



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✓ 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- ✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 1. $ab : 2^8 3^{14} 5^{12} \Rightarrow ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k$, где $k \in \mathbb{N}$;

$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17} \Rightarrow bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} m$, где $m \in \mathbb{N}$;

$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{38} \Rightarrow ac = 2^{14} 3^{21} 5^{38} c$, где $c \in \mathbb{N}$;

Перемножим ab , bc и ac : $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} kmc^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc = \sqrt{2^{34} 3^{55} 5^{68} kmc^2} = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{3kmc^2};$$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3kmc^2} \in \mathbb{N}$; т.к. мы ищем наим. знач. abc , то kmc^2 - наим. квадрат, при котором $3kmc^2$ - наим. квадрат \Rightarrow т.к. $k, m, c \in \mathbb{N}$, то $kmc^2 = 3$ и доказывается, к примеру, что $k=3$ и $m=c=1 \Rightarrow \sqrt{3kmc^2} = 3$ и $\min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$;

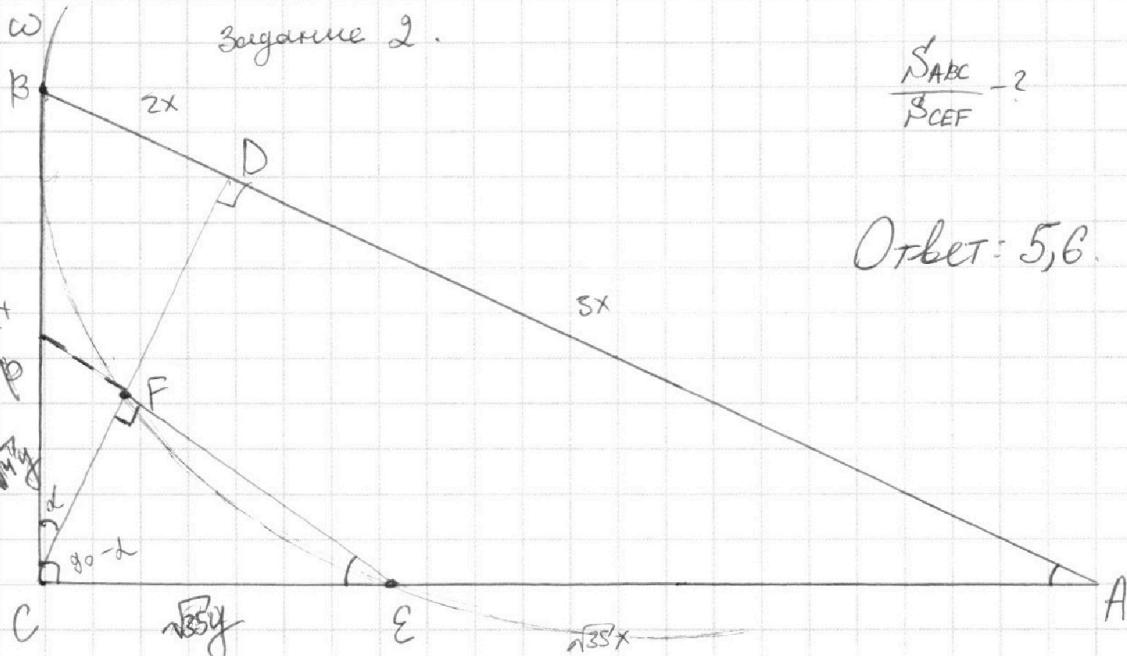
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 2$$

Ответ: 5,6.

решение: $AD:DB=5:2 \Rightarrow$ пусть $AD=sx; DB=2x; \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}x$ (бессторонний признак подобия)

Тогда по т. Тибронара из $\triangle CDA$ и $\triangle BDA \Rightarrow AC = \sqrt{3}sx; BC = \sqrt{14}x;$

Пусть $FE \cap BC = P$; т.к. из условия $FE \parallel AB$, то и $PE \parallel AB \Rightarrow \angle CPE = \angle B; \angle CEF = \angle A$ и $CF \perp PE$, где BC, CD и AC — секущие к паралл. пр. PE и BA ; ~~При~~ Отсюда же из

