



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC:CB=7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Представим a, b, c в таком виде:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot a', \quad \text{где } a', b', c' \not\equiv 2, \not\equiv 7$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot b'$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot c'$$

Тогда получим выражения:

$$ab = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \beta_2} \cdot a'b' = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} \cdot b'c' = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ca = 2^{\gamma_1 + \alpha_1} \cdot 7^{\gamma_2 + \alpha_2} \cdot c'a' = 2^{10} \cdot 7^{37}$$

Получаем нер-ва:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \gamma_2 + \alpha_2 \geq 37 \end{cases}$$

Если сложим нер-ва и поделим на 2,

$$\text{то получим: } \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 25,5; \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 32$$

$$\text{— Но } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37, \text{ и.к. } \gamma_2 + \alpha_2 \geq 37.$$

И.к. a, b, c — целые, то получим, что:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 26. \quad \text{Тогда: } abc \geq 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot a'b'c' \geq$$

$$\geq 2^{26} \cdot 7^{37} \cdot a'b'c' \geq 2^{26} \cdot 7^{37} \quad (\text{если взять } a', b', c' = 1)$$

Тогда $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$. Пример:

$$a = 2^8 \cdot 7^{18}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{19}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заменим сравнение знаменателя на
модулю числителя: $a^2 - 6ab + b^2 \equiv_{a+b}$

$$\equiv_{a+b} (a+b)^2 - 8ab \equiv_{a+b} -8ab.$$

Значит, $\text{НОД}(a^2 - 6ab + b^2, a+b) =$
 $= \text{НОД}(-8ab, a+b)$. Заменим, что
 $\text{НОД}(a, a+b) = \text{НОД}(a, b) = 1$; $\text{НОД}(b, a+b) =$
 $= \text{НОД}(b, a) = 1$. Значит, $\text{НОД}(-8ab, a+b) =$
 $= \text{НОД}(-8, a+b)$. Это аналогично тому,
что $\text{НОД}(8, a+b)$, и, к. если $-x : y$, то
и $x : y$. Значит, $m = \text{НОД}(8, a+b)$.

Вывод (аналогично) $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Ответ: $m = \text{НОД}(8, a+b)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

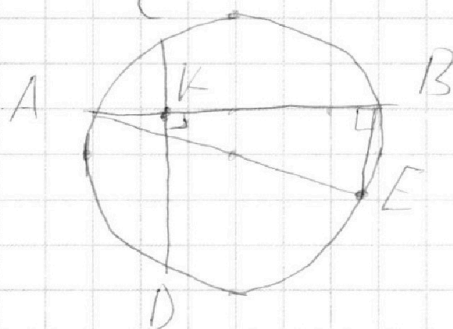
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓ 3.

Сначала докажем такую
лемму: пусть хорды в окружности
перпендикулярны и разбиваются на
отрезки длины a, b, c, d . Тогда
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$, где R - радиус
окружности.

$AK = a, BK = b, CK = c,$
 $DK = d$



Пусть хотя бы одна хорда не диаметр,
вспомогательная, пусть очевиден: диаметр хорда
длины $2R$. Проведем AE - диаметр. $\angle ABE = 90^\circ$,
отпр. на diam. Тогда $CBE D$ - четырехугольник,
в остр. $\Rightarrow$ равнобокий. $CD \parallel BE$, м.в. $\angle DKB = 90^\circ$ м.в. $AB \perp CD$
Тогда $BC = DE$. $BC^2 = CK^2 + BK^2 = b^2 + c^2$. $AD^2 = AK^2 +$
 $+ DK^2 = a^2 + d^2$. $\angle ADE = 90^\circ$ (отпр. на diam.)
Тогда $AE^2 = AD^2 + DE^2 = AD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$,
 $AE = 2R$, м.в. это диаметр. $AE^2 = 4R^2$.
М.в. г. Теперь вернемся к нашей задаче.

