



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot be \cdot ac = \text{наименьшее}$$

$$x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{aligned} ab &= x \cdot 3^{11} \cdot 4^{11} \\ be &= y \cdot 3^{18} \cdot 4^{18} \\ ac &= z \cdot 3^{21} \cdot 4^{21} \end{aligned} \right\} \text{по условию}$$

$$ab \cdot be \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = xyz \cdot 3^{50} \cdot 4^{50}$$

Т.к. abc - натур. число и их произведение тоже натуральное

$$\Rightarrow abc = \sqrt[3]{xyz \cdot 4^{25} \cdot 3^{32}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz \cdot 4} \text{ - натур. } \Rightarrow xyz : 4$$

Т.к. нам надо наименьшее произведение $\Rightarrow x, y, z$ - наименьшие

$$\Rightarrow abc = 3^{25} \cdot 4^{33}$$

$$\text{Ответ: } \min abc = 3^{25} \cdot 4^{33}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по условию $\frac{a}{b}$ - несократ $\Rightarrow \text{НОК}(a, b) = ab$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab} \Rightarrow \frac{(a+b)}{m} \equiv \frac{(a+b)^2}{m}$$

т.к. $(a+b):m$

тогда и $10ab:m$

$\Downarrow$

$$\underline{10ab} \equiv a+b$$

но т.к. $\text{НОК}(a, b) = ab$

$\Rightarrow$ максимальное $m = 10$

$\Rightarrow$ если $(a+b):10$ то

$\frac{a}{b}$ и $(a^2-2ab+b^2):10$

т.к.

ответ: $\max m = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Решение~~ $2x^2 - 3x + 4 = a$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0 \Rightarrow a \geq 0$$

~~Решение~~ $2x^2 + 3x + 3 = b$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0 \Rightarrow b \geq 0$$

тогда запишем уравн.: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$

$$\sqrt{a} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Rightarrow 1 \geq \sqrt{b}$$

$$a = 1 - 2\sqrt{b} + b$$

$$2\sqrt{b} = 1 + b - a$$

$$2\sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 1 + 4x - 1$$

$$2\sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 4x \quad x \geq 0$$

$$2x^2 + 4x + 3 = 4x^2$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 24 = 40 = 4 \cdot 10 \Rightarrow \sqrt{D} = 2\sqrt{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = 1 \pm \sqrt{10}$$

$$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{4} = 1 - \sqrt{10} \text{ (пост. кор.)}$$

проверка:

$$\sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3} = 1 - 2 \cdot 3$$

$$\sqrt{\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) + 4} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 3} = 1 - 6$$

$$2 - 3 = 1 - 6$$

$$-1 \neq -5$$

$$\Rightarrow x = 1,5 \text{ (пост. кор.)}$$

→ Ответ: решений нет.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение

- 1) A' - центр мал. окр.
- 2) ~~проведем~~ ~~точку~~

~~гипотенуза~~

т.к. $\triangle AOB$ - равнобедренный

$$\Rightarrow AE + BE = 17 \Rightarrow AO = OB = R = 8,5$$

$$\Rightarrow OA' = 8,5; OC = 4,5;$$

$$3) \text{ по т. Пифагора } AC = 4 \Rightarrow A'E = 4$$

$$4) \text{ проведем через } O \text{ прямую и } DE \Rightarrow \angle EE'O = 90^\circ$$

$$\angle DDE' = 90^\circ$$

т.к. прямые AE и касательная $ED \perp OE' \Rightarrow OE'ED$ - ~~прямоугольник~~

