МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$; $b=2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}$, №1. $c=2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}$; $\alpha_1\in\mathbb{N}_0$; $\alpha_2\in\mathbb{N}_0$; $\alpha_3\in\mathbb{N}_0$; $\beta_1\in\mathbb{N}_0$; $\beta_2\in\mathbb{N}_0$; $\beta_3\in\mathbb{N}_0$; $\gamma_1\in\mathbb{N}_0$; $\gamma_2\in\mathbb{N}_0$; $\gamma_3\in\mathbb{N}_0$. (если числа a, b и c содержат множители, отличные от 2, 3 и 5, то abc не минимально).

1) $\begin{cases}\alpha_1+\beta_1\geqslant 6\\ \beta_1+\gamma_1\geqslant 14\\ \alpha_1+\gamma_1\geqslant 16\end{cases}\Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1\geqslant 18$

Величина $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ достигает значения 18 при $\alpha_1=4$, $\beta_1=2$, $\gamma_1=12$:

$\begin{cases}4+2\geqslant 6\\ 2+12\geqslant 14\\ 4+12\geqslant 16\end{cases}$

2) $\begin{cases}\alpha_2+\beta_2\geqslant 13\\ \beta_2+\gamma_2\geqslant 21\\ \alpha_2+\gamma_2\geqslant 25\end{cases}\Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geqslant \frac{59}{2}\Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geqslant 30$

Величина $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2$ принимает значение 30 при $\alpha_2=8$, $\beta_2=5$, $\gamma_2=17$:

$\begin{cases}8+5\geqslant 13\\ 5+17\geqslant 21\\ 8+17\geqslant 25\end{cases}$

3) $\begin{cases}\alpha_3+\beta_3\geqslant 11\\ \beta_3+\gamma_3\geqslant 13\\ \alpha_3+\gamma_3\geqslant 28\end{cases}\Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3\geqslant 28$ (т.к. $\alpha_3+\gamma_3\geqslant 28$)

Величина $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3$ принимает значение 28 при $\alpha_3=11$, $\beta_3=0$, $\gamma_3=17$:

$\begin{cases}11+0\geqslant 11\\ 0+17\geqslant 13\\ 11+17\geqslant 28\end{cases}$

4) $abc=2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}=2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$ (минимальное значение величины abc)

Ответ: $2^{18}3^{30}5^{28}$.

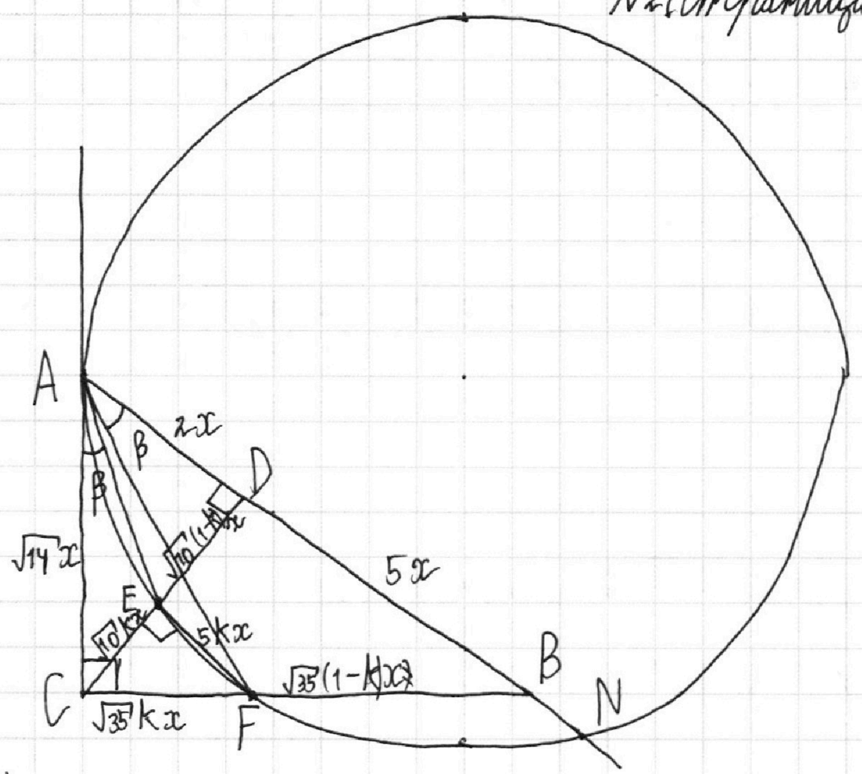
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 (страница 1)



