



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Обозначим за  $a_1$  макс. вхождение ~~столбца~~ 2 в число  $a$ ;  $b_2$  - в число  $b$ ;  $c_2$  - в число  $c$ ; аналогично для  $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$ .

$$\text{Тогда: } ab : 2^8 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 8 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = \cancel{a_2 + b_2 + c_2} \\ \text{аналогично: } a_3 + c_3 \geq 14 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \geq (a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_1 + c_1), \\ b_3 + c_3 \geq 12 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \geq \frac{34}{2} = 17$$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + b_3 \geq 14 \\ a_3 + c_3 \geq 21 \\ b_3 + c_3 \geq 20 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{14 + 21 + 20}{2} = 27,5 \quad \cancel{\#} \\ a_3 + b_3 + c_3 - \cancel{a_1 + b_1 + c_1} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq 20$$

$$a_5 + c_5 \geq 39 \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq \underline{39} \quad (\text{мн.к. число несупр.})$$

Итак,  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$$\text{Пример: } a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cancel{\cdot 5}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}$$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{19} \cdot 5^{12} ; 2^1 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{27} ; 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} ; 2^{14} \cdot 3^{11} \cdot 5^{39}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} - \text{итог}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2} (2)$

$$= F\left(a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}; a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = F\left(\frac{2}{7}a; \frac{\sqrt{10}}{7}a\right)$$

$$\begin{aligned} FM &= \sqrt{14 - \frac{4}{49}a^2} + \sqrt{r - \frac{10}{49}a^2} = r \Rightarrow \\ &\Rightarrow 14 - \end{aligned}$$

$$FM = \sqrt{(14 - \frac{2}{7}a)^2 + (r - \frac{\sqrt{10}}{7}a)^2} = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 196 - \frac{4}{7}a \cdot 14 + \frac{4}{49}a^2 + r^2 -$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1)

$$10 \arcsin(\log(x)) = \pi - 2x$$

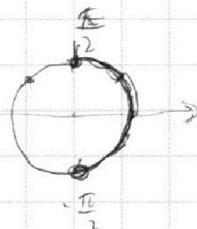
$$t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$\Leftrightarrow 5 \arcsin(\sin(t)) = t$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin(t)) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1,5\pi \leq t \leq 2,5\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2,5\pi \leq t \leq -1,5\pi, \\ 5 \cdot (t + \pi) = t \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} -1,5\pi < t \leq -0,5\pi \end{array} \right.$$

$$5 \cdot (-\pi - t) = t$$

$$-0,5\pi < t \leq 0,5\pi$$

$$5t = t$$

$$0,5\pi < t \leq 1,5\pi$$

$$5(\pi - t) = t$$

$$1,5\pi < t \leq 2,5\pi$$

$$5(t - 2\pi) = t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2,5\pi \leq t \leq -1,5\pi, \\ t = -2,5\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1,5\pi < t \leq -0,5\pi \\ t = -\frac{5}{6}\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,5\pi < t \leq 0,5\pi, \\ t = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5\pi < t \leq 1,5\pi \\ t = \frac{5}{6}\pi, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,5\pi < t \leq 2,5\pi, \\ t = 2,5\pi \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\pi}{2} - t.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}, \\ x = -2\pi. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3\pi, \\ x = \frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = -\frac{1}{3}\pi, \\ x = -1\pi. \end{array} \right.$$