3-и упом. подобии $\triangle PCE \sim \triangle ABC$; Тогда пусть $CE = \sqrt{3}sy$ и $PC = \sqrt{14}y$, где $k = \frac{y}{x}$ — коэф. подобных тп-ников;

Из $\triangle FPC$ и $\triangle BED$: $\angle F = \angle D = 90^\circ$ и $\angle C = \text{одн}.$ \Rightarrow они подобные с коэф. $k = \frac{Cp}{Cb} = \frac{y}{x} \Rightarrow PF = 2y$; Аналогично из $\triangle CFE \sim \triangle CDA$:

$FE = 5y$; т.к. CB -касат. к окружности, а $PE \cap \omega = F \cup E$, где w — окр. из условия, то вerto след.: $PB^2 = PF \cdot PE \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sqrt{14}(x-y))^2 = 2y \cdot 5y \Rightarrow y^2 = (x-y)^2 \Rightarrow \begin{cases} 2y = x \\ x = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} \text{При } x = 0 \text{ тп-ник не} \\ \text{относ. плоскостей: } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{7\sqrt{10}x^2}{2}, \\ S_{CEF} = \frac{CF \cdot FE}{2} = \frac{10y^2}{2} = 5y^2; \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{существует } (BA = 0); \\ \text{При } 2y = x \text{ находим} \\ \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{(x)^2}{(y)^2} = \frac{28}{25} = (5,6) \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 3. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$;

Аргумент \arcsin' а определён на $[-1; 1]$, что верно
 $\forall x$ для $\cos x$; Синус \arcsin прокручивает значения от
 $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \Rightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$;

Тогда исходное ур-ние равносильно след. сист-не:

$$\begin{cases} \cancel{\cos x} \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right); \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right); \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right); \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = 0; \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{2x}{8}\right) = 0; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{8}\right) = 0; \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{8} - \frac{2x}{8} = \pi k; \\ \frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m; \\ k, m \in \mathbb{Z}; \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}(1 - 8k); \\ x = -\frac{\pi}{3}(1 + 8m); \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\pi; -2\pi; \frac{\pi}{2}; \\ x = 3\pi; -2\pi; \frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi;$$

Отв-ни: $\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$

$\{3\pi\}$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

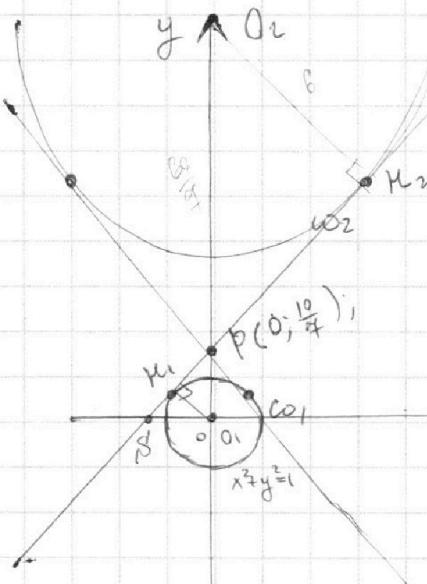
Задание 4.

$$\begin{cases} \alpha x - 3y + 4b = 0; \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2xy + 6y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\alpha x + 4b}{3}; \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36; \end{cases} \quad (2)$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36; \quad (3)$$



Изобразим систему на плоскости

Ходу: (2) задаёт окр. ω_1 с
центром $(0; 0)$ и радиусом 1;
(3) задаёт окр. ω_2 с центром $(0; 10)$
и радиусом 6;

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36;$$

Заметим, что если ~~к~~ кофр. α не равна
Причём (1) $\frac{\alpha}{3}$ такая, что проходит при
определённом значении b линиях общей каса.

к ω_1 и ω_2 , то она не имеет иных точек
2 пересечений с (3) и (2) в симметрии: либо она
пересекает обе окр. ω_1 или ω_2 , либо не пересекает
окр. ω_1 не пересекает обе; либо же линиях общей
каса. и задаёт две точки касания; Заметим, если
найдутся кофр. α линиях растёт до $\pm\infty$, бессмыслица, то
будут в наклонении, где решения. линии каса., т.к.
предполагают линии чисто и решения, что линии и
линии; Но если найдут ~~к~~ кофр. линиях будет уместе-
шись до нуля, то 4 решения не будет никаких, т.к.
не найдётся ли при касании в чистой предполож., что
она линия симметрии для линии каса. \Rightarrow если линии каса.
см. рис. имеют чистое наклонение $k \neq k_0$, то решения
представляются при $\frac{\alpha}{3} \in (-\infty; -k) \cup (k; +\infty)$; Найдём k :