1) Пусть AD вторично пересекает окружность в точке N. $AN \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BN} \Rightarrow \angle EAC = \angle FAN$. Пусть $\angle FAN = \beta$.
$AB = 1{,}4BD \Rightarrow AD = 0{,}4BD$. Пусть $BD = 5x$. Тогда $AD = 2x$; $CD = \sqrt{AD} \cdot \sqrt{BD} = \sqrt{10}x$; $AC = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{14}x$; $BC = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{35}x$. Пусть $CE : CD = k$. Тогда $CE = \sqrt{10}kx$; $ED = \sqrt{10}(1-k)x$. $EF \parallel BD \Rightarrow$ по теореме Фалеса $CF : CB = k \Rightarrow CF = \sqrt{35}kx \Rightarrow FB = \sqrt{35}(1-k)x$; $EF = 5kx$ (по теореме Пифагора).

2) $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\angle AED - \angle ACE) = \dfrac{\operatorname{tg}(\angle AED) - \operatorname{tg}(\angle ACE)}{1 + \operatorname{tg}(\angle AED)\operatorname{tg}(\angle ACE)} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{10}(1-k)} - \frac{2}{\sqrt{10}\cancel{k}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{10}(1-k)} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}\cancel{k}}} =$

$\cancel{= \dfrac{2k - 2(1-k)}{\sqrt{10}k(-k+1) - \frac{4}{\sqrt{10}}} = \dfrac{(4k-2)\sqrt{10}}{10k(1-k) - 4} = \dfrac{(2k-1)\sqrt{10}}{5k - 5k^2 - 4} = \sqrt{10}\,\dfrac{1-2k}{5k^2 - 5k + 4}}$

$= \dfrac{2 - 2(1-k)}{\sqrt{10}(1-k) + \frac{4}{\sqrt{10}}} = \dfrac{2k \cdot \sqrt{10}}{10(1-k) + 4} = \dfrac{\sqrt{10}k}{5 - 5k + 2} = \dfrac{\sqrt{10}k}{7 - 5k}$

3) $\operatorname{tg}(\angle CAB) = \operatorname{tg}(\angle BAF + \angle CAF) = \dfrac{\operatorname{tg}(\angle BAF) + \operatorname{tg}(\angle CAF)}{1 - \operatorname{tg}(\angle BAF)\operatorname{tg}(\angle CAF)} = \dfrac{\frac{\sqrt{10}k}{7-5k} + \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{14}}}{1 - \frac{\sqrt{10}k}{7-5k} \cdot \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{14}}} =$

$= \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14} \cdot k + \sqrt{35}k(7-5k)}{\sqrt{14}(7-5k) - \sqrt{10} \cdot \sqrt{35} \cdot k^2} = \dfrac{2\sqrt{5}k + \sqrt{5}k(7-5k)}{\sqrt{2}(7-5k) - 5\sqrt{2}k^2} = \cancel{\sqrt{\tfrac{5}{2}} \cdot \, 2k + 7k}$

$= \sqrt{\dfrac{5}{2}} \cdot \dfrac{2k + 7k - 5k^2}{-5k^2 - 5k + 7} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{5k^2 - 9k}{5k^2 + 5k - 7}$

