



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot m$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k$$

$$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+39+18} \cdot mnk = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot mnk$$

$$abc = 7^{34} \cdot \sqrt{2^{mnk}}$$

abc min, когда $\sqrt{2^{mnk}}$ - минимальен и равен тому-
расположенному числу, (н.р. abc - натуральное)

$$2^{18} \cdot 7^{11} = 2^{29} < 2^{39} \Rightarrow abc \geq ac \approx 2^{39} \cdot 2^{10} \cdot 2^2$$

$$2^{15} \cdot 2^{12} = 2^{27} < 2^{23}$$

~~$$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{2^{10} \cdot K^2} \geq ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot K$$~~

~~abc min, если K=1~~

~~$$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{2^{10} \cdot K^2}$$~~

$$mn \geq 2^{10} \cdot 2K \Rightarrow abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{2^{10} \cdot K^2}$$

$$abc \min, \text{ когда } K=1 \quad abc \min = 7^{39} \cdot 2^{28}$$

As Beispiel: $a = 7^{11} \cdot 2^{10}$

$$b = 2^6$$

$$c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Oblen: } 7^{39} \cdot 2^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = k = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 5ab}$$

$$\frac{1}{k} = 9ab - \cancel{\frac{9ab}{a+b}}$$

Любое $\frac{a}{b}$ - несократимая $\Rightarrow a \text{ и } b$ - взаимно простые

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} \quad | : b$$

~~a/b~~

$$\frac{n+1}{a \cdot a - 2a + b}$$

$$(a+b) : km, ((a+b)^2 - 9ab) : m$$
$$\Rightarrow 9ab : m$$

~~a/m, b/m (m.r. a/b)~~
~~взаим. прост.)~~

$$9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m_{\max} = 9.$$

Однако: $m = 9$

$$\left. \begin{array}{l} a+b : m \\ ((a+b)^2 - 9ab) : m \end{array} \right\} \text{no y.u.} \quad \left. \begin{array}{l} a \nmid m, b \nmid m \\ (m.r. a/b \text{ взаим. прост.)} \end{array} \right.$$

$$((a+b)^2 - 9ab) : m \Rightarrow 9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\max} = 9$$

Однако: $m = 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\cancel{+3x^2} \cancel{x\sqrt{(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 - 1}} - \sqrt{(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 + 9x - 2} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = z$$

$$(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 - 1 = t$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t - z} = z$$

$$\cancel{t - 2\sqrt{t^2 - tz} - t + z = z^2}$$

 ~~$t^2 - tz = 0$~~

$$\cancel{z^2 - 2 + 2\sqrt{t^2 - tz} = 0}$$

$$\cancel{z^2(z-1)^2 = 4t^2 - 4tz}$$

$$\cancel{z^4 - 2z^3 + z^2 = 4t^2 - 4tz}$$

$$\cancel{\sqrt{3(x-1)^2 - 1} - \sqrt{(x-1)^2 \cdot 3 - 1 + (9x-1)}} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = -(x-1) \cdot 9 + 8$$

$$\sqrt{t} - z = \sqrt{t - z}$$

$$t - z = t + z^2 - 2z\sqrt{t}$$

$$-z^2 - z = -2z\sqrt{t}$$

$$\cancel{z^2 + z}$$

 ~~$2z\sqrt{t} = 1 - z$~~

$$z^2 + z = 2z\sqrt{t}$$

$$z^2 + 2z + 1 = 4t$$

$$4t = -2z + z^2$$

Подставим $z = ut$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1-9x)^2 + 2(1-9x) + 1 = 12(x-1)^2 - 4$$

$$1 + 81x^2 - 18x + 2 - 18x + 1 = 12x^2 - 24x + 12 - 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 69 \cdot 16}}{138} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138} = \frac{12 \pm 2\sqrt{312}}{138}$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\text{Одн.: } x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \quad x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