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отметим ~~на~~ в СК такие O_2, O_1 - центры окр. ω_2 и ω_1 соответ.
 H_2 и H_1 - симметричные перпен., опущенные из O_2 и O_1 соответ.
Нд прямую с коэф. наклон k ; $P = H_1 H_2 \cap Oy$; Тогда

$$O_2 P = \tilde{a}; \quad O_1 P = \tilde{b}; \quad \tilde{a} + \tilde{b} = 10, \text{ т.к. } O_2 P \in O_2 \text{ как вр-} \\ \text{-тическое} \Rightarrow \Delta O_2 H_2 P \sim \Delta O_1 H_1 P \text{ по 3-м углам и танген.}$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{8}{1} \Rightarrow \tilde{a} = \tilde{b} \Rightarrow 8\tilde{b} + \tilde{b} = 10 \Rightarrow \tilde{b} = \frac{10}{9} \text{ и } \tilde{a} = \frac{80}{9}; \Rightarrow$$

\Rightarrow прямая с коэф.-наклоном k имеет вид: $y = kx + \frac{10}{9}$, где

$$\frac{4b}{3} = \frac{10}{9} \Rightarrow b = \frac{30}{28} = \frac{15}{14};$$

~~Запишем значение из расстояний $H_1 O_1$ и $H_2 O_2$ гипотенуз,~~
~~како $H_1 P = \sqrt{O_1 P^2 - O_1 H_1^2} =$~~

$$\text{По т. Пифагора } H_1 P = \sqrt{O_1 P^2 - O_1 H_1^2} = \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}; \text{ Танген.}$$

~~$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle H_1 O_1 P = \frac{H_1 P}{H_1 O_1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$~~ , $\text{ко } \Delta SPO_1 \sim \Delta H_1 O_1 P, \text{ где } S =$

$$= O_1 \cap H_1 H_2 \Rightarrow \angle H_1 O_1 P = \angle S \Rightarrow \operatorname{tg} \angle H_1 O_1 P = \frac{\sqrt{51}}{7} = \operatorname{tg} \angle S, \text{ ио}$$

$\operatorname{tg} \angle S$ и его угол наклона ~~не~~ однозначно определяет коэф. в квад.

$$k > 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{51}}{7} \text{ и 4 решения формируются при } \leftarrow$$

$$\alpha = \frac{3\sqrt{51}}{7};$$

$$\operatorname{arctg} \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7} \right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty \right);$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7} \right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty \right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5. Тогда $2x=v \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5^4 v - 3 \log_5 v = \log_{\sqrt{5}} 625 - 3; \\ \log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5 30,2 - 3; \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^4 v - \frac{3}{\log_5 v} = \frac{4}{3 \log_5 v} - 3; \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3; \end{cases} \Rightarrow$$

$v > 0;$
 $y > 0;$
 $v \neq 1; y \neq 1;$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5^4 v = \frac{13}{3 \log_5 v} - 3; \\ \log_5^4 y = -\frac{13}{3 \log_5 y} - 3; \end{cases} \quad \text{Тогда } \log_5 v = a \text{ и } \log_5 y = b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^4 = \frac{13}{3a} - 3; \\ b^4 = -\frac{13}{3b} - 3; \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \Rightarrow$$

$v, y > 0;$
 $v, y \neq 1;$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0; \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0; \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \Rightarrow 3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0; \Rightarrow$$