$\operatorname{tg}(\angle CAB) = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \Rightarrow 5k^2 - 9k = 5k^2 + 5k - 7 \Rightarrow 14k = 7 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 (страница 2)

4) $\cancel{\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =}$ $EF \parallel AB$; $AB \perp CD \Rightarrow EF \perp CD \Leftrightarrow \angle CEF = 90^\circ$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10}x}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}kx \cdot 5kx} = \frac{2x^2}{5k^2x^2} = \frac{2}{5k^2} = \frac{2}{5} \cdot 2^2 = \frac{8}{5} = 8:5$$

Ответ: 8 : 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow \arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \\ 0 \leqslant \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{7\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) \\ 0 \leqslant \frac{9\pi}{2} - x \leqslant 5\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{7\pi}{5}\right) = 0 \\ -\frac{9\pi}{2} \leqslant -x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sin\left(\frac{3x}{5} - \frac{7\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{10}\right) = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{5} - \frac{7\pi}{10} = \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{2x}{5} + \frac{7\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x - \frac{7}{6}\pi = \frac{5\pi n}{3} \\ x + \frac{7}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi + \frac{5\pi n}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5\pi n}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{7}{6}\pi + \frac{5\pi n}{3} \leqslant \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{10} \leqslant \frac{7\pi}{10} + \pi n \leqslant \frac{27\pi}{10} \Leftrightarrow -\pi \leqslant \pi n \leqslant 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{6}\pi - \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{7}{6}\pi \\ x_3 = \frac{7}{6}\pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{6} \\ x_4 = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2} \end{array}\right.$

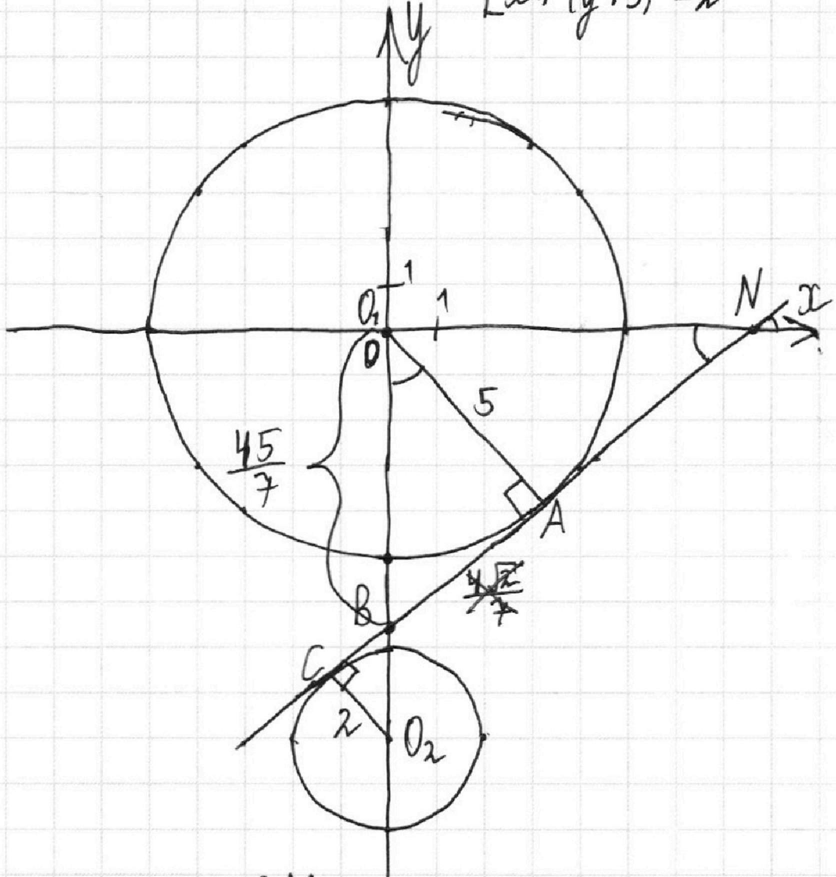
2) $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2} \leqslant \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{5\pi n}{2} \leqslant 5\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant 2$