Ответ:  $\{-1\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

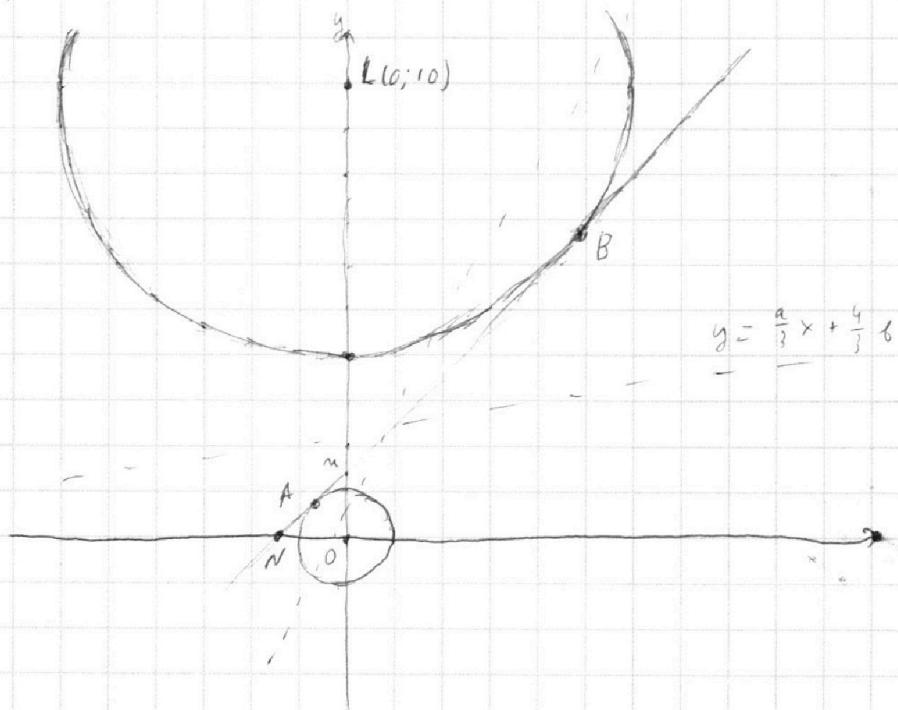
№ 4. (1)

$$\begin{cases} dx - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b,$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1^2, & - \text{окружность радиусом } 1 \text{ с центром } O(0; 0) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 & - \text{окр. с радиусом } 6 \text{ и центром } L(0; 10) \end{cases}$$

Уравнение:



Чтобы ур-е имело 2 корня, необходимо, чтобы прямая пересекла  
окружность по 2 раза. Другим не пересек.

Найдём корн.  $t$ , при  $t > 0$ , при кот. прямая может их  
касаться в двух образах:

Точки касания с окружностью - A; C верхней - B; C Oy - M.  
 $\angle OAM = \angle MBL = 90^\circ \Rightarrow \triangle LAB \cong \triangle LBM \cong \triangle AMO \Rightarrow$   
 $\angle AMO = \angle MBL$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н4(1)

$$\Rightarrow \angle MNO = \angle BAO = 61^\circ$$

$$\angle M+MO = \angle O = 10$$

$$M O = 10$$

$$MO = \frac{10}{7}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Н-макс перес лин  $y = \frac{a}{3}x + \frac{b}{3}c$  с Ox.

$\Delta AMO \sim \Delta OAM$  ( $MO = AO$ )

$$\frac{a}{3} = \tan \alpha + (\text{дальн угол}) = \tan(\angle MNO) = \tan(\angle AOM) =$$

$$= \frac{AM}{AO} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$a = \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

Если  $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$ , то при том же b, что и в положении

Касания, кривая пересечёт окр б2 максимума  $\Rightarrow$  4 корня.

Если  $a \leq \frac{3\sqrt{51}}{7}$  и кривая пересек. окр. макс. окр., то она

не пересечёт окр б2 максимума  $\Rightarrow$  4 корней.

Значит при  $a \geq 0$  4 корня может быть при  $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$

Одну из симметричных относительно Оy [Каждая сама себе]  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  где  $a \leq 0$  4 корня только при  $a < -\left(\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}, \\ a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$

Ответ: при  $(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5.

$$(1): \log_5(2x) - 3 \log_5(5) = \log_{5x^3}(6 \cdot 5) - 3 \quad | \begin{array}{l} 2x > 0, \\ 2x \neq 1 \end{array}$$

$$(\log_5(2x))^4 - 3 \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} = \log_{5x^3} 5^{\frac{4}{3}} - 3$$

$$\text{Let } t_x = \log_5(2x); \quad 2x \neq 1 \Rightarrow t_x \neq 0$$

$$t_x^4 - 3 \cdot \frac{1}{t_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$t_x^4 - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t_x} + 3 = 0$$

$$t_x \neq 0 \quad \boxed{t_x^5 + 3t_x = \frac{13}{3}}$$

(2):

$$\log_5(y) + 4 \log_5 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \quad | \begin{array}{l} y > 0, \\ y \neq 1 \end{array}$$

$$(\log_5(y))^4 + 4 \log_5 5 = \log_y(5^{-\frac{1}{3}}) - 3 \quad | \log_y s^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \log_y s$$