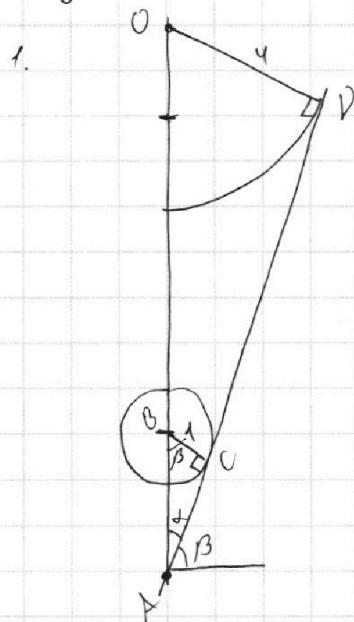
Для I решаем ур-я:

$$ax + y - 8b = 0$$

$y = -ax + 8b$ - ур-е прямой с угловым коэффициентом $-a$
 $8b$ по условию - модуль чисто

На графике с окружностью может быть только
одно решение, исключив 2 решения - касательные к окружности.

В силу симметрии относительно оси Oy , значения
коэффициентов k_1 и k_3 , k_2 и k_4 равны по модулю и
различаются знаком.



$$\triangle AOD \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{OD}{BC} = \frac{AO}{AB} = \frac{AB + BO}{AB}$$

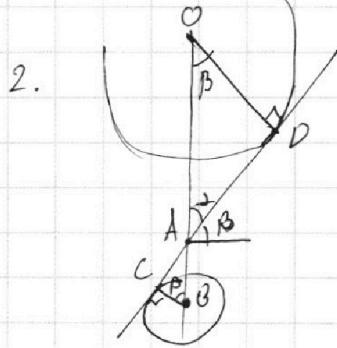
$$4 = \frac{AB + 12}{AB}$$

$$3AB = 12$$

$$AB = 4$$

$$\tan \beta = -a = \frac{AC}{BC} = \sqrt{\frac{16-1}{1}} = \sqrt{15}$$

Нашли $k_2 = \sqrt{15}$, $k_4 = -\sqrt{15}$



$$\triangle ABC \sim \triangle AOD \Rightarrow \frac{OD}{CB} = \frac{OA}{AB} = \frac{12 - AB}{AB}$$

$$5AB = 12, AB = 2,4$$

$$\tan \beta = -a = \frac{CA}{CB} = \sqrt{\frac{(12)^2 - 1}{5}} = \sqrt{\frac{119}{5}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