$\left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_5 = -\frac{\pi}{2} \\ x_6 = 2\pi \\ x_7 = \frac{9\pi}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6};\ 2\pi;\ \frac{17\pi}{6};\ \frac{9\pi}{2}.$

№4 (страница 1)

1) $(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 \end{array}\right.$



Проведём прямую BN, касающуюся окружностей радиуса 5 с центром (0;0) и радиуса 2 с центром (0;-9).
$N \in Ox$; $B \in Oy$; прямая BN возрастающая; BN касается окружности радиуса 5 в точке A, а окружности радиуса 2 - в точке C.

$\triangle O_1AB \sim \triangle O_2CB$ (см. рис.) $\Rightarrow \frac{O_1B}{O_2B}=\frac{O_1A}{O_2C}=\frac{5}{2} \Rightarrow O_2B=\frac{2}{5}O_1B$

$O_1O_2=O_1B+O_2B=\frac{7}{5}O_1B=9 \Rightarrow O_1B=\frac{45}{7}$

~~Угол~~ Коэффициент наклона BN к оси Ox равен $k=tg(\angle O_1NB)=tg(\angle BO_1A)=\frac{AB}{AO_1}=\sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2-25}:5=\sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{81}{49}-1}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

2) $5x+6ay-b=0 \iff 6ay=-5x+b$

При $a=0, b=0$ данная система имеет 4 решения, т.к. прямая $x=0$ пересекает построенные окружности в 4 точках. При $a\neq0$ $6ay=-5x+b \iff y=-\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a}$

$\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6a}>k \\ -\frac{5}{6a}<-k \end{array}\right.$ — необходимое и достаточное условие того, что a ~~соо~~ удовлетворяет условию задачи (при $a\neq0$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (~~продолж~~ страница 2)

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-\frac{5}{6a} > \frac{7\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{7\sqrt{2}}{4}\end{array}\right. \\ \cancel{a \neq 0}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}-\frac{5}{3a} > \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5}{3a} < -\frac{7\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5}{3a}^{\backslash 2} + \frac{7\sqrt{2}}{2}^{\backslash 3a} < 0 \\ \frac{5}{3a}^{\backslash 2} - \frac{7\sqrt{2}}{2}^{\backslash 3a} > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{10 + 21\sqrt{2}a}{6a} < 0 \\ \frac{10 - 21\sqrt{2}a}{6a} > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{21a + 5\sqrt{2}}{a} < 0 \\ \frac{21a - 5\sqrt{2}}{a} < 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{a + \frac{5\sqrt{2}}{21}}{a} < 0 \\ \frac{a - \frac{5\sqrt{2}}{21}}{a} < 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a \in \left(-\frac{5\sqrt{2}}{21}; 0\right) \\ a \in \left(0; \frac{5\sqrt{2}}{21}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5\sqrt{2}}{21}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5\sqrt{2}}{21}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}a \in \left(-\frac{5\sqrt{2}}{21}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5\sqrt{2}}{21}\right) \\ a = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5\sqrt{2}}{21}; \frac{5\sqrt{2}}{21}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{21}; \frac{5\sqrt{2}}{21}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№4.~~ №5

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3}\log_x 11 - 5$$

$$3\log_{11}^4 x = 16\cdot\frac{1}{\log_{11} x} - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_{11}^5 x + 5\log_{11} x - 16 = 0 \\ \log_{11} x \neq 0 \end{cases}$$

Найдём все возможные значения величины $\log_{11} x$ с помощью теоремы Безу.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{\pi}{2} \leq -\pi + \frac{10\pi n}{3} \leq \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{10\pi n}{3} \leq \frac{11\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{10}{3}n \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{20} \leq n \leq \frac{33}{20}$