$v, y > 0;$
 $v, y \neq 1;$

$$\Rightarrow 3(a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 3) = 0;$$

$$\begin{cases} a+b=0; \\ a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 3 = 0; \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \log_5 v + \log_5 y = 0 \Rightarrow vy=1 \Rightarrow 2xy=1 \text{ и } \boxed{\frac{xy=1}{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \cos(\cos x) = \pi - 2x;$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \cos(\cos x) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2};$$

$$H_1(x_0; y_0);$$

$$1 = x_0^2 + y_0^2;$$

$$x_0^2 + (y_0 - \frac{10}{7})^2$$

$$\frac{100}{49} - 1 = -\frac{20}{7} y_0 + \frac{100}{49};$$

$$\frac{100}{49} - \frac{49}{49}$$

$$\frac{1}{10} = y_0; \\ x_0 = \frac{10}{7};$$

$$\frac{51}{49}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \pi; \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right);$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi;$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi;$$

$$x_0^2 + (y_0 - \frac{10}{7})^2 = \frac{36}{49};$$

$$\frac{18 \cdot 102}{49} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{7} \sqrt{51} =$$

$$= \frac{6}{7} \sqrt{51};$$

$$H_2(x_0; y_0); \quad x_0^2 + (y_0 - 10)^2 = 36;$$

$$-\pi \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \pi; \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right);$$

$$\sin(90 - x) = \cos x; \quad -20y_0 + \frac{20}{7}y_0$$

$$+ 100 - \frac{100}{49} =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0;$$

$$= 36\left(1 - \frac{51}{49}\right);$$

$$\sin\left(\frac{51}{10} - \frac{5x}{3} - \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = 0; \quad \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5}\right) = 0;$$

$$\cos\left(\frac{51}{10} - \frac{5x}{3} + \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = 0; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{8x}{5}\right) = 0;$$

$$\frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{2x}{5} = \frac{\pi}{5} - \pi k \quad x = \frac{\pi - 5\pi k}{2};$$

$$\frac{3x}{5} = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{10} - \pi k \quad x = -\frac{\pi - 8\pi k}{3};$$

$$-\frac{2\pi}{10} = -\frac{\pi}{5} + \frac{100}{49}y_0 = -\frac{2 \cdot 36}{49} + \frac{100}{49} + 100;$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi - 5\pi k}{2} \leq 3\pi;$$

$$-\frac{2\pi}{3} \leq -\frac{\pi - 8\pi k}{3} \leq 3\pi$$

$$-6\pi \leq -\pi(1 + 8k) \leq 9\pi$$

$$-\pi = \cos(\cos x)$$

$$-4 \leq 1 - 8k \leq 6;$$

$$-5 \leq -8k \leq 5;$$

$$-1 \leq -k \leq 1;$$

$$-1 \leq k \leq 1;$$

$$k = -1; 0; 1 \Rightarrow x = 3\pi; \frac{\pi}{2}; -2\pi;$$

$$X = -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; -2\pi; 3\pi;$$

$$\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; -2\pi;$$

$$\cos(\cos(3\pi)) = \pi - \frac{8\pi}{10} = -\frac{\pi}{2}; \quad x_0^2 + \left(\frac{2l}{5}\right)^2 = 36;$$

$$\cos(-1) = \frac{\pi}{2}; \quad x_0^2 + \left(\frac{2l}{5}\right)^2 = 36; \quad \frac{144}{25} = \frac{84}{25} = \frac{28}{5} = \frac{28}{5};$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{51}{49} - \frac{3}{5}}; \quad \frac{29}{5} - \frac{50}{5} = \frac{36 \cdot 25}{25} - \frac{21 \cdot 25}{25} = \frac{900 - 441}{25} = \frac{459}{25} = \frac{459}{25} = \frac{348}{60} = \frac{348}{60};$$

$$\frac{40}{12} - \frac{1}{30} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \Rightarrow abc = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} k$
 $bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} m \Rightarrow abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{38}} km$;
 $de = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} c$
 $ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \rightarrow \min$, если $\sqrt{3km} \rightarrow$
 $\rightarrow \min u \sqrt{3km} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ищут $k=3, m=c=1$;
 $\Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$,
 $S_{ABC} - ?$

2)

$y = \frac{CP}{\sqrt{14}x}$

$PF \cdot PC = \frac{CD}{2} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x;$
 $= \sqrt{14}(x-y) \cdot BC = \sqrt{14}x;$
 $AC = \sqrt{35}x; S_{ABC} = \frac{x^2}{2};$

$2y \cdot y \quad y^2 = (x-y)^2 \Rightarrow \sqrt{2+5y^2} =$

$CE \cdot CP = CE^2 = (2y-x)(2y-x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{10};$
 $CE \cdot CP = y = \frac{\sqrt{10}x}{2};$
 $\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = \frac{y}{2};$
 $= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma} = \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} =$

