



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



n1

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot m$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k$$

$$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+39+18} \cdot mnk = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot mnk$$

$$abc = 7^{34} \cdot \sqrt{2^{55} mnk}$$

$abc$  min, когда  $\sqrt{2^{55} mnk}$  - минимален и равен натуральному числу, ( $m, n, k$  - натуральные)

$$7^{18} \cdot 7^{11} = 7^{29} < 7^{39} \Rightarrow ab^2 \geq ac \Rightarrow m \cdot n \geq 7^{10} \cdot 2k$$

$$2^{15} \cdot 2^{12} = 2^{27} < 2^{23} \Rightarrow$$

$$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{7^{10} k^2} \geq ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k$$

$$abc \text{ min, если } k=1 \Rightarrow abc \text{ min} =$$

$$mn \geq 7^{10} \cdot 2k \Rightarrow abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{7^{10} \cdot k^2}$$

$$abc \text{ min, когда } k=1 \quad abc \text{ min} = 7^{39} \cdot 2^{28}$$

Пример:  $a = 7^{11} \cdot 2^{10}$

$$b = 2^6$$

$$c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

Ответ:  $7^{39} \cdot 2^{28}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = k = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab}$$

~~$$\frac{1}{k} = \frac{a+b}{9ab} \cdot \frac{9ab}{a+b}$$~~

~~$\frac{a}{b}$  - несократимы  $\Rightarrow$   $a$  и  $b$  - взаимно простые~~

~~$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \cdot b = \frac{(a+b) : kb, ((a+b)^2-9ab) : m}{a \cdot a - 2a + b} \Rightarrow 9ab : m$$

$$a \cdot a - 2a + b$$

$$a \cdot m, b \cdot m \text{ (м.к. } a \text{ и } b \text{ взаимно просты)}$$~~

~~$$9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m_{\max} = 9$$

Ответ:  $m = 9$~~

~~$$\left. \begin{array}{l} a+b : m \\ ((a+b)^2 - 9ab) : m \end{array} \right\} \text{ не юв. } \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot m, b \cdot m \\ \text{м.к. } a \text{ и } b \text{ взаимно просты} \end{array} \right\}$$~~

~~$$((a+b)^2 - 9ab) : m \Rightarrow 9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\max} = 9$$~~

Ответ:  $m = 9$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нч.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 - 1} - \sqrt{(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 + 9x - 2} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = z$$

$$(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 - 1 = t$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t - 2} = z$$

$$t - 2\sqrt{t^2 - t} + t = z^2$$

$$2t - t = z^2$$

$$z^2 - 2 + 2\sqrt{t^2 - t} = 0$$

$$z^2(z-1)^2 = 4t^2 - 4t$$

$$z^4 - 2z^3 + z^2 = 4t^2 - 4t$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} - \sqrt{(x-1)^2 \cdot 3 - 1 + (9x-1)^2} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = -(x-1) \cdot 9 + 8$$

$$\sqrt{t} - z = \sqrt{t - 2}$$

$$t - 2 = t + z^2 - 2z\sqrt{t}$$

$$-z^2 - z = -2z\sqrt{t}$$

$$z^2 + z = 2z\sqrt{t}$$

$$z^2 + z + 1 = 4t$$

$$4t = z^2 + z + 1$$

$$4t = z^2 + z + 1$$

Подставим  $z$  и  $t$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1-9x)^2 + 2(1-9x) + 1 = 12(x-1)^2 - 4$$

$$1 + 81x^2 - 18x + 2 - 18x + 1 = 12x^2 - 24x + 12 - 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 69 \cdot 16}}{138} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138} = \frac{12 \pm 8\sqrt{39}}{138}$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Ответ:  $x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$        $x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



