



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$; $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$; $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$; $\alpha_2 \in \mathbb{N}_0$; $\alpha_3 \in \mathbb{N}_0$;
 $\beta_1 \in \mathbb{N}_0$; $\beta_2 \in \mathbb{N}_0$; $\beta_3 \in \mathbb{N}_0$; $\gamma_1 \in \mathbb{N}_0$; $\gamma_2 \in \mathbb{N}_0$; $\gamma_3 \in \mathbb{N}_0$. (если числа a , b и c со-
держат множители, отличные от 2, 3 и 5, то abc не ми-
нимально).

$$1) \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

Величина $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$ достигает значения 18 при $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 12$:

$$\begin{cases} 4 + 2 \geq 6 \\ 2 + 12 \geq 14 \\ 4 + 12 \geq 16 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{59}{2} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$$

Величина $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ принимает значение 30 при $\alpha_2 = 8$, $\beta_2 = 5$, $\gamma_2 = 17$:

$$\begin{cases} 8 + 5 \geq 13 \\ 5 + 17 \geq 21 \\ 8 + 17 \geq 25 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28 \text{ (т.к. } \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28)$$

Величина $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3$ принимает значение 28 при $\alpha_3 = 11$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_3 = 17$:

$$\begin{cases} 11 + 0 \geq 11 \\ 0 + 17 \geq 13 \\ 11 + 17 \geq 28 \end{cases}$$

Итак $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ (минимальное значение
величины abc)
Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$.

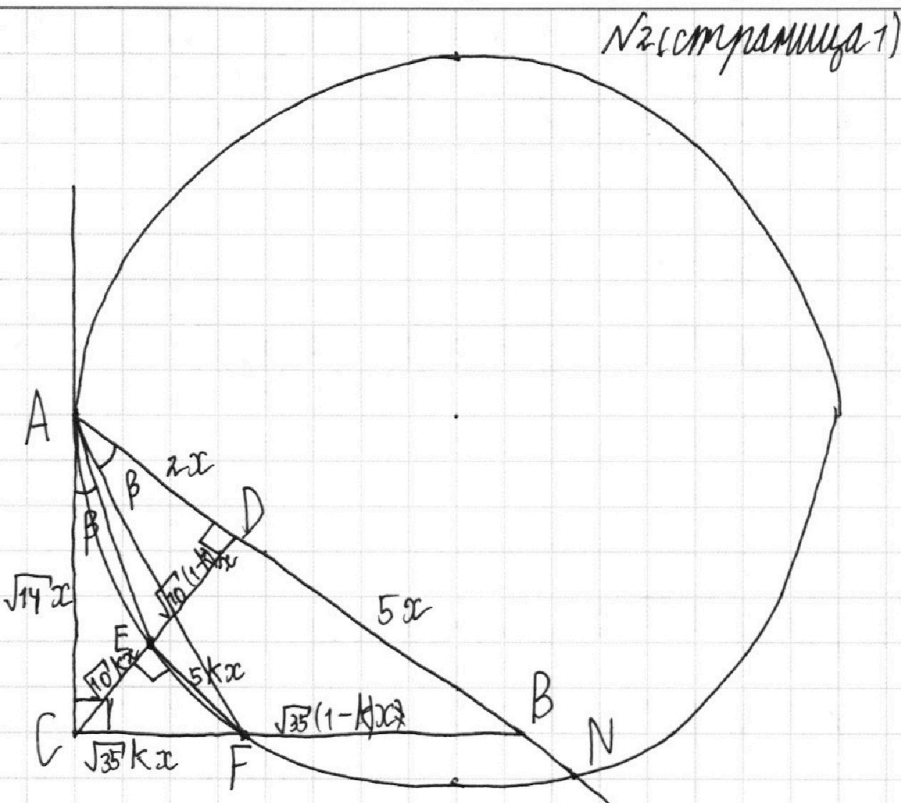
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть AD вторично пересекает окружность в точке N. $AN \parallel EF \Rightarrow AE = BN \Rightarrow \angle EAC = \angle FAN$. Пусть $\angle FAN = \beta$.