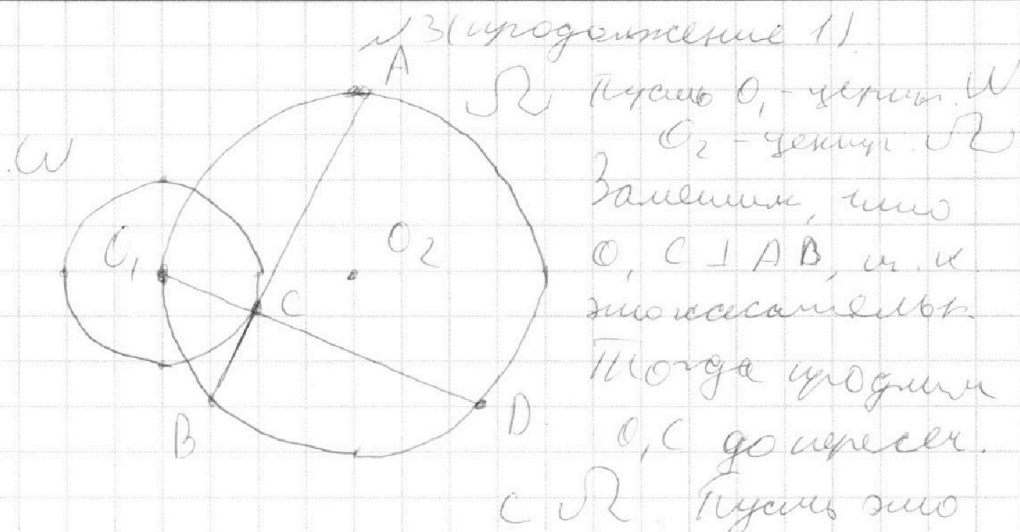
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



м.р. Тогда пусть $AC = 7x$, следовательно $BC = x$. $O_1C = 1$ - радиус W . Известный факт, что $O_1C \cdot CD = AC \cdot BC \Rightarrow O_1C = 7x^2$.

По лемме, доказанной ранее, получаем, что $(7x^2)^2 + (7x)^2 + (x)^2 + 1^2 = 4 \cdot 5^2$ (5 - радиус Ω)

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$(x^2 - 1)(49x^2 + 99) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$49x^2 + 99 = 0$$

$$x = 1, \text{ и.к. } x > 0$$

$$x = 1, AB = AC + BC = 8x = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Заменим, что $(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 7x$.

Пусть $2x^2 - 5x + 3 = a$, $2x^2 + 2x + 1 = b$. Тогда

$$2 - 7x = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$1) \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \quad 2) \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$a = b$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2 - 7x = 0$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

Имеем корень под корнем.

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

Рассмотрим $a + b$.

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 =$$

$$= 4x^2 - 3x + 4$$

Найдем мин. знач.

Это парабола, возрастает
значит оно в вершине.

$$x_B = -\frac{-3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

$$y_B = 4 \cdot \frac{9}{64} - 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 =$$

$$= \frac{9}{16} - \frac{9}{8} + 4 = -\frac{9}{16} + 4 =$$

$$= \frac{64 - 9}{16} = \frac{55}{16} > 1$$

$a + b > 1$, $2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ равенство не достигн.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Заметим, что если (x_1, y_1) и (x_2, y_2)
удовл. условию, то и (x_1, y_1) и $(x_2 + k, y_2 - k)$
подходят, и к $2x_1 - 2(x_2 + k) + y_1 - (y_2 - k) =$
 $= 2x_1 - 2x_2 + y_1 - y_2 = 12.$