$n=1 \Rightarrow x_1 = \frac{10\pi}{3} - \pi = \frac{7\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{2} \leq 2\pi + \frac{5\pi n}{2} \leq \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi n}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 1$

$x_2 = 2\pi - \frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$x_3 = 2\pi$

$x_4 = \frac{9\pi}{2}$

$f(\frac{2}{3}) = 3\cdot\frac{32}{3\cdot 81} + \frac{10}{3} - 16 = \frac{302}{81} - 16$

$f(x) = 3x^5 + 5x - 16$

$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{81} + \frac{5}{3} - 16 = \frac{136}{81} - 16 < 0$

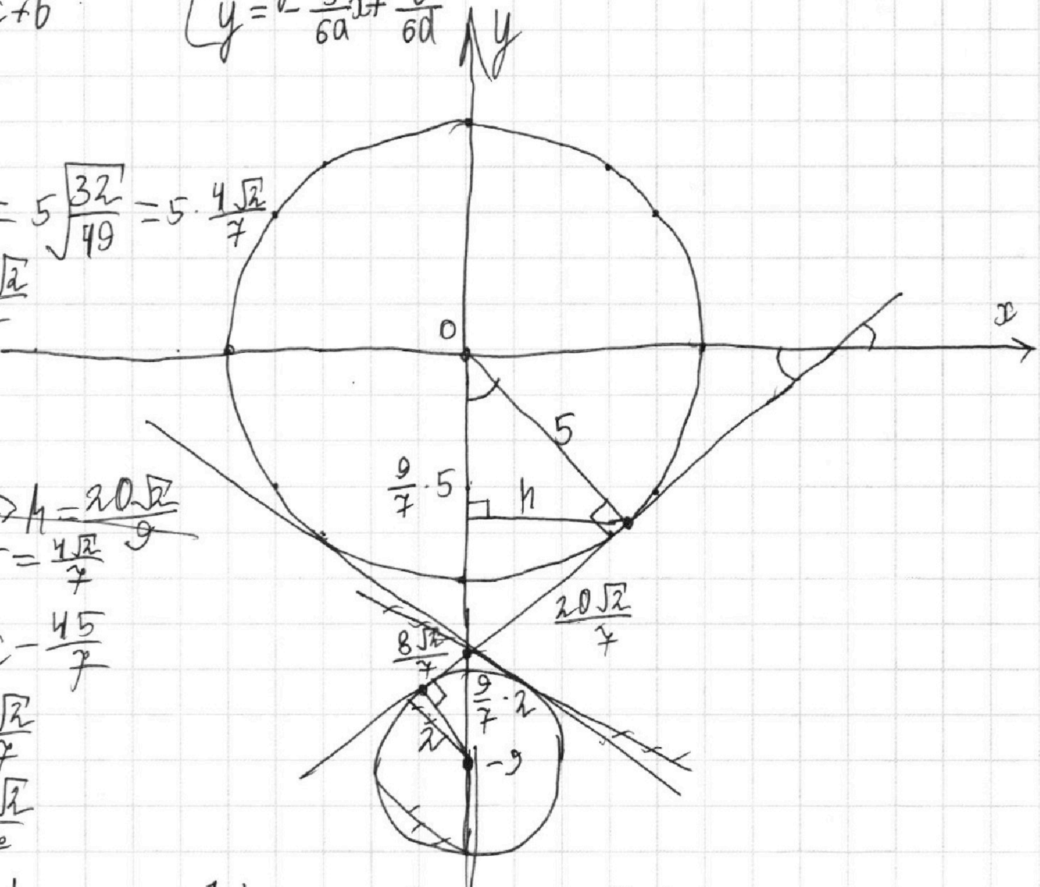
$x_2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{3}$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$

№4

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \end{array}\right. \\ 6ay = -5x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \end{array}\right. \\ y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \end{cases}$