$AB = 1,4 BD \Rightarrow AD = 0,4 BD$. Пусть $BD = 5x$. Тогда $AD = 2x$; $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{10}x$; $AC = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{14}x$; $BC = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{35}x$. Пусть $CE:CD = k$. Тогда $CE = \sqrt{10}kx$; $ED = \sqrt{10}(1-k)x$. $EF \parallel BD \Rightarrow$ по теореме Фалеса $CF:CB = k \Rightarrow CF = \sqrt{35}kx \Rightarrow FB = \sqrt{35}(1-k)x$; $EF = 5kx$ (по теореме Фалеса).

$$2) \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\angle AED - \angle ACE) = \operatorname{tg}(\angle AED) - \operatorname{tg}(\angle ACE) = \frac{\sqrt{10}(1-k)}{1 + \operatorname{tg}(\angle AED) \operatorname{tg}(\angle ACE)} = \frac{\sqrt{10}(1-k)}{1 + \frac{2}{\sqrt{10}(1-k)} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}k}} =$$

$$= \frac{2k - 2(1-k)}{\sqrt{10}k(k+1) - \frac{4}{\sqrt{10}}} = \frac{(4k-2)\sqrt{10}}{10k(1-k) - 4} = \frac{(2k-1)\sqrt{10}}{5k - 5k^2 - 4} = \sqrt{10} \frac{1-2k}{5k^2 - 5k + 4}$$

$$= \frac{2 - 2(1-k)}{\sqrt{10}(1-k) + \frac{4}{\sqrt{10}}} = \frac{2k \cdot \sqrt{10}}{10(1-k) + 4} = \frac{\sqrt{10}k}{5 - 5k + 2} = \frac{\sqrt{10}k}{7 - 5k}$$

$$3) \operatorname{tg}(\angle CAB) = \operatorname{tg}(\angle BAF + \angle CAF) = \frac{\operatorname{tg}(\angle BAF) + \operatorname{tg}(\angle CAF)}{1 - \operatorname{tg}(\angle BAF) \operatorname{tg}(\angle CAF)} = \frac{\frac{\sqrt{10}k}{7-5k} + \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{14}}}{1 - \frac{\sqrt{10}k}{7-5k} \cdot \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{14}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14} \cdot k + \sqrt{35}k(7-5k)}{\sqrt{14}(7-5k) - \sqrt{10} \cdot \sqrt{35} \cdot k^2} = \frac{2\sqrt{5}k + \sqrt{5}k(7-5k)}{\sqrt{2}(7-5k) - 5\sqrt{2}k^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2k+7k-5k^2}{7-5k-5k^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2k+7k-5k^2}{5k^2+5k-7}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2k+7k-5k^2}{5k^2+5k-7} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{5k^2-9k}{5k^2+5k-7}$$

$$\operatorname{tg}(\angle CAB) = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow 5k^2 - 9k = 5k^2 + 5k - 7 \Rightarrow 14k = 7 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2 (страница 2)

4) $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{EF \parallel AB; AB \perp CD \Rightarrow EF \perp CD \Leftrightarrow \angle CEF = 90^\circ}{S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10}x}{S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}kx \cdot 5kx} = \frac{2x^2}{5k^2x^2} = \frac{2}{5k^2} = \frac{2}{5} \cdot 2^2 = \frac{8}{5} = 8:5$

Ответ: 8:5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow \arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}) \\ 0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin(\frac{7\pi}{5} - \frac{10}{5} \cdot \frac{x}{5}) \\ 0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin(\frac{x}{5} - \frac{7\pi}{5}) = 0 \\ -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin(\frac{3x}{5} - \frac{7\pi}{10}) \cos(\frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{10}) = 0 \\ -\frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ \frac{3x}{5} - \frac{7\pi}{10} = \pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi n}{3} \\ x + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{4} + \frac{5\pi n}{2} \end{cases}$$

$$1) -\frac{9\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \leq \frac{27\pi}{10} \Leftrightarrow -\pi \leq \frac{5\pi n}{3} \leq 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{7\pi}{6} \\ x_3 = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{6} \\ x_4 = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

$$2) -\frac{9\pi}{2} \leq -\frac{7\pi}{4} + \frac{5\pi n}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi n}{2} \leq 5\pi \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 2$$

$$\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = -\frac{\pi}{2} \\ x_6 = \frac{\pi}{2} \\ x_7 = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжить с предыдущей страницы)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{7\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{7\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad a \neq 0 \\ & \begin{cases} -\frac{5}{3a} > \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5}{3a} < -\frac{7\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3a} < -\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5}{3a} > \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10+21\sqrt{2}a}{6a} < 0 \\ \frac{10-21\sqrt{2}a}{6a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21a+5\sqrt{2}}{a} < 0 \\ \frac{21a-5\sqrt{2}}{a} < 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} \frac{a+\frac{5\sqrt{2}}{21}}{a} < 0 \\ \frac{a-\frac{5\sqrt{2}}{21}}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, 0) \\ a \in (0, \frac{5\sqrt{2}}{21}) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, 0) \cup (0, \frac{5\sqrt{2}}{21}) \\ & \begin{cases} a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, 0) \cup (0, \frac{5\sqrt{2}}{21}) \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\frac{5\sqrt{2}}{21}, \frac{5\sqrt{2}}{21}) \end{aligned}$$