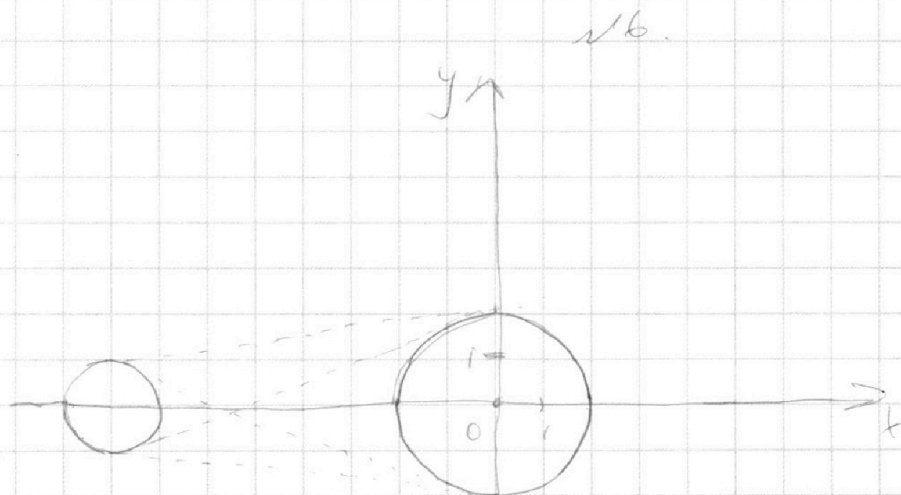
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Первая окружность заданная уравнением $(x+1)^2 + y^2 = 1^2$, вторая: $x^2 + y^2 = 2^2$.

Заметим, что любая точка плоскости будет удовл. пер-ву $(x+1)^2 + y^2 - 1 < 0$ и $x^2 + y^2 - 4 > 0$, и т.д. у них не будет

пересек и одну изобразим, когда все одна точка ≤ 0 , но вторая обяз. > 0 .

Значит, у нас есть 4 знач. а, которые соотв. 4 условиям, являющимся общими касательными, все они будут различными, верно.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

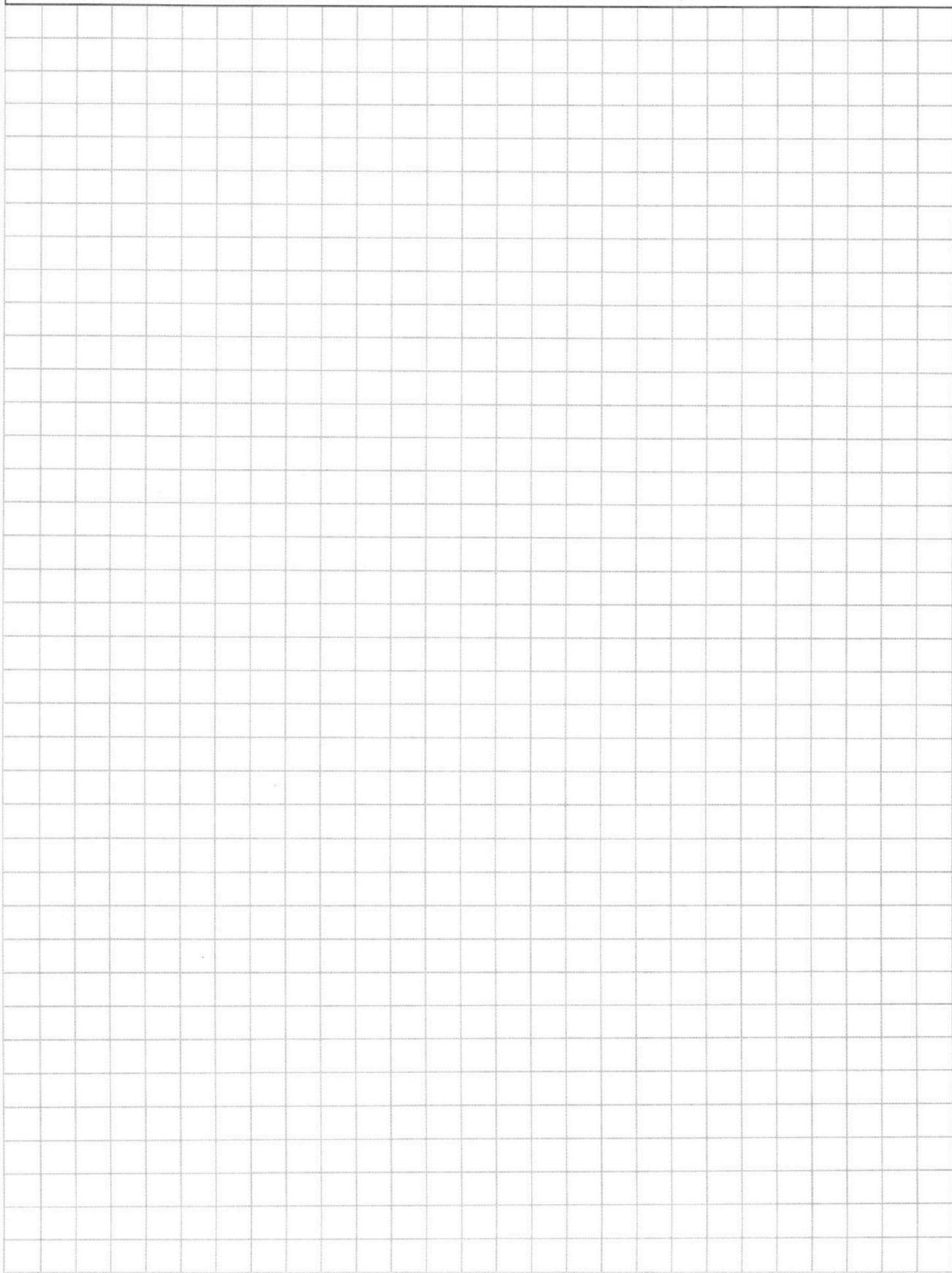
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