прямоугольник $\Rightarrow OE' = ED, \text{ но } OB = EE'$

$$5) \text{ по т. Пифагора } OA'^2 = A'E'^2 + E'O^2$$

$$\Rightarrow OA'^2 - (OD - A'E)^2 = OE'^2$$

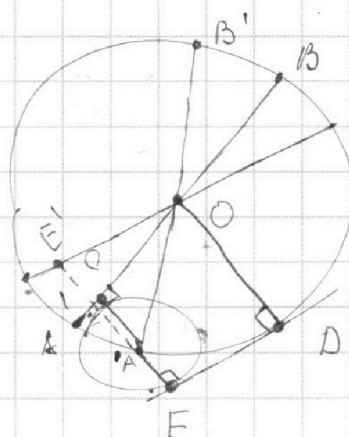
$$8,5^2 - (8,5 - 4)^2 = OE'^2$$

$$8,5^2 - (4,5)^2 = OE'^2$$

$$(4)(13) = OE'^2$$

$$OE' = 2\sqrt{13} \Rightarrow DE = 2\sqrt{13}$$

Ответ: длина касательной равняется $2\sqrt{13}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Составим уравнение.

$$1) \quad t_m + 2 = t_b \Rightarrow \frac{S}{V_m} + 2 = \frac{S}{V_b} \Rightarrow V_b \cdot S + 2 V_m V_b = (V_m - S) \cdot S$$

$$\Rightarrow 2 V_m V_b = S(V_m - V_b)$$

$$2) \quad \frac{V_b \cdot S}{V_m} + 96 = \frac{S V_m}{V_b} \Rightarrow V_b^2 \cdot S + 96 V_m V_b = S \cdot V_m^2$$

$$3) \quad \frac{S}{V_m + 6} + 1,25 = \frac{S}{V_b + 6} \Rightarrow (V_m \cdot S) + 6S = V_b \cdot S + 1,25 V_m \cdot V_b + 9,5V_b + 9,5V_m + 45 + 6S$$

$$V_b \cdot S + 2 V_m V_b = V_b \cdot S + 1,25 V_m \cdot V_b + 9,5V_b + 9,5V_m + 45$$

$$\Rightarrow V_m V_b = 10(V_m + V_b) + 60$$

из 2 уравнен. $96 V_m V_b = S(V_m - V_b)(V_m + V_b) = 96 V_m V_b$

$$2 V_m V_b (V_m + V_b) = 96 V_m + V_b \quad 48$$

$$\begin{cases} V_m + V_b = 48 \\ V_m \cdot V_b = 540 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 48 V_b - V_b^2 = 540$$

$$\Rightarrow V_b^2 - 48 V_b + 540 = 0$$

$$D_2 = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{24 + 6}{1} = 30$$

$$x_2 = \frac{24 - 6}{1} = 18$$

из 1 уравнен

мы найдем
что $V_m \neq V_b$

тогда $V_b = 18 \text{ км/ч}$ $V_m = 30 \text{ км/ч}$

Ответ: $V_b = 18 \text{ км/ч}$; $V_m = 30 \text{ км/ч}$.

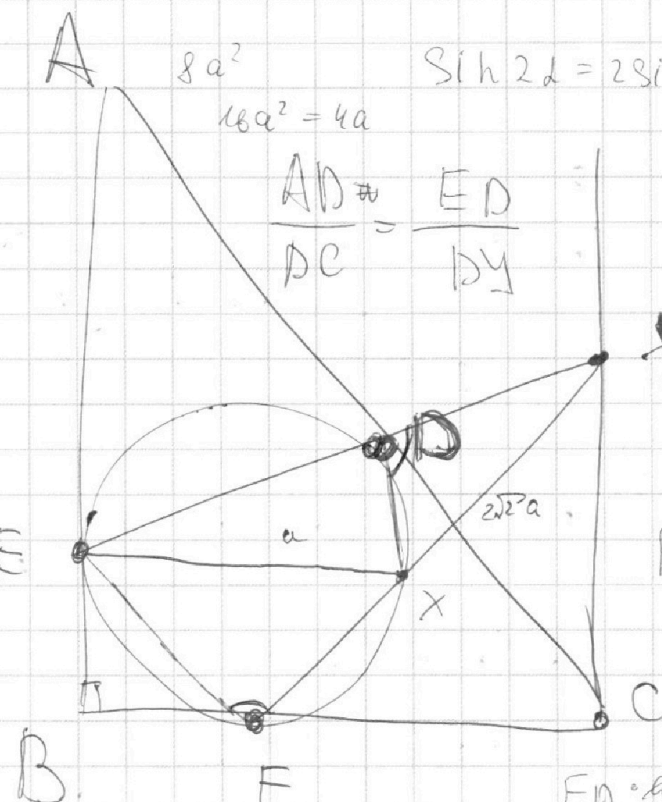
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8a^2$$