Ответ: $(-\frac{5\sqrt{2}}{21}, \frac{5\sqrt{2}}{21})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4. №5

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$3 \log_{11}^4 x = 16 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - 16 = 0 \\ \log_{11} x \neq 0 \end{cases}$$

Найдём все возможные значения величины $\log_{11} x$ с помощью теоремы Безу.



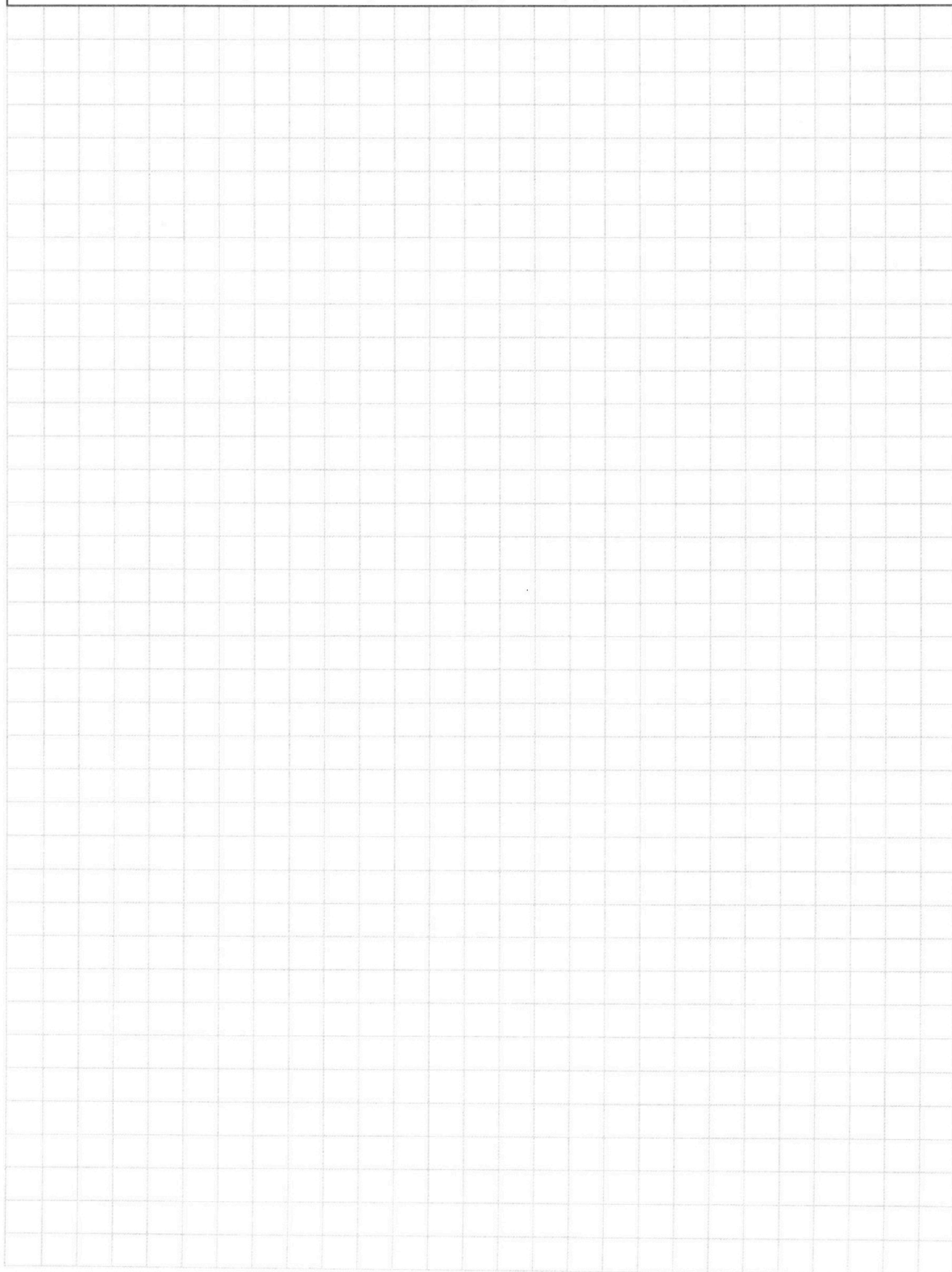
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{\sqrt{e}}{2} \leq -\sqrt{e} + \frac{10\sqrt{e}n}{3} \leq \frac{9\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{e}}{2} \leq \frac{10\sqrt{e}n}{3} \leq \frac{11\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{10}{3}n \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{20} \leq n \leq \frac{33}{20}$$