$$t_y = \log_5(y); \quad y \neq 1 \Rightarrow t_y \neq 0$$

$$t_y^4 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} = -3$$

$$t_y \neq 0 \quad \boxed{t_y^5 + 3t_y = -\frac{13}{3}}$$

$$t_y^5 + 3t_y + t_x^5 + 3t_x = -\frac{13}{3} + \frac{13}{3}$$

$$(t_y + t_x)(t_y^4 - t_y^3 t_x + t_y^2 t_x^2 - t_y t_x^3 + t_x^4 + 3) = 0$$

$$t_y^4 - t_y^3 t_x + t_y^2 t_x^2 + t_y t_x^3 + t_x^4 + 3 > 0 \Rightarrow \text{No such case} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_y + t_x = 0$$

$$\log_5(2x) + \log_5(y) = 0$$

$$\log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = 0,5. \quad \text{Answer: } xy = 0,5$$

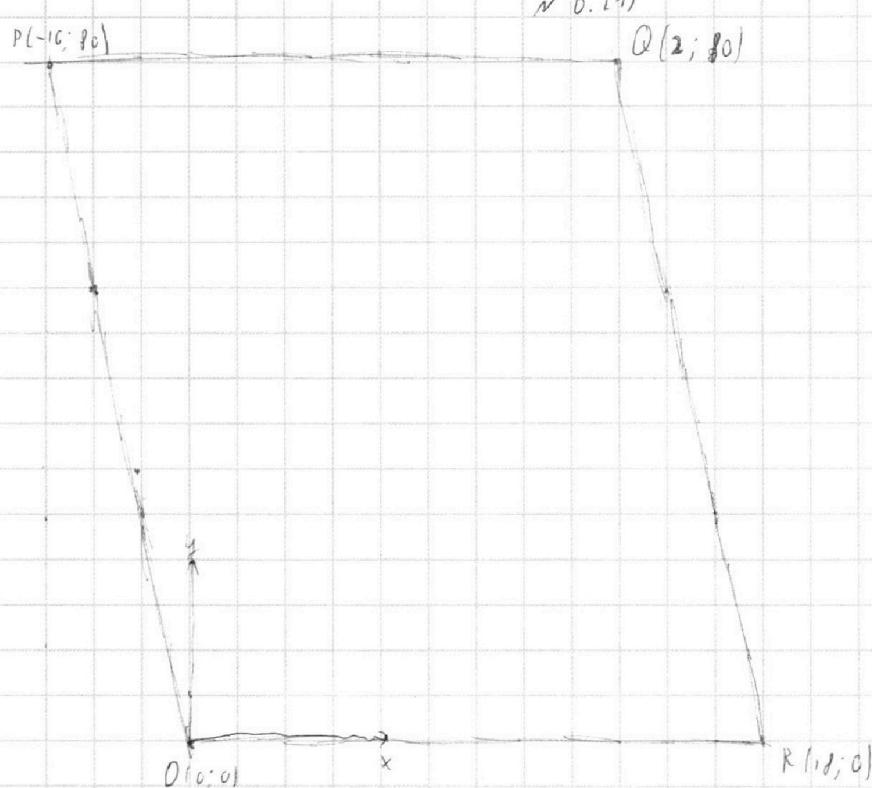
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Поверхность в верхней и нижней <sup>грани</sup> пределах параллельна  $Oy$ ; боковые  
грани имеют угловой наклон  $-5$ , т.к.  $\frac{80-0}{-16-0} = -5$

Посчитаем некоторую прямую вида  $y = -5x + b_0$   
пункт некоторой точки  $A(x_1; y_1)$  лежит на <sup>грани</sup> данной прямой.  
Точка некоторого места  $B(x_2; y_2)$  также лежит на прямой, то выполнится равенство  
 $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - [-5x_1 + b_0] = 45$$

$$y_2 = -5x_2 + b_0 + 45$$

Дно некоторого места задано другой прямой вида  
 $y = -5x + b$ , и она не зависит от точки  $A$ , а зависит  
только от исходной прямой. Значит, все <sup>точки</sup> некоторой  
пары точек  $A; B$  лежат на прямых  $y = -5x + b_0$  и  $y = -5x + b_0 + 45$   
совпадают.

Таким образом, все точки (yд. коорд., x) лежащие в прямой

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (1)

напр-ма, будут ~~меньше~~ удовлетворять равенству  $\Rightarrow$  Будут 6 исходных точек  $\Rightarrow$  что такое-то может быть исключено.