$$16a^2 = 4a$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

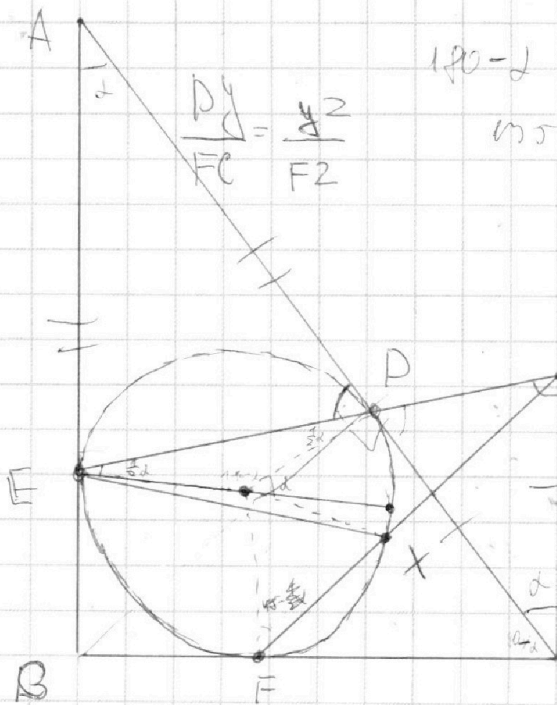
$$3a$$

$$2a$$

$$ED \cdot DY =$$

$$ED \cdot a\sqrt{2} =$$

$$ED \cdot DY = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot XF}{\sin \gamma} = \frac{4a^2}{\sin E}$$



$$\frac{DY}{FC} = \frac{YZ}{FZ}$$

$$120 - \alpha$$

$$135$$

$$EDX = 90^\circ$$

$$90 + \alpha$$

$$\angle ODC = 90^\circ$$

$$90 - \frac{1}{2}\alpha$$

$$DY = \frac{FC \cdot YZ}{FZ}$$

$$\frac{3\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{3a}$$

$$\frac{1}{2}\alpha$$

$$45 \quad 22,5$$

$$ED \cdot DY = YX \cdot XF$$

$$4a + 9a = 13a^2$$

$$\sqrt{13}a$$

$$\frac{135 + \alpha}{2}$$

$$90 + \frac{1}{2}\alpha$$

$$135 - \alpha$$

$$64,5 - \frac{1}{2}\alpha$$

$$22,5 + \frac{1}{2}\alpha$$

$$EX = 2\sqrt{2} \cdot YZ$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

$$45 = \frac{1}{2}\alpha$$

$$45 - \frac{1}{2}\alpha$$

$$a\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left(\frac{S}{V_m}\right) + 2 = \left(\frac{S}{V_b}\right)$$