$$n=1 \Rightarrow x_1 = \frac{10\sqrt{e}}{3} - \sqrt{e} = \frac{7\sqrt{e}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{e}}{2} \leq 2\sqrt{e} + \frac{5\sqrt{e}n}{2} \leq \frac{9\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\sqrt{e}}{2} \leq \frac{5\sqrt{e}n}{2} \leq \frac{5\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 1$$

$$x_2 = 2\sqrt{e} - \frac{5\sqrt{e}}{2} = -\frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$x_3 = \frac{9\sqrt{e}}{2}$$

$$x_4 = \frac{9\sqrt{e}}{2}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{32}{3 \cdot 81} + \frac{10}{3} - 16 = \frac{302}{81} - 16$$

$$f(x) = 3x^5 + 5x - 16$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81} + \frac{5}{3} - 16 = \frac{136}{81} - 16 < 0$$

$$\begin{cases} x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \\ 6ay = -5x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (y+9)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \\ y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \end{cases}$$

$$a \neq 0$$

$$5\sqrt{\frac{81}{49}} - 1 = 5\sqrt{\frac{32}{49}} = 5 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20\sqrt{2}}{7}$$

$$(0; -\frac{45}{7})$$

$$\frac{100\sqrt{2}}{7} = \frac{45}{7}h$$

$$20\sqrt{2} = 9h \Rightarrow h = \frac{20\sqrt{2}}{9}$$

$$k = \frac{20\sqrt{2}}{7} : 5 = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7}$$

$$k > +\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

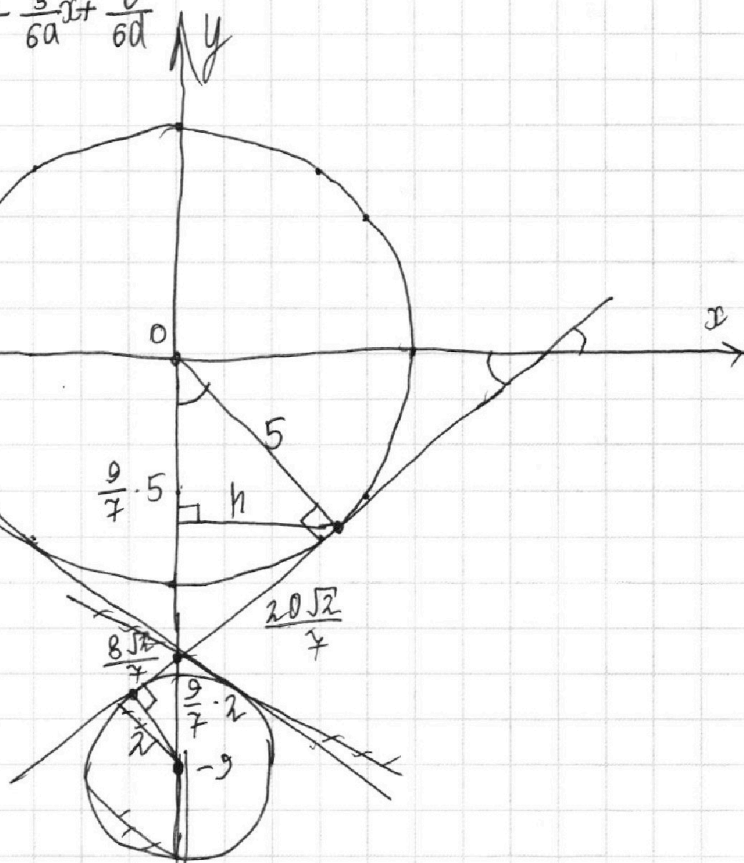
$$k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\log_4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{3} \log x 11^{-2} - 5 = -\frac{2}{3} \log x 11 - 5$$