Графиком прямого  $y = -5x + b_0$  и найдем как -то точек будет на пр-ма.

Д) прямая пр-ма левой стороны ( $-5 = -5$ )

~~Если все о, то прямая не пересекает~~

левая прям пр-ма;  $y = -5x$ , м.к.,  $\begin{cases} 0 = -5 \cdot 0 \\ 10 = (-5) \cdot (-10) \end{cases}$

правая прям пр-ма  $y = -5x + 90$ , м.к.,  $\begin{cases} 80 = -5 \cdot 2 + 90 \\ 0 = -5 \cdot 18 + 90 \end{cases}$

а) точки одновременно лежат прямого.

Значит, если  $b_0 < 0$  или  $b_0 > 90$ , то прямая лежит выше или ниже пр-ма  $\Rightarrow$  не пересекают ее  $\Rightarrow$  0 исходных точек.

Если  $b_0$  не целое, но  $x, \in \mathbb{Z}, y, = -5 \cdot x, + b_0$  - нецелое  $\Rightarrow$  0 исходных точек.

Значит, все исходные точки - на прямых  $(b_0 \in \mathbb{Z}; 0 \leq b_0 \leq 90)$ .

Покажем, что если  $b_0 : 5$ , то кор - б0 образуют точки ребра 17, ~~а~~ а если не делится, то ровно 16:

~~Найдем some  $b_0 \in \mathbb{Z}; 0 \leq b_0 \leq 90$ , then  $A(x, y)$ .~~

~~$x, \in \mathbb{Z}; y, \in \mathbb{Z}; y, = -5 \cdot x, + b_0$ . Решим уравнение,~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (3)

Прямая - линияйка Бок. граници  $\Rightarrow$  пересечение будем, прямой

~~плоскости~~ Прямая Амбразон пересекает будем содержание ~~плоскости~~

~~16~~ ~~пересечения с плоскостью~~ 16 местами прямой отрезка пересе-

чения на О<sub>Y</sub> - прямая отрезок ОМ, где О(0; 0) М(0, 30),

н.к. Верхняя и нижняя грани || О<sub>Y</sub>; Бок. параллелепипед.

Если  $b_0 \equiv 0$ , то на отрезке 0..80 находится 17

мест, сравнивших с  $b_0$ , но неудачно 5; места при члене  $b_0$  их  
будет 16, н.к.  $(80-0)/5 = 16$ ;  $80/5$ ; 0..5.

Для каменки местах, отличных от местах прямой, ~~есть~~ (наша

А(Х<sub>0</sub>; Y<sub>0</sub>) если  $Y_0 \equiv b_0$ , то Y местами будет кончаться, н.к.

$Y_0 \in \mathbb{Z}$ ;  $X_0 = 0 + \frac{Y_0 - b_0}{-5} -$  Число членов  $(Y_0 - b_0 : 5)$  а

если  $Y_0 \neq b_0$ , то  $X_0 = 0 + \frac{Y_0 - b_0}{-5} -$  Число  $(Y_0 - b_0 : 5)$ .

Итак, всего местах местах 16, если  $b_0 : 5$  и 17, если  $b_0 \neq 5$ .

Для 2 прямых  $Y = -5x + b_0$  и  $Y = -5x + b_0 + 45$  если

$b_0 > 45$ , то  $b_0 + 45 > 90 \Rightarrow$  Нет ~~еще~~ иск. мест.

Если  $b_0 : 5$ , то  $b_0 + 45 : 5 \Rightarrow 17 \cdot 17 = 289$  мест

мест. Член  $b_0 : 5$ ,  $b_0 + 45 : 5 \Rightarrow 16 \cdot 16 = 256$  мест

мест. Точки не лежат, н.к. Y наименее;  $x = \frac{y-b_0}{-5}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 6(9)

Ищем, ответ на задачу

$$\sum_{b_0=0}^{45} \left( \begin{array}{l} 77, b_0 \cdot 5 \\ 16, b_0 \cdot 15 \end{array} \right), \text{м.к.}$$

$$\begin{cases} b_0 \geq 0 \\ b_0 \leq 40 \\ b_0 + 45 \leq 20 \\ b_0 + 45 \leq 50 \end{cases}$$