$\boxed{a \neq 0}$



$5\sqrt{\frac{81}{49} - 1} = 5\sqrt{\frac{32}{49}} = 5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\frac{20\sqrt{2}}{7}$

$(0; -\frac{45}{7})$

~~$\frac{100\sqrt{2}}{7} = \frac{45}{7}h$~~

~~$20\sqrt{2} = 9h \Rightarrow h = \frac{20\sqrt{2}}{9}$~~

$k = \frac{20\sqrt{2}}{7} : 5 = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$y = \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7}$

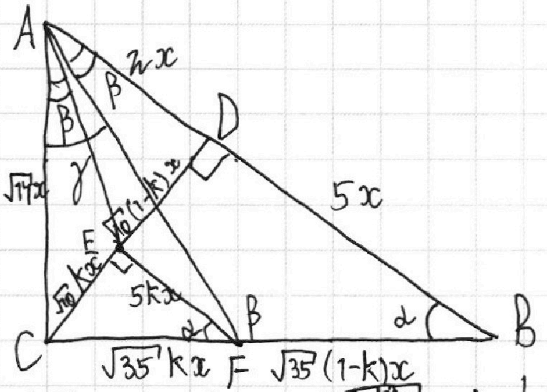
$\left[\begin{array}{l} k > +\frac{4\sqrt{2}}{7} \\ k < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{array}\right.$

~~$\log_{11}^4 x - 6\log_{11} x = \frac{1}{3}\log_x 11^{-2} - 5 = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$~~

~~$\log_{11}^4 x + (\frac{2}{3} - 6)\log_{11} x + 5 = 0$~~

$3\log_{11}^4 x + (2-18)\log_{11} x + 15 = 0$

~~$3\log_{11}^4 x - 16\log_{11} x + 15 = 0$~~



$\frac{\pi}{2}-\alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right)+(\pi-\alpha)-\beta$

$\beta = arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right)+\frac{\pi}{2}$

$\frac{\sin\beta}{7x} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{14+35k^2}\,x}$

$\sin\beta = \frac{\cancel{7}}{\sqrt{14+35k^2}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\cancel{7}} = \sqrt{\frac{2}{2+5k^2}}$

$\cancel{\beta=}$ $\cos\beta = -\sqrt{\frac{5k^2}{2+5k^2}} \Rightarrow tg\beta = -\sqrt{\frac{2}{5k^2}} = -\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{k}$

$tg\beta = tg\left(arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}(1-k)}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{5}}(1-k) = -\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{k}$

$\cancel{k^2}$ $1-k=\frac{1}{k} \Rightarrow k-k^2=1 \Rightarrow k^2-k+1=0$

~~sin∠AED=~~

1) $tg(\angle AED) = \frac{2}{\sqrt{10}(1-k)} = \sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{1}{1-k}$

$tg(\angle ACD) = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$tg(\angle CAE) = tg(\angle AED-\angle ACD) = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{1}{1-k}-\sqrt{\frac{2}{5}}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-k}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{1-k}-1\right)}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-k}} \cdot (1-k) =$

$= \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}(1-1+k)}{1-k-\frac{2}{5}} = \frac{k\sqrt{\frac{2}{5}}}{\frac{3}{5}-k} = \frac{\sqrt{10}k}{3-5k}$

~~sin∠C~~ $\cancel{x}\,tg^2\beta+1 = \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{1}{1-\sin^2\beta} \Rightarrow 1-\sin^2\beta = \frac{1}{1+tg^2\beta} \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{tg^2\beta}{1+tg^2\beta}$

$\sin\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{\sqrt{10}k}{3-5k} : \sqrt{1+\frac{10k^2}{(5k-3)^2}} = \sqrt{10}k : \sqrt{25k^2-30k+9+10k^2} =$