$$\log_4 x + (\frac{2}{3} - 6) \log_{11} x + 5 = 0$$

$$3 \log_4 x + (2 - 18) \log_{11} x + 15 = 0$$

$$3 \log_4 x - 16 \log_{11} x + 15 = 0$$



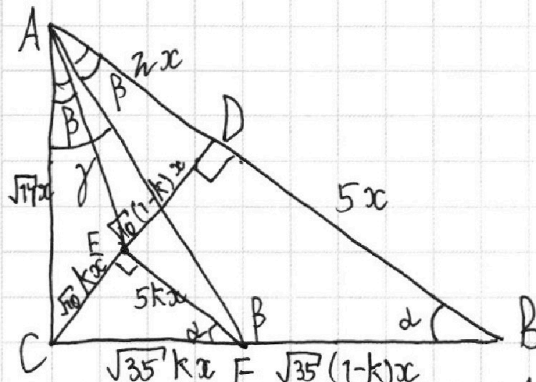
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right) + (\sqrt{2} - \alpha) - \beta$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sin \beta}{7x} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{14+35k^2}x}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14+35k^2}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{x} = \frac{2}{\sqrt{2+5k^2}}$$

$$\cos \beta = -\frac{5k^2}{\sqrt{2+5k^2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = -\sqrt{\frac{2}{5k^2}} = -\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{k}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}\left(\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{5}}(1-k) = -\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{k}$$

$$1-k = \frac{1}{k} \Rightarrow k-k^2 = 1 \Rightarrow k^2 - k + 1 = 0$$

$$\sin \angle AED = \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{1-k}$$

$$\operatorname{tg} \angle ACD = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\operatorname{tg} \angle CAE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(1-k) = \frac{k\sqrt{2}}{3-5k}$$

$$\operatorname{tg}(\angle AED - \angle ACD) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(1-k) - \frac{2}{\sqrt{10}}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}}$$

$$\sin \angle C = \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\sqrt{10}k}{3-5k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{10k^2}{(3-5k)^2}} = \sqrt{10}k \cdot \frac{1}{\sqrt{25k^2 - 30k + 9 + 10k^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\sqrt{10}k}{3-5k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{10k^2}{(3-5k)^2}}} = \sqrt{10}k \cdot \frac{1}{\sqrt{25k^2 - 30k + 9 + 10k^2}} = \frac{\sqrt{35k^2 - 30k + 9}}{\sqrt{10}k}$$

$$\frac{\sqrt{35}(1-k)}{\sqrt{10}k} \cdot \sqrt{35k^2 - 30k + 9} =$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{35}k}{3-5k} = \sqrt{\frac{35}{2}} \frac{1}{k}$$

$$\operatorname{tg}\left(\arctg\left(\frac{\sqrt{14}}{2k}\right) + \arctg\left(\frac{\sqrt{10}k}{3-5k}\right)\right) = \sqrt{\frac{35}{14}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}k + \frac{\sqrt{10}k}{3-5k}}{1 - \frac{5k^2}{3-5k}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}(3-5k) + \sqrt{10}k}{3-5k-5k^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \frac{3-5k+2k}{-5k^2-5k+3} = 1$$

$$(5k^2+5k-3) + (3-3k) = 0 \Rightarrow 5k^2+2k=0 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$\begin{cases} ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 6 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = 12 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{59}{2} - 21 = 8,5 \\ \beta_2 = \frac{59}{2} - 25 = 4,5 \\ \gamma_2 = \frac{59}{2} - 13 = 16,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29,5 \Rightarrow \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \geq \left(\frac{29,5}{3}\right)^3$$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 \geq 2^{36} 3^{59} 5^{52} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{29} 5^{26} \sqrt{3} \geq 2^{18} 3^{30} 5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq 18 \\ \beta \geq 30 \\ \gamma \geq 26 \end{cases} \quad \checkmark$$

$\alpha = 18$

$$\begin{cases} \alpha = 30 \Rightarrow \gamma_2 = 30 - \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ 30 - \beta_2 \geq 25 \\ 30 - \alpha_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 8 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 17 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \gamma = 26 \Rightarrow \gamma_3 = 26 - \alpha_3 - \beta_3 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ 26 - \beta_3 \geq 28 \\ 26 - \alpha_3 = 13 \end{cases}$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$$

$$\begin{cases} \gamma = 28 \\ \alpha_3 = 11 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{11} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14} \\ abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