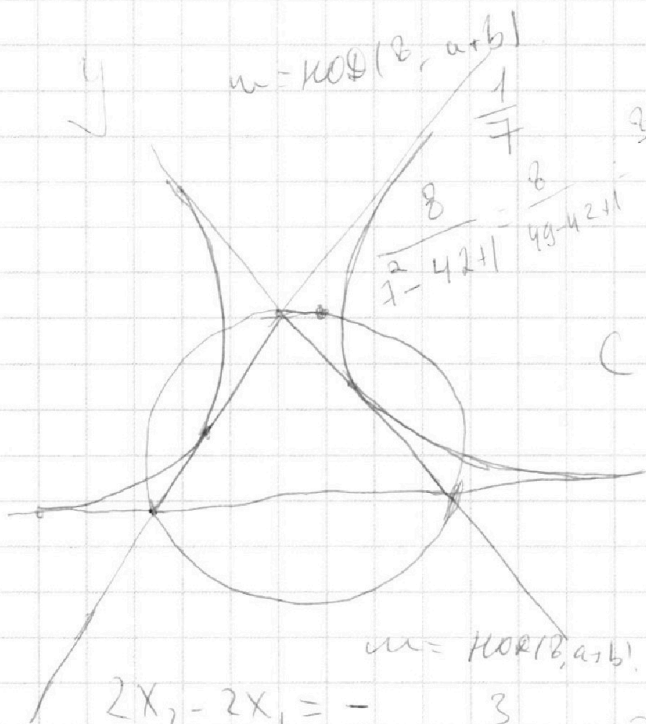


$$\frac{a+b}{a^2+6ab+b^2}$$

$$\frac{2+3}{4-36+9} = \frac{5}{-23}$$

$$\frac{1+2}{1+4-12} = \frac{3}{-9}$$

$$a^2-6ab+b^2 = (a-b)^2-4ab = (a-2\sqrt{ab}-b)(a+2\sqrt{ab}-b)$$



$$2x_2 - 2x_1 = -$$

$$(0; 0) \quad (0; -$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{a+b}{a^2+6ab+b^2}$$