$= \frac{\sqrt{10}k}{\sqrt{35k^2-30k+9}}$

$\frac{\sqrt{35}(1-k)}{\sqrt{10}k}\cdot\sqrt{35k^2-30k+9} =$

2) $tg\gamma = \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{2}}k$

$tg\left(arctg\left(\sqrt{\frac{5}{2}}k\right)+arctg\left(\frac{\sqrt{10}k}{3-5k}\right)\right) = \sqrt{\frac{35}{14}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}k+\frac{\sqrt{10}k}{3-5k}}{1-\frac{5k^2}{3-5k}} \cdot (3-5k) = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}(3-5k)+\sqrt{10}k}{3-5k-5k^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \frac{3-5k+2k}{-5k^2-5k+3} = 1$

$(5k^2+5k-\cancel{3})+(\cancel{3}-3k)=0 \Rightarrow 5k^2-2k=0 \Rightarrow k=\frac{2}{5}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\alpha} \Rightarrow tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$$\begin{cases} ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

Пусть $a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}$

$\cancel{\alpha_1 + \alpha_2 = 6}$ $\cancel{\alpha_2}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 6 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = 12 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{59}{2} - 21 = \frac{17}{2} = 8{,}5 \\ \beta_2 = \frac{59}{2} - 25 = 4{,}5 \\ \gamma_2 = \frac{59}{2} - 13 = 16{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29{,}5 \Rightarrow \cancel{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \geq \left(\frac{29{,}5}{3}\right)^3}$$

$$\cancel{\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases}} \Longleftrightarrow$$

$(abc)^2 \geq 2^{36} 3^{59} 5^{52} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{29} 5^{26}\sqrt{3}$ $\cancel{\geq 2^{18} 3^{\frac{29}{3}} 5^{56}}$ $\cancel{x} = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma}$

1) $\begin{cases} \alpha \geq 18 \\ \beta \geq 30 \\ \gamma \geq 26 \end{cases}$ ✓ $\alpha = 18$

2) $\beta = 30$ $\Rightarrow \gamma_2 = 30 - \alpha_2 - \beta_2$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ 30 - \beta_2 \geq 25 \\ 30 - \alpha_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 8 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 17 \end{cases} \checkmark$$

3) $\gamma = 26$ $\Rightarrow \gamma_3 = 26 - \alpha_3 - \beta_3$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \qquad \cancel{\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ 26 - \beta_3 = 28 \\ 26 - \alpha_3 = 13 \end{cases}}$$

$\cancel{\alpha_3 = 13}$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$

$\gamma = 28$

$\alpha_3 = 11$

$\beta_3 = 0$

$\gamma_3 = 17$

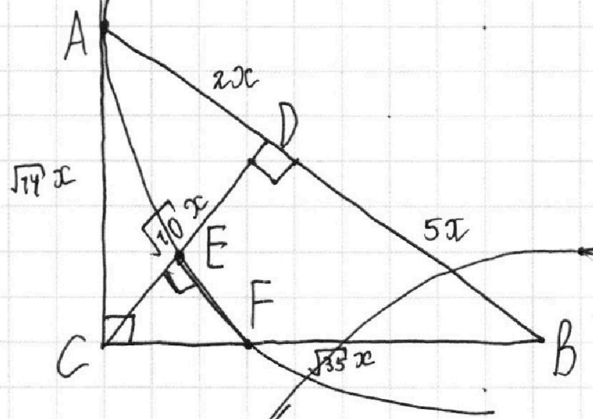
$$\begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{11} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17} \end{cases}$$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