Ход - 80 часов от 0.. 45, значит на 5 -

- 10 часов (45/5+1) все решения -  $46 - 10 = 36$

Число, ответ:  $10 \cdot 289 + 36 \cdot 256 = 2890 + 9216 =$

= 12106

Ответ: 12106



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

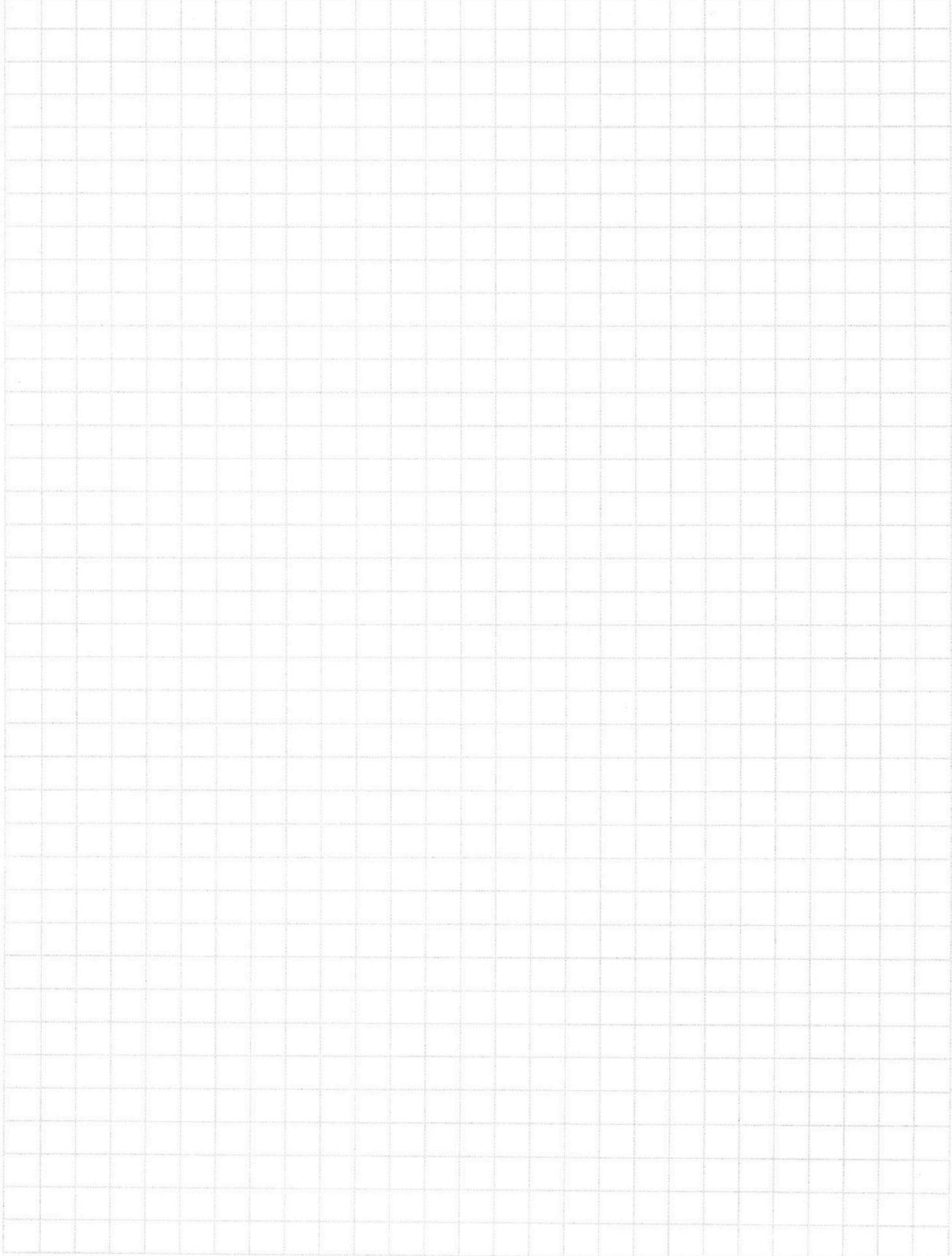
5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