$$V_b \cdot \frac{S}{V_m} + 96 = V_m \cdot \frac{S}{V_b}$$

$$\frac{S}{V_b + 6} + 1\frac{1}{5} = \frac{S}{V_b + 8}$$

$$\frac{20}{5} = 4,5$$

$$\frac{10}{3}$$

$$\frac{V_b \cdot S + 96 V_m}{V_m} = \frac{S \cdot V_m}{V_b}$$

$$V_b^2 \cdot S + 96 V_m V_b = S \cdot V_m^2$$

$$S(V_b^2 - V_m^2) = -96 V_m V_b$$

$$S(V_m^2 - V_b^2) = 96 V_m V_b$$

$$S(V_m - V_b)(V_m + V_b) = 96 V_m V_b$$

$$S(V_m - V_b)(0,1 V_m V_b - 6) = 96 V_m V_b$$

$$2 V_m V_b (0,1 V_m + V_b - 6) = 96 V_m V_b$$

$$V_b^2 - 48 V_b + 540 = 0$$

$$D_2 = 24^2 - 540 = 36$$

$$\frac{S + 2 V_m}{V_m} = \frac{S}{V_b}$$

$$(V_b \cdot S + 2 V_m V_b) = V_m \cdot S$$

$$2 V_m V_b = S(V_m - V_b)$$

$$\frac{V_b \cdot S}{V_m} + 96 = \frac{S \cdot V_m}{V_b}$$

$$\frac{S + 1,25 V_m + 7,5}{V_m + 8} = \frac{S}{V_b + 6}$$

$$96 : 2$$

$$48$$

$$48$$

$$V_m \cdot S + 96 V_b = (V_b \cdot S + 1,25 V_m V_b + 7,5 V_b)$$

$$+ 96 V_b + 4,5 V_m + 45 =$$

$$V_b \cdot S + 2 V_m V_b = S V_b + 1,25 V_m V_b + 7,5 V_b + 4,5 V_m + 45$$

$$0,75 V_m V_b = 7,5(V_m + V_b + 6)$$

$$V_m V_b = 10(V_m + V_b + 6)$$

$$V_m V_b = 10 V_m + 10 V_b + 60$$

$$10(V_m + V_b + 6)$$

$$V_m - V_b = 540$$

$$V_m + V_b = 48$$

$$V_m = 48 - V_b$$

$$48 V_b - V_b^2 = 540$$



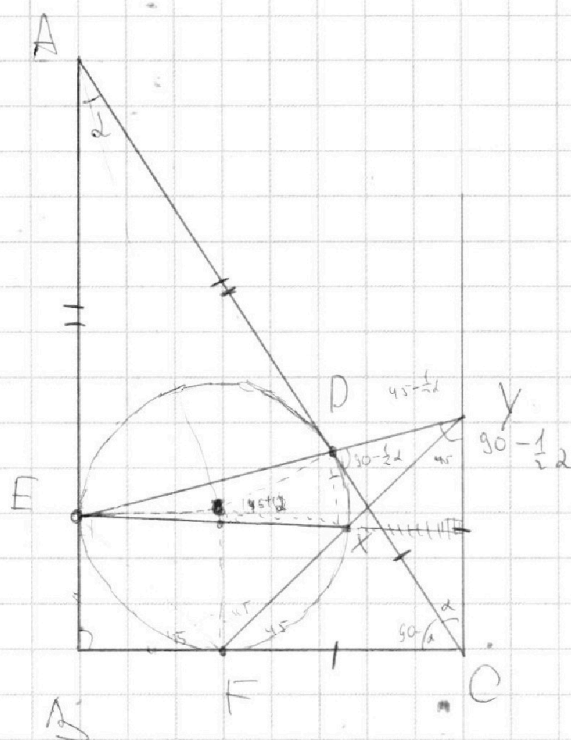
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



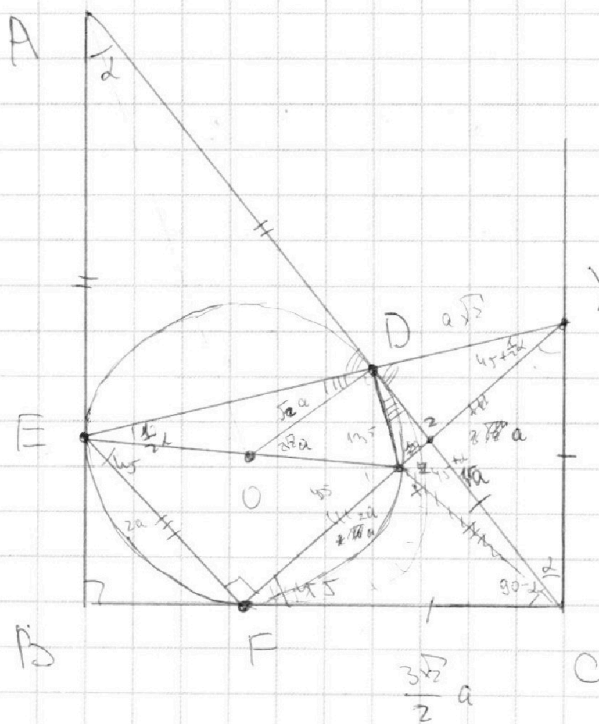
$$EX = 2\sqrt{2} \cdot XY$$

$$\angle EOD = 180 - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle OEA = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\Rightarrow \angle BED = 90 + \frac{1}{2}\alpha$$