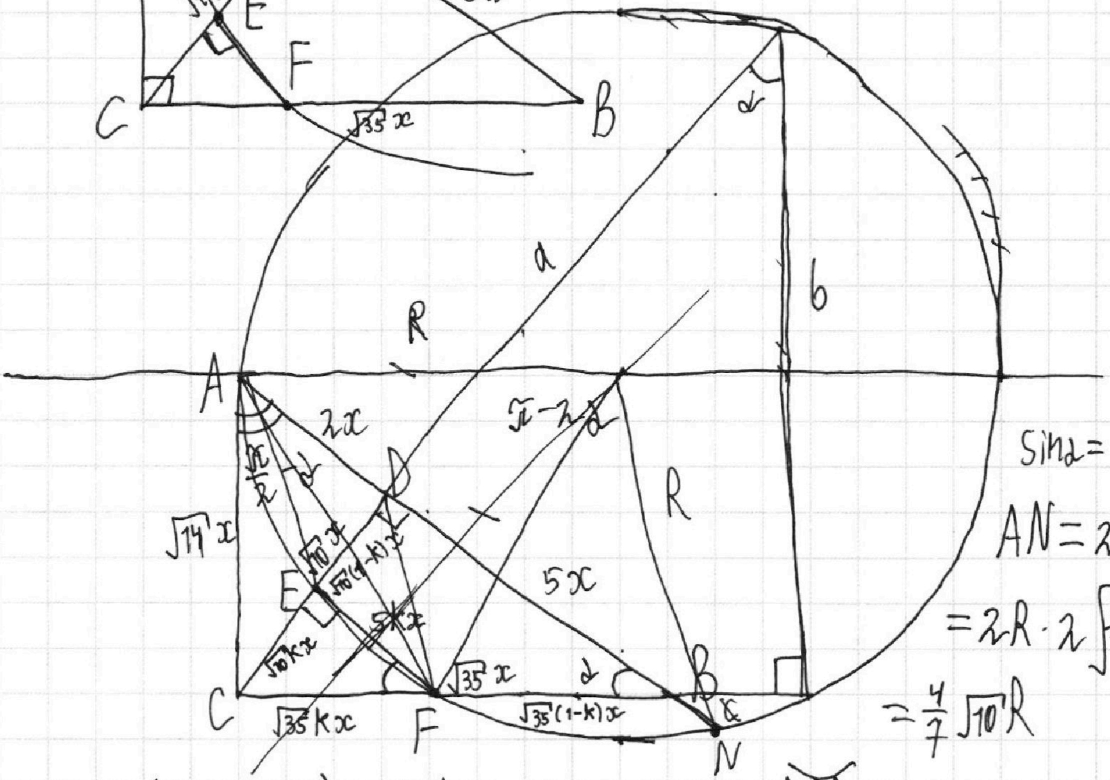
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB = 1{,}4\,BD$

$AD = 0{,}4\,BD$

$BD = 5x,\ AD = 2x$



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

$AN = 2R\sin 2\alpha =$
$= 2R\cdot 2\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}} =$
$= \frac{4}{7}\sqrt{10}\,R$

$14x^2 = (\sqrt{10}\,x + a)\cdot\sqrt{10}\,kx$

$14x^2 = (\sqrt{35}\,x + c)\cdot\sqrt{35}\,kx$

$\overset{\frown}{AN} = \pi - 2\alpha$

$\overset{\frown}{EN} = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{1-k}\right)$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\,x^2 = \sqrt{10}\,x^2$

$S_{CEF} = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{10}\,k^2x^2$

$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{1}{\frac{5}{2}k^2} = \frac{2}{5k^2} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

N3.

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}$

$0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \pi \iff -\frac{9\pi}{10} \leq -\frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{10} \iff \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \cancel{= \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\cos\frac{x}{5} + \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)\sin\frac{x}{5} =}$

$\cancel{= \sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{x}{5} - \cos\frac{9\pi}{10}}$ $\cos($ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\sin x = \sin\left(\frac{14\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) = -\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{7\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{5}\right)$

$\sin x + \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{5}\right) = 0 \iff \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{2x}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10} = \pi n\\ \frac{2x}{5} - \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}6x + 3\pi = 10\pi n\\ 2x - \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + 5\pi n\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}2x = -\pi + 10\pi n\\ x = 2\pi + \frac{5\pi n}{2}\end{array}\right.$