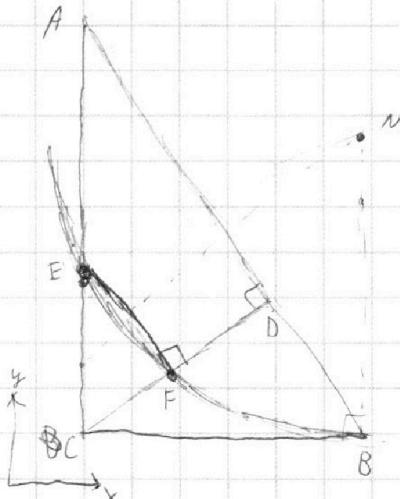
- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2. (1)



$$EF \parallel AB \perp CD \Rightarrow EF \perp CD$$

~~Доказательство~~  $\triangle CEF \sim \triangle CAD$  (по 2 углам)

$\triangle CAD \sim \triangle ABC$  (по 2 углам)

$$\begin{aligned} S(\triangle CAD) &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \\ &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \frac{5}{7} AB = \frac{5}{7} S(\triangle ABC) \end{aligned}$$

Пусть  $AB = 7x$ . Тогда  $AD = 5x$ ,  $DB = 2x$ ;  $CD = \sqrt{AD \cdot DB} =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{10}x; \quad CB = x \cdot \sqrt{10+4} = \sqrt{14}x; \quad AC = x \cdot \sqrt{10+25} = \\ &= \sqrt{35}x \end{aligned}$$

Начнём считать коорд.  $(10; 0)$ ;  $CB \uparrow \uparrow Oy$ ;  $(A \uparrow \uparrow Ox)$

одинаково омн.  $= x$ . Тогда  $B(\sqrt{14}; 0)$ ;  $A(0; \sqrt{35})$

М - центр окр.  $\triangle EFB$ .  $\angle F$  - ~~наш~~ вогнутый  $\Rightarrow \angle MFB = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow MB \parallel AC \Rightarrow$  радиус  $r$ , то  $M(\sqrt{14}; r)$

Пусть  $EC = a$ . Тогда  $E(0; a)$ .  $EM = \sqrt{(r-a)^2 + 14} = r \Rightarrow$   
 $\Rightarrow r^2 - 2ra + a^2 + 14 = r^2 \Rightarrow 2ra = a^2 + 14$

$$D = A + \vec{AD} = A + \frac{5}{7} \vec{AB} = D\left(\frac{5}{7}\sqrt{14}, \frac{2}{7}\sqrt{35}\right)$$

$$\tan \angle DCB = \cos \angle DCB = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\sin \angle DCB = \sqrt{1 - \frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$\triangle CEF \sim \triangle CAB \sim \triangle DCB \Rightarrow CF = CE \cdot \sin \angle ECF = a \cdot \sin(\angle DCB) =$   
 $= a \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} \Rightarrow F = C + \vec{CF} = F\left(a\sqrt{\frac{2}{7}}, a\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sin \angle DCB\right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

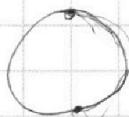
**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad a_1 + b_1 \geq 8; \quad \textcircled{2} \quad a_2 + c_1 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 12$$

$$8 + 12 + 14$$



$$a_1 + b_1 = 14$$

$$b_2 + c_2 = 12$$

$$a_2 + c_1 = 8$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}$$

$$a_1 - b_2 = 2$$

$$c_1 - b_2 = 6$$

$$a_2 - b_1 = 2$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ b_2 &= 3 \\ c_2 &= 9 \end{aligned}$$

$$a_1 = 8$$

$$b_2 = 6$$

$$c_1 = 14$$

$$\text{искривленность } (\text{curv}) =$$

$$\begin{aligned} &= \arcsin \left( \frac{f}{r} \right) = \left| \frac{\pi}{2} - x \right| \\ &= \frac{\pi}{2} - x \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad AD \cdot DB = CD^2 = 10x^2$$

$$CD = 2\sqrt{10} \cdot x$$

4x

$$CB = \sqrt{14} \cdot x$$

$$AC = \cancel{2\sqrt{10}} \cdot x \cdot \sqrt{3} \cdot x$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