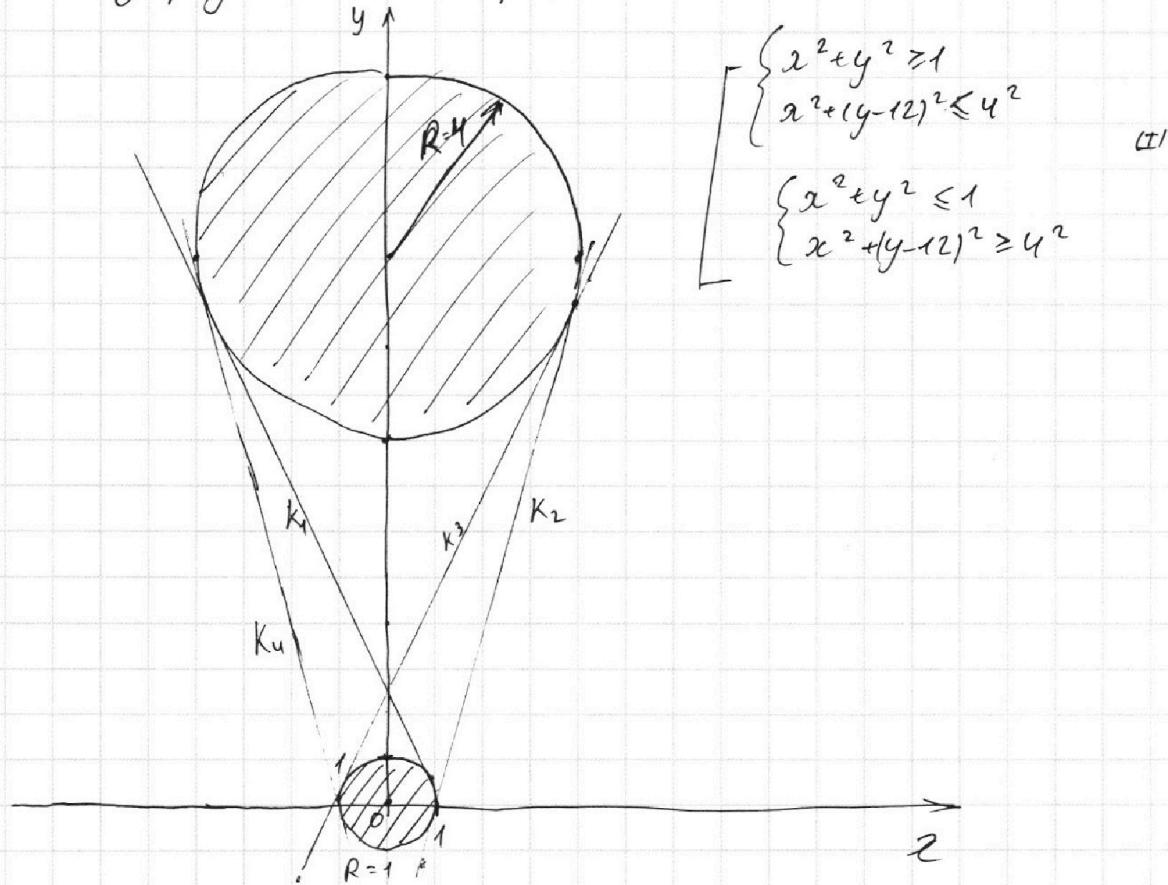
Две II неравенства:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0, \text{ или}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ и } x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 \quad \text{или:}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ и } x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0$$

Усматриваем это на картинке:



Видно, что решение в двух окружностях есть и
точки на самих окружностях составляют решения
системы (I).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение задачи пакета $K_3 = \frac{\sqrt{1+9}}{5}$, $K_1 = -\frac{\sqrt{1+9}}{5}$

Ответ: $a_1 = -\sqrt{15}$, $a_2 = +\sqrt{15}$, $a_3 = \frac{\sqrt{1+9}}{5}$, $a_4 = -\frac{\sqrt{1+9}}{5}$

Примес с другими задачами пакета будут иметь
либо 0, либо 1, либо ∞ вариантов решений.

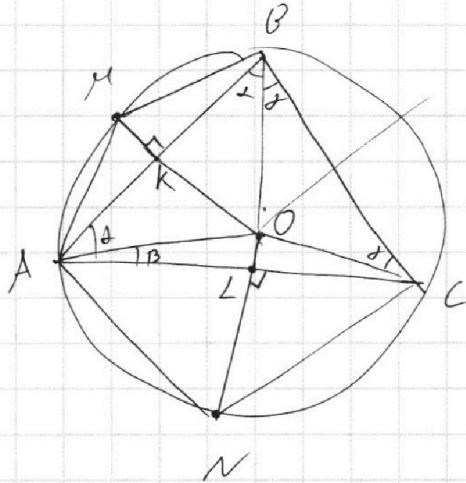
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Given: $MK = 5$, $ML = 2,5$

To prove:

$$\angle AN = \angle NL \Rightarrow AN = NC$$

$$\begin{aligned} CN &= AN \\ LN \text{ only} &\quad | \Rightarrow \triangle AON = \triangle CON \\ \angle CLN &= \angle ALN = 90^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow AL = LC \Rightarrow \angle \text{between } ON = \angle LO - \text{cpr per } \triangle ABC.$

$$\angle AM = \angle MB \Rightarrow AM = MO$$

$$\begin{aligned} MK \text{ only} \\ AM = MB \\ \angle MKA = \angle MKB = 90^\circ \end{aligned} \quad | \Rightarrow \triangle AKM = \triangle BKM \Rightarrow AK = KB \Rightarrow$$

