!

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$abc$

$abc$

$b = 2^{15} \cdot 7^8$   
 $a = 1$   
 $c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

$(abc)^2$

$2^{45} \cdot 7^{68}$

$abc_{min} = 2^{23} \cdot 7^{34}$

$abc = 2^{39} \cdot 7^{30}$

$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$   
 $b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$   
 $c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

$a_1, b_1, c_1$

$a_1 + b_1 + c_1 = \min$   
 $a_2 + b_2 + c_2 = \min$

$a_1 - b_1 \geq 15$

$a_1 + c_1 \geq 23$

$a_2 + b_2 \geq 11$

$a_2 + c_2 \geq 39$

$b_1 + c_1 \geq 17$

$b_2 + c_2 \geq 18$

$a_1 + b_1 + c_1 \geq 28$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 34$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 39$

№2  $\frac{a}{b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{b(\frac{a}{b} + 1)}{b^2(\frac{a}{b} - 7 + \frac{a}{b} + 1)}$

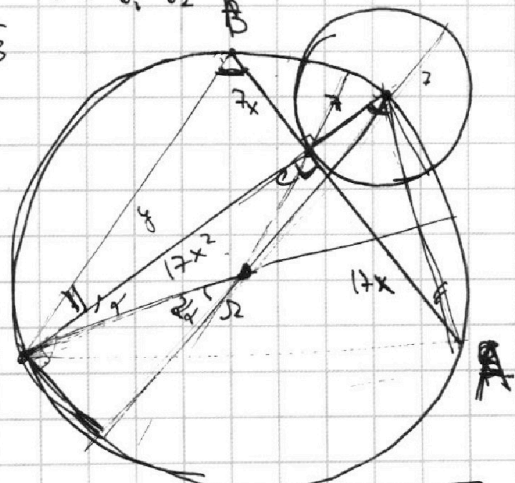
$= \frac{\frac{a}{b} + 1}{b(\frac{a}{b} - 7 + \frac{a}{b} + 1)}$

$= \frac{a+b}{(a-b)^2 - 9ab} = \frac{1}{a+b - \frac{9ab}{a+b}}$

$a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots$   
 $b = b_1 \cdot b_2$

$7+4=11$   
 $14$   
 $18$   
 $C = 2^{13} \cdot 7^{19}$   
 $a = 2^{10} \cdot 7^{20}$   
 $b = 2^5$

№3



$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$

$7y = 7 \cdot 17x^2$   
 $y = 17x^2$

$(23 \cdot 2 \sin d)^2 + (17x^2 + 7)^2 = 26^2$

$1 - 9x > 0$   
 $\frac{3}{4} - \frac{3x+1}{2} = \frac{1}{4}$   
 $\frac{3-6+4}{4} = \frac{1}{4}$

№4  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$\frac{3x^2 - 6x + 2}{2} > \frac{3x^2 + 3x + 1}{2}$   
 $6 - \sqrt{36 - 24}$

$-3 = \sqrt{9 - 12}$   
 $-6x + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x + 1$   
 $3\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$   
 $1 - 9x \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 0$

$\frac{1440}{+1690}$   
 $\frac{3130}{-169}$   
 $\frac{2961}{}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



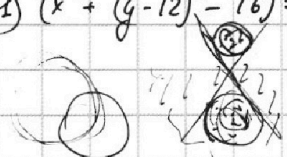
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ Черновик

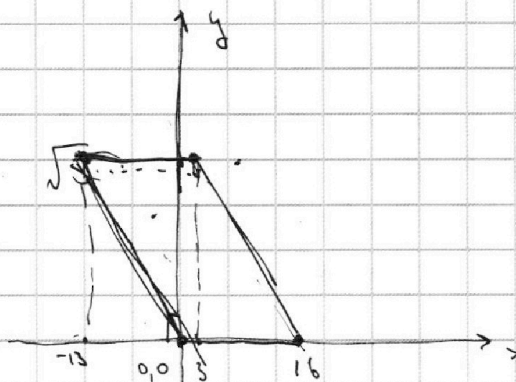
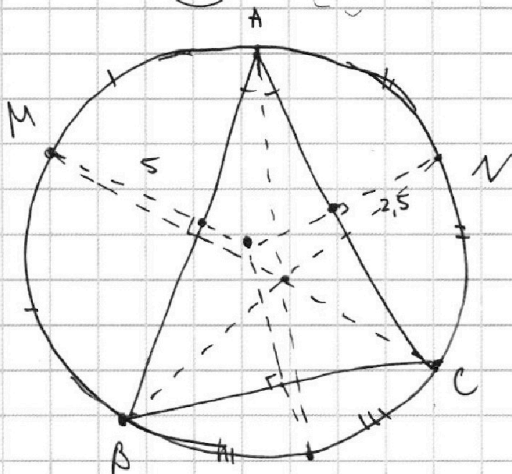
$$x=y$$

$$\begin{cases} 2x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$



№

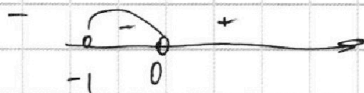


$$\begin{cases} 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14 \\ 2x_2 + y_2 - \frac{1}{2}(2x_1 + y_1) = 14 \end{cases}$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$3x(x+1) < 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 < 1$$



$$3x^2 - 6x + 1 < 0$$

$$\frac{6 + \sqrt{36 - 12}}{6} = 1$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{6}}{6} = 6 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