$$a^2-6ab+b^2 \equiv -8ab \pmod{a+b}$$

$$\text{НОД}(a^2-6ab+b^2, a+b) = \text{НОД}(-8ab, a+b) = \text{НОД}(8ab, a+b)$$

$$(x_1, y_1) : (x_2+k, y_2-2k)$$

$$k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

$$(0; 0) \quad (1; 0)$$

$$B-2x+30 \geq y \geq -2x$$

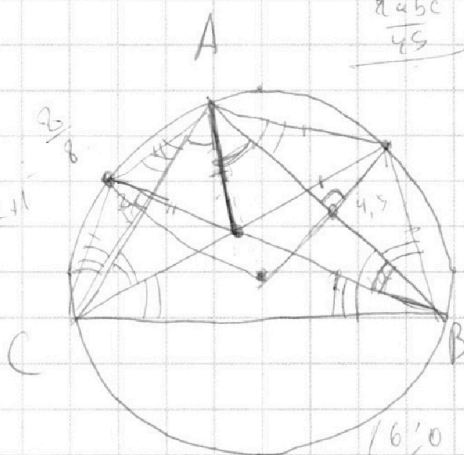
$$15 \geq y \geq 0$$

$$(6; 0) \quad (0; 0)$$

$$(6; 0) \quad (0; 0)$$

$$(6; 0) \quad (0; 0)$$

$$(6; 0) \quad (0; 0)$$



$$y=0$$

$$y=24$$

$$y=$$

$$(6; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (1; 0)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

$$(7; 0) \quad (0; 2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a^2-6ab+b^2 = m \cdot x$$

$$a+b = m \cdot y$$

$$a^2-6ab+b^2 - a - b : m$$

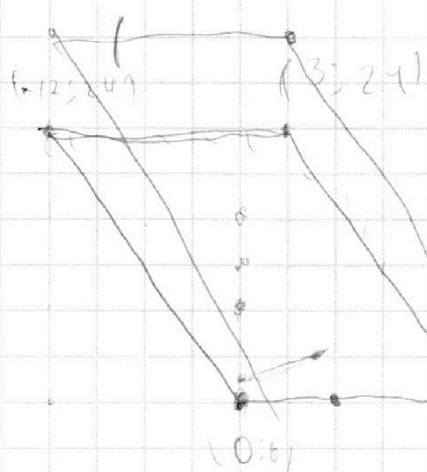
$$a^2 + (-1-6b)a + b^2 - b : m$$

$$\frac{3}{1-6 \cdot 2+4} = \frac{3}{5-12}$$

Заметим, что если подставим

в (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , то получим и

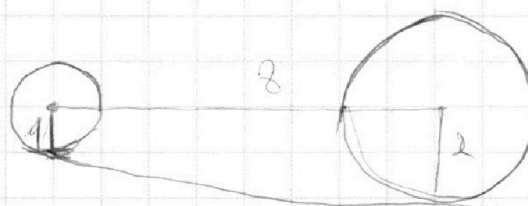
$(x_1, y_1 \pm 1)$, $(x_2, y_2 \pm 1)$ и $(x_1 \pm 1, y_1)$, $(x_2 \pm 1, y_2)$



$$\begin{pmatrix} 6; 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 10; 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6; 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0; 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3; 3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0; 11 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= 24 \\ y &= -2x \\ y &= -2x + 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +15k+b &= 0 \\ 3k+b &= 24 \\ 12k & \end{aligned}$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1), (x_2+k, y_2+2k)$$

$$2x_1 - 2(x_2+k) + y_1 - y_2 + 2k = 2x_1 - 2x_2 + y_1 - y_2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x+1)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{2 \cdot 2} = -0,5 \quad 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0,5 + 3$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{КОД } (a, b) = 1$$

$$\text{КОД } (2a, a+b) =$$

$$\text{КОД } (6b-a, (b-1)a+b)$$

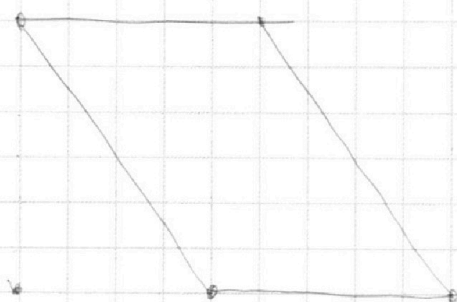
$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4$$

$$-\frac{-3}{8} = \frac{3}{8} \quad 4 \cdot \frac{9}{64} - 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 =$$

$$= \frac{9}{16} - \frac{9}{8} + 4 = -\frac{7}{16} + 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow \text{нет реш.}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{2}{7}$$