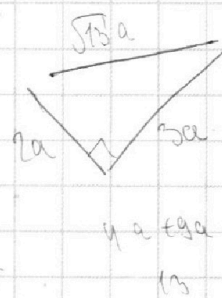
$$90 + 90 + 90 + 90 + \frac{1}{2}\alpha = 90 + \frac{1}{2}\alpha$$



$$ED \cdot DY = \sqrt{15}a = 2a^2$$

$$\sqrt{15} = 2a$$

$$a = \frac{\sqrt{15}}{2}$$



$$\frac{\sqrt{15}}{a} = \frac{3X}{DY} \quad DY = \frac{3}{\sqrt{15}}a$$

$$DY \cdot \sqrt{15} = 3a$$



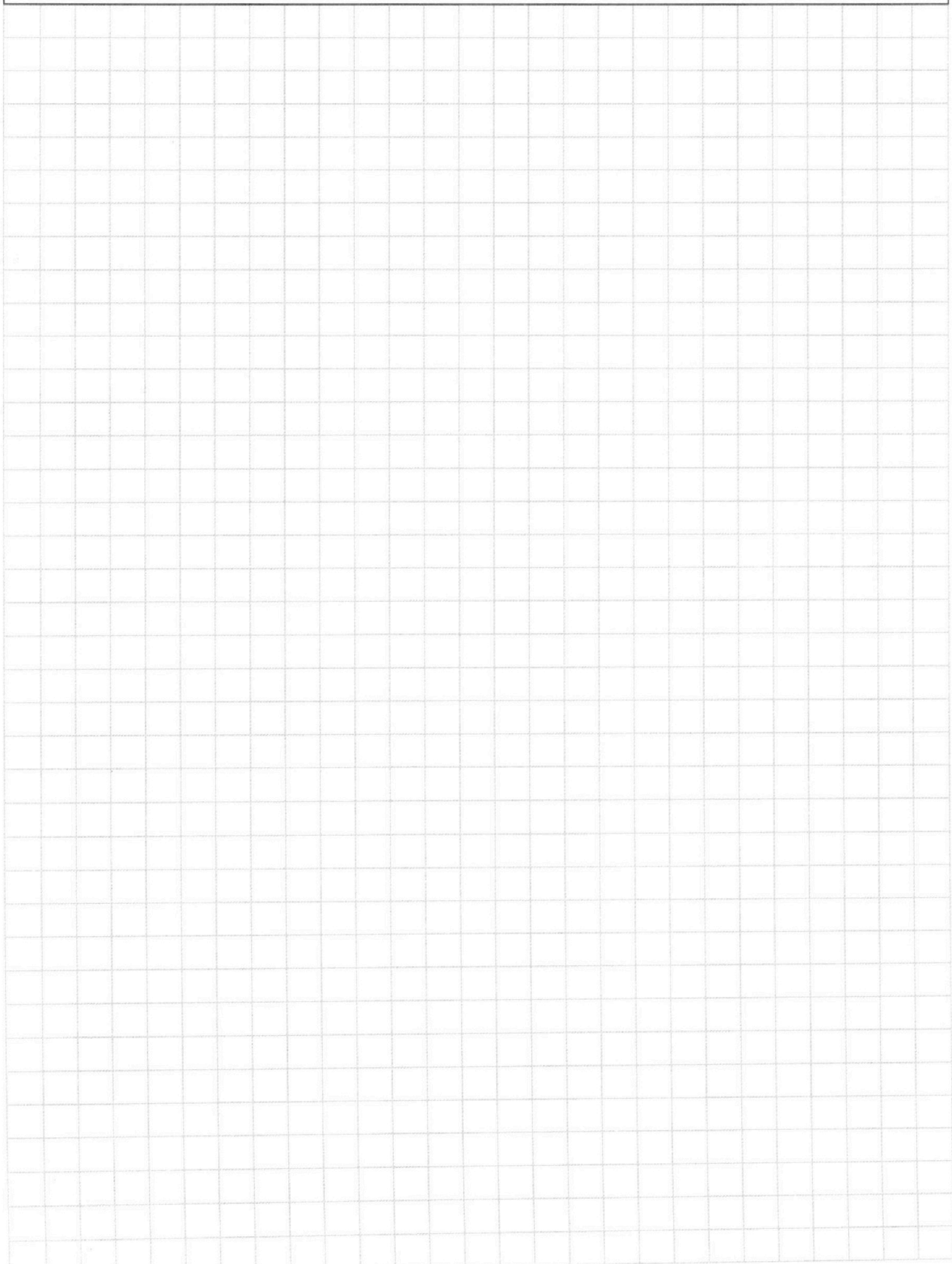
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{array}{r} 2,5 \overline{) 12} \\ \underline{5} \\ 6,5 \\ \underline{5} \\ 1,5 \\ \underline{1,5} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$a + b = c$$