$\Rightarrow K \text{ between } MO \Rightarrow K \text{ cpr per } \triangle ABC$

$$AO = R = MO = ON$$

$$\sin \alpha = \frac{KO}{AO} = \frac{R-5}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{LO}{AO} = \frac{R-2,5}{R}$$

πO m.o. sinuob

$$\sin \theta \cancel{\neq} \frac{\sin 90}{AO}$$

$$\sin \delta = \frac{\sin 90}{R-5}$$

Si

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 69 \\ \hline 24 \\ 276 \\ 4 \\ \hline 1104 \\ 144 \\ 1248 \end{array}$$

23.3

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 24 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 69 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \\ 144 \\ 1248 \end{array}$$

$$624 \quad 2$$

$$312 \quad 2$$

$$156 \quad 2$$

$$78 \quad 2$$

$$39 \quad 3$$

$$13 \quad 13$$

$$478$$

$$16$$

$$468$$

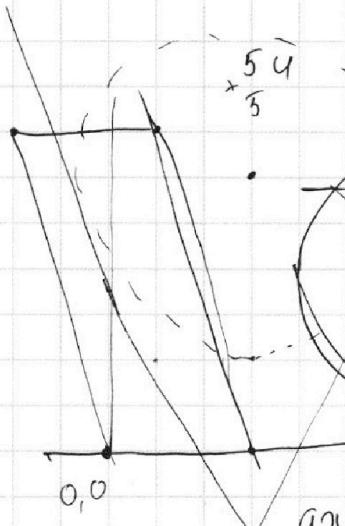
$$78$$

$$1248$$

$$-144$$

$$25$$

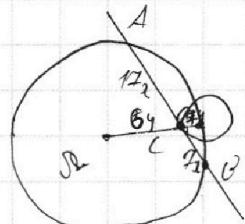
$$179$$



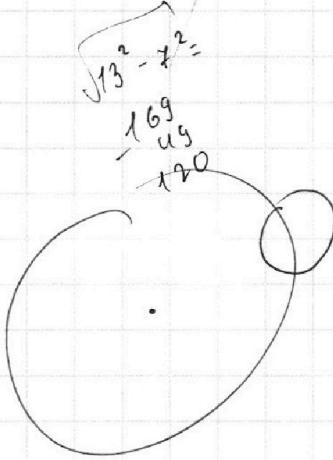
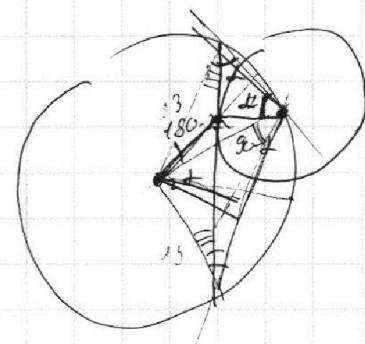
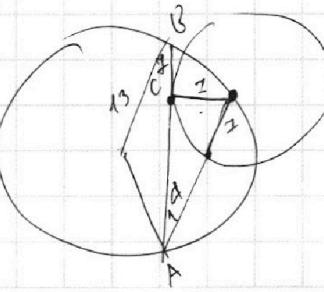
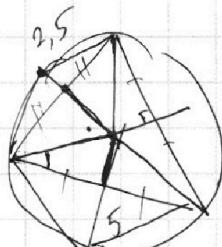
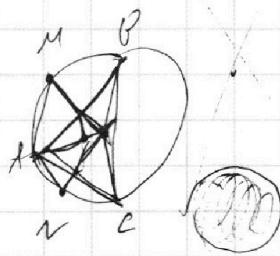
$$ax + y = n$$

$$138 \quad 1^2$$

$$69 \quad y = -ax + b$$



$$\frac{AB}{\sin C} = 2R$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!