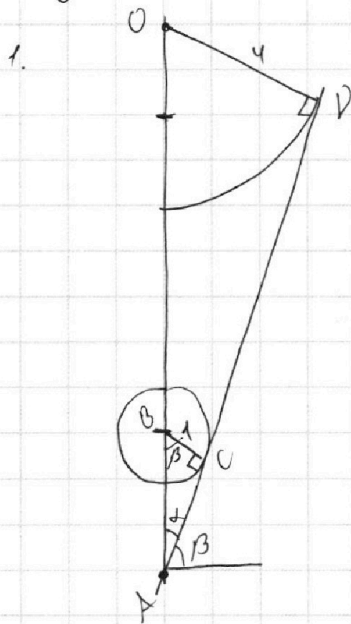
Для I неравенства ур-а:

$$ax + y - 8b = 0$$

$y = -ax + 8b$  - ур-е прямой с условием что  $a$  и  $8b$  по условию - любые числа

На графике с окружностью может быть только 2 прямые, имеющие 2 решения - касательные к окружности.

В силу симметрии относительно  $Oy$ , наклоны прямых  $k_1$  и  $k_3$ ,  $k_2$  и  $k_4$  равны по модулю и разны отличаются знаком.



$$\triangle AOD \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{OD}{BC} = \frac{AO}{AB} = \frac{AB+BO}{AB}$$

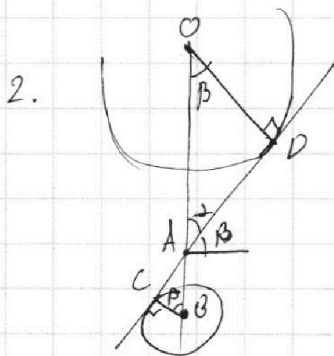
$$\gamma = \frac{AB+12}{AB}$$

$$3AB = 12$$

$$AB = 4$$

$$\operatorname{tg} \beta = -a = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{16-1}}{1} = \sqrt{15}$$

Или наклоны  $k_2 = \sqrt{15}$ ,  $k_4 = -\sqrt{15}$



$$\triangle ABC \sim \triangle AOD \Rightarrow \frac{OD}{CB} = \frac{OA}{AB} = \frac{12-AB}{AB}$$

$$5AB = 12, \quad AB = 2,4$$

$$\operatorname{tg} \beta = -a = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 1}}{1} = \sqrt{\frac{119}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

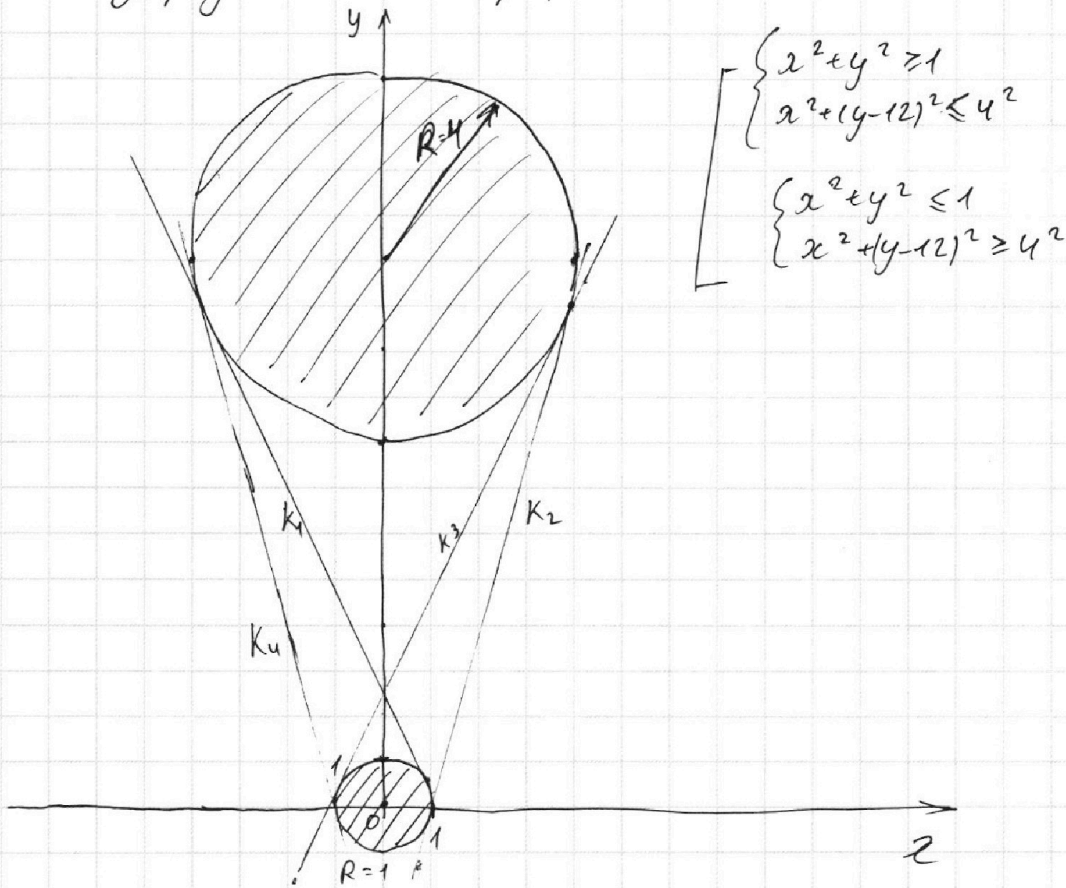
Для II неравенства:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0, \text{ или}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ и } x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \quad \text{или}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ и } x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0$$