$$\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$$

$$\frac{3b+a}{ab} = \left(\frac{2}{a+b} \right)$$

~~$$(3b+a)(a+b) = 2ab$$~~

$$3ab + a^2 + 3b^2 + ab = 2ab$$

$$a^2 + 4ab + 3b^2 = 2ab$$

$$a^2 + 2ab + 3b^2 = 0$$

$$9x^2 + 12xy + 12y^2 = 0 \quad |$$

$$3x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$$

$$5x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$$

$$3x^2 + 4xy = -4y^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 8,5^2 - 4,5^2$$

$$A^2 = 1 \quad (16)$$

$$x^2 = y^2$$

$$x(3x+4y) = -4y^2$$

-448

31

$$g = 85 \cdot 85$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8,5 \cdot 4,5$$

62

$$\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \approx 7,1$$

$$2,5(8,5-3,75)$$

8,5/

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3. 4.5. $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$

$(\sqrt{a^2 - b^2})(\sqrt{a^2 - b^2}) = (a - b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a + b)^2 - 4ab = (a + b)^2 - 4ab - 2ab = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$

$= (a + b - 2\sqrt{ab}) (a + b + 2\sqrt{ab}) - 2ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 4ab$

$= (a + b)^2 - 10ab$ $\sqrt{a^2 - b^2} = b$ $2x^2 + 2x + 4 + 2(4x - 1)(2x^2 + 2x + 4) + (4x - 1)^2$

$(a + b) \sqrt{a^2 - b^2} = b$

$(a + b) \equiv (a + b)^2$

$(a + b)^2 - 10ab$

$2 \cdot 5ab$

-5

$\sqrt{a} = \sqrt{ab} + b$

$4H + 10ab \equiv (a + b)^2$

$\sqrt{a^2 - b^2} = b$

$\sqrt{2 + 2 + 4 - \sqrt{2 - 1 + 2}} = 1 + 4x = a + b + 2b\sqrt{a + b} + b^2$

$a - \sqrt{4ab} = ab$

$2(4x - 1)\sqrt{1 - 16x^2 - 4x - 1 - 2x - 1}$

$3 = 3 - 16x^2 + 6x - 2$

$2x^2 - 3x + 4 \geq 0$

$4, 5$

$D = 9$

$2x^2 + 2x + 3 \geq 0$

$2(1 - 4x)\sqrt{16x^2 + 6x + 2}$

$1 - 4x \geq 0$

$-(b + 1) = 2\sqrt{a + b} (a + b = 2x)$

$b + 1 \leq 0$

$\sqrt{2x^2 + 2x + 4} + 4x = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$

$1 \leq 4x$

$x \leq \frac{1}{4}$

$2x^2 + 2x + 4 \geq 1 - 4x$

$b^2 + 2b + 1 = 2a + 2b$

$b^2 + 1 = 2a$

$2x^2 + 2x + 4 + 4x = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$ $(1 - 4x)^2 + 1 = 2(2x^2 + 2x + 3)$ $16x^2 - 8x + 2 = 4x^2 + 4x + 6$ $12x^2 - 2x - 6 = 0$