$\frac{EF}{AD} = \frac{y}{x} = \frac{CF}{CD} = \frac{y}{x} = \frac{EC}{AC} = \frac{y}{\sqrt{35}x} \Rightarrow EC = y \sqrt{35};$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{\sqrt{10}x}{2}} = \frac{y}{\sqrt{10}x} = \frac{y}{\sqrt{10}} =$

$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} =$

$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{2} =$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{10}x} =$

$S_{CEF} = \frac{\sqrt{10} \cdot 5}{2} y^2 = \frac{\sqrt{10} \cdot 5}{2} \cdot \frac{y^2}{2} =$

$\frac{5\sqrt{10}y^2}{4} =$

$\frac{5\sqrt{10}y^2}{4} = \frac{4 \cdot 7}{5} =$

$\frac{28}{5} =$

$\frac{28}{5} = \frac{5y}{\sqrt{10}y} = \frac{5}{\sqrt{10}} =$

$\frac{5}{\sqrt{10}} =$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{\sqrt{10}} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 8x = v \\ \frac{\log_5^4 v - 3}{\log_5 v} = \log_{\frac{v}{3}}^{s^4} \end{cases}$$

$$\log_5 v = t$$

$$\log_5 s = k$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$t^4 = \frac{13}{3t} - 3; \quad k^4 = -\frac{13}{3k} - 3;$$

$$t^4 - k^4 = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) = \frac{13}{3} (t+k);$$

$$(t-k)(t+k)(t^2+k^2) - \frac{13}{3} (t+k) = 0;$$

$$(t+k)((t-k)(t^2+k^2) - \frac{13}{3tk}) = 0;$$

$$\begin{cases} \log_5 vy = 0; \Rightarrow vy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}; \\ \log_5 \left(\frac{v}{y} \right) (t^2+k^2) = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 v \log_5 y} \end{cases}$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0; \quad 3t^5 + 9t - 12 = 1;$$

$$3k^5 + 9k + 13 = 0; \quad (t-1)(3t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 3t + 12) = 1;$$

$$(k+1)(3k^4 + 3k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = -1;$$

$$\begin{cases} \log_5^4 v - 3 = \frac{4}{3} \log_5 v - 3; \\ \log_5^4 y + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \log_5 s - 3; \end{cases}$$

$$b^4 - \frac{13}{3b} + 3 = 0; \quad b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0;$$