~~Будет~~

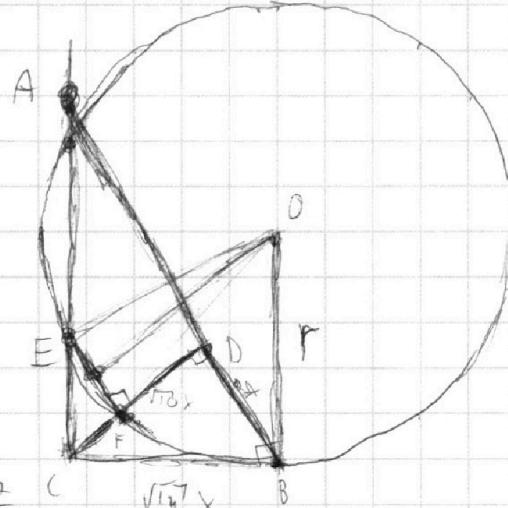
$$(r - EC)^2 + (rB)^2 = r^2$$

$$r^2 - 2r \cdot EC - EC^2 + 14x^2 = r^2$$

$$EC^2 + 14x^2 = 2r \cdot EC$$

$$r = \frac{a^2 + 14}{2a}$$

$$= \cancel{a^2 + 14} + \frac{a^2}{a} + \frac{14}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cancel{ax = 3y + 48 \geq 0} \\ (x^2 + y^2 - 1) \\ -\pi \leq \arctan y \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 7 \\ \hline 115 \\ 12 \hline 200 \end{array}$$

$$-\pi \leq -2x \leq 5\pi$$

$$-\pi \leq x \leq 6\pi$$

$$-\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$\log_2(2x)$$

$$-\pi \leq x \leq -\pi$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = t$$

$$y = -5x + b_0$$

$$-1,5$$

$$-5x = y - b_0$$

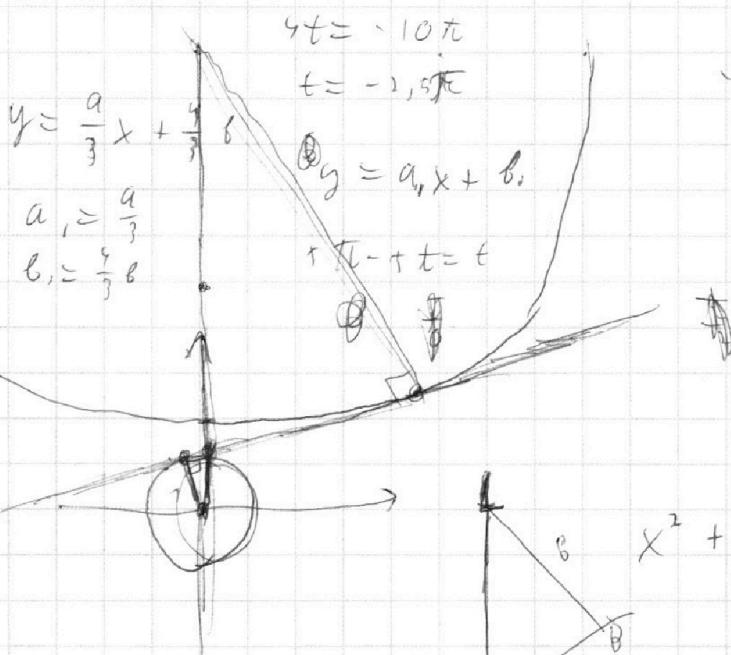
$$x = y - b$$



$$-0,5\pi \leq \pi - t \leq 1,5\pi$$

$$1,5\pi \leq \pi - t \leq 2,5\pi$$

$$-0,5\pi \leq -\pi - t \leq 0,5\pi$$



$$-5\pi - 5t = t$$

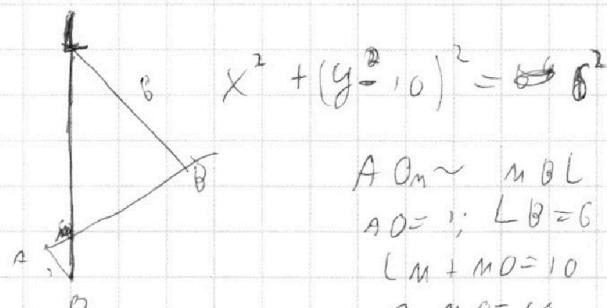
$$6t = -5\pi$$

$$t = -\frac{5}{6}\pi$$

$$\begin{aligned} (y - 10)^2 \\ = y^2 - 20y + 100 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3+5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$



$$AO \sim MB$$

$$AO = 1; LB = 6$$

$$LM + MO = 10$$

$$7 \cdot MO = 10$$

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{\frac{100-49}{49}} = \sqrt{\frac{51}{49}} = MO = \frac{10}{7} \\ &= \frac{\sqrt{51}}{7} \end{aligned}$$