Изобразим это на графике:



Видно, что области в двух окружностях ~~сост~~ и точки на самих окружностях соответствуют решениям системы (I)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1    2    3    4    5    6    7  
                 

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Вопрос: Косуго. Наклон  $k_3 = \frac{\sqrt{119}}{5}$ ,  $k_4 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Ответ:  $a_1 = -\sqrt{15}$ ,  $a_2 = +\sqrt{15}$ ,  $a_3 = \frac{\sqrt{119}}{5}$ ,  $a_4 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Прямые с другими косуго наклона будут иметь  
либо 0, либо 1, либо  $\infty$  много решений.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

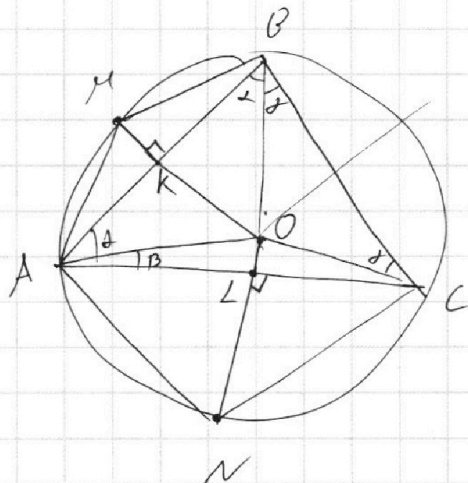
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ Z



Дано:  $MK = 5$ ,  $ML = 2,5$

Решение:

$$\sphericalangle AN = \sphericalangle NC \Rightarrow AN = NC$$

$$\begin{array}{l} CN = AN \\ LN \text{ оду } \\ \sphericalangle CLN = \sphericalangle ALN = 90^\circ \end{array} \Bigg| \Rightarrow \triangle AON = \triangle CON \Rightarrow$$

$\Rightarrow AL = LC \Rightarrow L$  середина на  $ON \Rightarrow LO$  - сеп пер  $\triangle ABC$ .

$$\sphericalangle AM = \sphericalangle MB \Rightarrow AM = MB$$

$$\begin{array}{l} MK \text{ оду } \\ AM = MB \\ \sphericalangle MKA = \sphericalangle MKB = 90^\circ \end{array} \Bigg| \Rightarrow \triangle AKM = \triangle BKM \Rightarrow AK = KB \Rightarrow$$

$\Rightarrow K$  середина на  $MO \Rightarrow K$  сеп пер  $\triangle ABC$

$$AO = R = MO = ON$$

$$\sin \alpha = \frac{KO}{AO} = \frac{R-5}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{LO}{AO} = \frac{R-2,5}{R}$$

$\pi O$  м.о сепугов

$$\frac{\sin \alpha}{AL} = \frac{\sin 90}{AB}$$

$$\frac{\sin \alpha}{R-5} = \frac{\sin 90}{R}$$

si

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



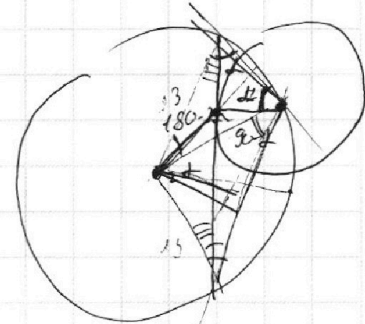
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