$$b^4 - a^4 + \frac{13}{3} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = 0; \quad a^4 + b^4 + \frac{13}{3} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + 6 = 0;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} ax - 3y + 4b = 0; \\ x^2 + y^2 = 1; \end{array} \right. \quad y = \sqrt{1-x^2}; \quad \left(\frac{-ax^2}{18}, \frac{-4ab}{18} \right) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1; \\ (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100-64 = 36; \end{array} \right. \quad \frac{ax^4}{324} \left(1 + \frac{4b^2}{9} \right) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{ax+4b}{3}; \\ x^2 + y^2 = 1; \end{array} \right. \quad x^2 + \frac{ax^2}{9} + \frac{4ab}{9}x + \frac{16b^2}{9} - 1 = 0; \\
 & \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{ax+4b}{3}; \\ x^2 + (y-10)^2 = 36; \end{array} \right. \quad x^2 + \frac{ax^2}{9} + \frac{4ab}{9}x + \frac{16b^2}{9} - 1 = 0; \\
 & Ax + By + C = 0; \quad y = \frac{ax+4b}{3}; \quad \frac{342}{3} > \frac{108}{9}; \\
 & \frac{ax}{3} - y + \frac{4b}{3} = 0; \quad y = \frac{ax+4b}{3}; \quad \frac{9142}{3} > \frac{3}{4}; \\
 & d_1 = c = \frac{100a}{3} + \frac{4b}{3}; \quad d_2 = \frac{14b}{3}; \quad \frac{4b}{3} = \frac{4ab}{2a^2/3} \\
 & d_2 = \frac{14b}{3} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}; \quad d_1 = \frac{100a}{3} + \frac{4b}{3} = \frac{100a}{3} + \frac{4b}{3}; \\
 & \left| \frac{4b}{3} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \quad \left| \frac{100a}{3} + \frac{4b}{3} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \\
 & \left| \frac{4b}{3} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \quad \left| \frac{100a}{3} + \frac{4b}{3} \right| = 8b; \quad \text{By} = x; \quad \frac{4a^2 - a^2}{9} = \frac{499}{2801}; \\
 & \sqrt{1-x^2} = \frac{ax+4b}{3}; \quad \frac{100a}{3} + \frac{4b}{3} = -8b; \quad \frac{10a}{3} + \frac{4b}{3} = -24b; \quad x + y = 19; \quad a^2 = 3; \\
 & \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{3}; \quad 10a + 4b = -24b; \quad 10a = -28b; \quad a = -28b; \quad a = \pm \sqrt{3}; \\
 & \left[\begin{array}{l} 4 \cdot 81 \\ 3 \cdot 14 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} 10a \\ -24b \end{array} \right]; \quad \frac{10a}{10} = \frac{-24b}{-24}; \quad \frac{10a}{10} = \frac{5a}{-14}; \quad \frac{10a}{10} = \frac{2a}{-7}; \quad a = \pm \sqrt{3}; \\
 & \left| \begin{array}{l} 10a \\ -24b \end{array} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \quad \left| \begin{array}{l} 5a \\ -7 \end{array} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \quad \left| \begin{array}{l} 2a \\ -1 \end{array} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \quad \left| \begin{array}{l} 10 \\ -7 \end{array} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \\
 & \left(\frac{10a}{21} \right)^2 = \frac{a^2}{9} + 1 \Rightarrow \frac{100a^2}{441} - \frac{a^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{\frac{100}{21^2} - \frac{1}{9}} = \frac{49 \cdot 9}{100 - 49} = \frac{49 \cdot 9}{81} = \frac{49 \cdot 3}{17} \Rightarrow a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{51}}{17}; \\
 & a \in \left(-\frac{4\sqrt{51}}{17}, \frac{4\sqrt{51}}{17} \right); \quad a = \frac{4\sqrt{51}}{17}; \quad y = \frac{10}{\sqrt{9}}; \quad x = \frac{60}{\sqrt{49}}; \\
 & \left(\frac{4\sqrt{51}}{17}, \frac{10}{\sqrt{9}} \right); \quad \left(-\frac{4\sqrt{51}}{17}, \frac{10}{\sqrt{9}} \right);
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{\log_s^4 v - \log_s^4 y} = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{\log_s v} + \frac{1}{\log_s y} \right);$$

$$\log_s^2 \frac{v}{y} \cdot \log_s v y.$$

$$(13 \log_s v + \log_s y);$$

$$(\log_s^2 v y - 2 \log_s v \log_s y) = \frac{13}{3} \left(\frac{\log_s v y}{\log_s v \log_s y} \right);$$

$$\log_s v y = 0$$

$$\log_s^2 \frac{v}{y} (\log_s^2 v y - 2 \log_s v \log_s y) = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_s v \log_s y},$$

$$(\log_s v - \log_s y) \log_s v \log_s y =$$

$$= \log_s^2 v \log_s y - \log_s y^2 \log_s v;$$

$$a^4 - b^4 = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right); \quad a^3(a-b) \frac{a(a-b)(a^2+b^2)}{b^2(a-b)} + b^{a+3}$$

$$a^4 + b^4 = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - 6; \quad b^{a+3} a^3 + b^3 =$$

$$a^8 - b^8 = \left(\frac{13}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = (a+b)(a^2 - ab + a^2 b^2 - ab^2 + b^2) - ab^3$$

$$a^4 = \frac{13}{3} - 3;$$

$$a^4 + 3 = \frac{13}{3};$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0;$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0;$$

$$(a+b)(a$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0;$$

$$\begin{array}{r} a^5 + 0 \cdot a^4 + 0 \cdot a^3 + 0 \cdot a^2 + 0 \cdot a + b^5 \\ - a^5 + b a^4 \\ \hline - b a^4 + 0 \cdot a^3 \\ - b a^4 - b a^3 \\ \hline b^2 a^3 + 0 \cdot a^2 \\ b^2 a^3 + b^2 a^2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} d + b \\ a^4 - b a^3 + b^2 a^2 - b^3 a^2 \\ \hline \end{array}$$

$$+ b^4 a + b^5$$