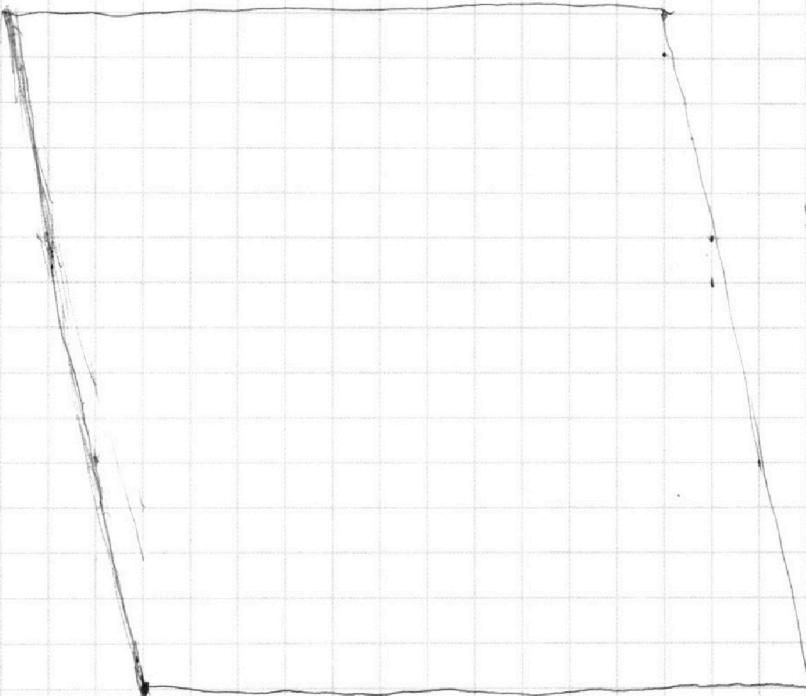
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5x_2 + y_2 - 8 = 45$$

$$y_2 = -5x_2 + 8 + 45$$

$$A(\sqrt{14}, \sqrt{3})$$

$$B(\sqrt{14}, 0)$$

$$E(0; a)$$

$$(r-a)^2 + 14 = r$$

$$-2ra + a^2 + 14 = 0$$

$$a^2 + 14 = 2ra$$

$$D\left(\frac{\sqrt{14}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$F_y / F_x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{2}{\pi \cdot \sqrt{14}} = \frac{2 \cdot \sqrt{14}}{\pi \cdot 28} = \sqrt{\frac{2}{14}}$$

$$\left( \sqrt{14} - \sqrt{\frac{2}{14}} \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \right) +$$

$$\begin{array}{r}
 \times 286 \\
 \times 36 \\
 \hline
 1536 \\
 768 \\
 \hline
 9216 \\
 + 2890 \\
 \hline
 14106
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 \rightarrow \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3.$$

$$\cancel{\log} \left( \frac{\log 2x}{\log 5} \right)^4 - 3 \left( \frac{\log 5}{\log 2x} \right) = \frac{4}{3} \left( \frac{\log 5}{\log 2x} \right) - 3$$

$$t = \log_5(2x)$$

$$t^4 - 3 \cdot \frac{1}{t} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{t} \right) + 3 = 0$$

$$3t^4 - 13 \cancel{t} + 13 = 0$$

$$3t^4 + t^2 + t_x^2 + t_y^2 = 13/3$$

$$\boxed{t_x^2 + t_y^2 = \frac{13}{3}}$$

$$\log_y y + 4 \log_y 5 = \log_y 5^4 - 3$$

$$(\log_y y)^4 + 4 \left( \frac{1}{\log_y y} \right) = \cancel{\log_y y} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\log_y y} \right) - 3$$

$$\log_y y^{-1} = \log_y 5^{-1} = -\frac{1}{3} \log_y 5$$

$$y_y = \log_y(y)$$

$$t_y^4 + 4 \frac{1}{3} + 3 t_y = 0$$

$$t_y^4 + 3 t_y = -\frac{13}{3}$$

$$t_x^2 + 3 t_x - t_y^2 - 3 t_y = 0$$

$$(t_x - t_y)(t_x^3 + t_x^2 t_y + t_x t_y^2 + t_y^3 + t_y) + 3 = 0$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$y_0 = -5(x - x_0) + y_1 + 45$$

x, y