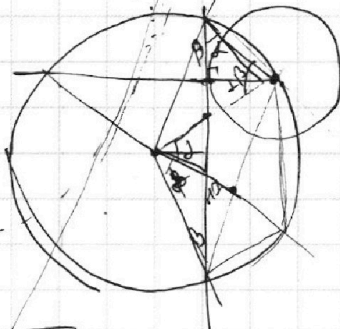
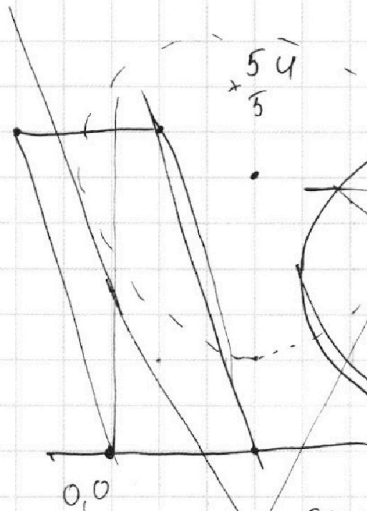
$$\begin{array}{r} 3 \\ +69 \\ 24 \\ +276 \\ 4 \\ 1104 \\ 144 \\ 1248 \end{array}$$

23.3

$$\begin{array}{r} 5 \\ +69 \\ +16 \\ 414 \\ 69 \\ 1104 \\ 144 \\ +248 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{array}$$



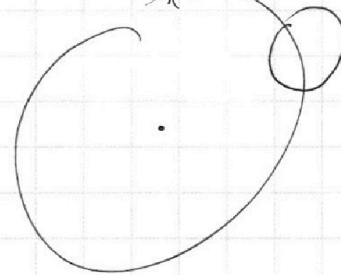
$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 5 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 624 \\ 312 \\ 156 \\ 78 \\ 39 \\ 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{array}$$

$$\sqrt{13^2 - 2^2} =$$
  

$$\begin{array}{r} 169 \\ -4 \\ \hline 120 \end{array}$$



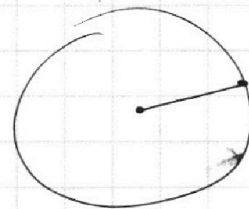
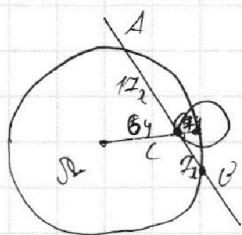
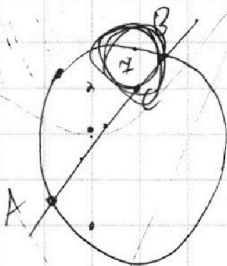
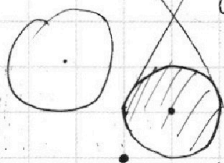
$ax + y = n$

$$\begin{array}{r} 138 \\ 69 \end{array} \Big| 2$$

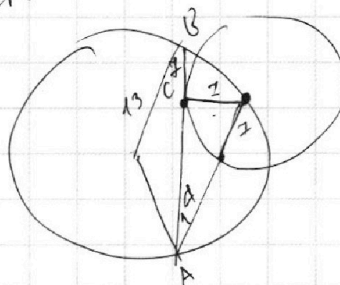
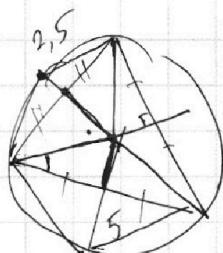
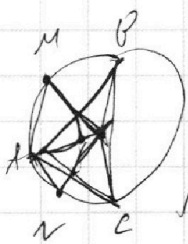
$y = -ax + b$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 78 \\ 16 \\ 468 \\ 78 \\ 1248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -25 \\ \hline 119 \end{array}$$



$\frac{AB}{\sin} = 2R$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