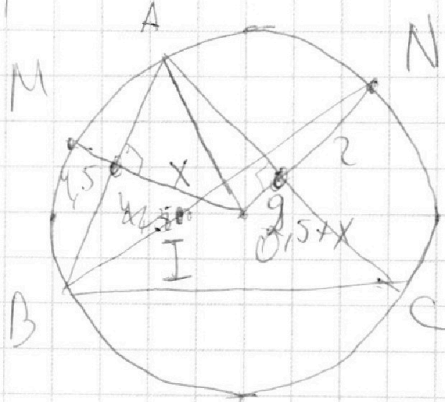


$$4,5 \cdot (2x + 4,5) = u^2$$

$$u = \sqrt{4,5(2x + 4,5)}$$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b}$$

$$\frac{2}{1-6+1} = \frac{2}{-4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

abc - min?

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot a'$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot b'$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot c'$$

$$ab = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot a' b'$$

$$bc = 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} \cdot b' c'$$

$$ca = 2^{\gamma_1 + \alpha_1} \cdot 7^{\gamma_2 + \alpha_2} \cdot c' a'$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 7 & 7 & 8 & 6 \\ 7 & 10 & 6 & 12 \\ 10 & 7 & 12 & 8 \end{matrix}$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 51$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 25,5$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \gamma_2 + \alpha_2 \geq 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 18 & 0 & 30 & 7 \\ 19 & 18 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 \geq 64$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 32$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot a' b' c' \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\min abc = 2^{26} \cdot 7^{32} \quad \text{Пример.}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{18}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{19}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

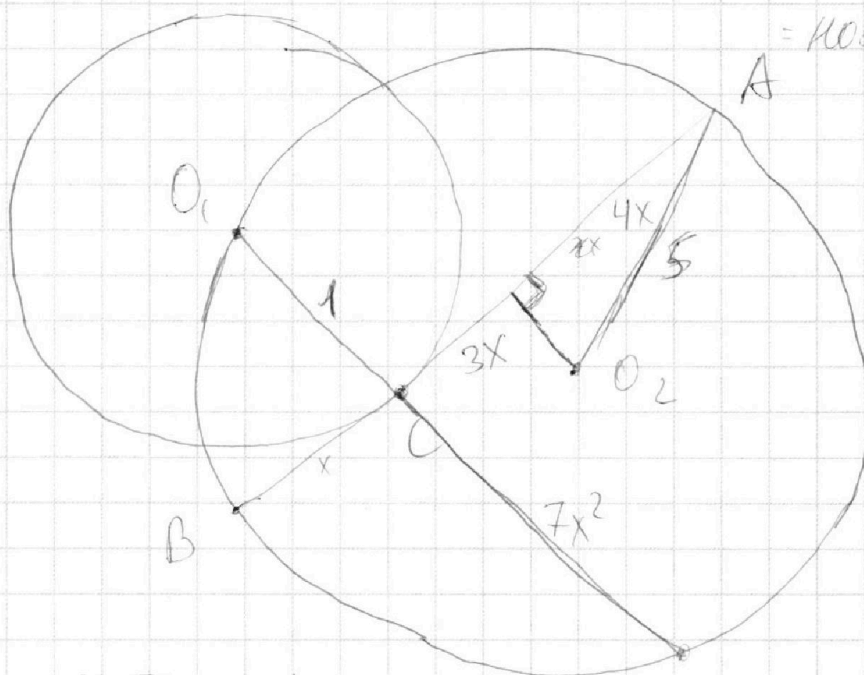


$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2-4ab}$$

№ 2

$a+b$

№ 3 $\text{НОД}(a+b, a^2-bab+b^2) = \text{НОД}(a+b,$



$$x \cdot 7x = 1 \cdot p$$

$$p = 7x^2$$

№ 4.

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 4 \cdot 5^2$$

$$49x^4 + 50x^2 = 99$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$(x^2 - 1) \mid (49x^2 + 99) = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

$$8x = 8 \Rightarrow AB = 8$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{(x-1)/(2x-3)} - \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 2 - 7x$$