



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$abc: ac \Rightarrow abc: 3^{23} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc: 3^{23} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac: 3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 3^{54} \cdot 7^{72} \Rightarrow abc: 3^{28} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc: 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$a: 3^{28}$$

$$\Rightarrow abc: 3^{28} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc: 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$b: 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$9+14+5=28$$

$$abc: 3^{28}$$

$$abc: 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$c: 3^5$$

$$a: 3^{13}$$

$$29+13=42$$

$$abc: 7^{42}$$

$$c: 7^{29}$$

$$b: 7$$

$$\text{Ответ: } abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

поиск сократимости на $m \Rightarrow a+b : m \Rightarrow a \equiv -b$
 m

$$a^2-9ab+b^2 : m$$

$$(a, b) = 1$$

$$a+b : m$$

если $a : m$, то $b : m \Rightarrow$

$$a+b : m \text{ не может}$$

$$\Rightarrow (a, b) = m = 1 \Rightarrow a : m$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 270} \\ 270 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$a^2-9ab+b^2 : m$$

$$a^2-9ab+b^2 \equiv a^2 + 9a^2 + a^2 \equiv 11a^2 \equiv 0 \Rightarrow$$

 $m \quad m \quad m$

$$\Rightarrow \max m = 11$$

пример $a=10 \quad b=1$

$$\frac{10+1}{10^2-90+1} = \frac{11}{11} : 11$$

$$\text{ответ: } 11$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

$x \in (-\infty; +\infty)$

$$3x^2-5x+6=0$$

$$5 \pm \sqrt{25-72}$$

нет корней

$$3x^2+x+1$$

$$1-12$$

нет корней

$$\sqrt{3x^2+x+1} + 5-6x \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2+x+1} \geq 6x-5$$

$$3x^2+x+1 \geq (6x-5)^2$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} = \sqrt{3x^2+x+1} + 5-6x$$

$$3x^2+x+1=y$$

$$3x^2-5x+6 = 3x^2+x+1 + 5-6x$$

$$5-6x=z$$

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z$$

$$3x^2-5x+6$$

$$3x^2+x+1 \quad x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3 \cdot 25}{36} - \frac{25}{6} + 6 = \frac{3 \cdot 25}{36} + \frac{5}{6} + 1$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = 0$$

$$x > \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

$$x < \frac{5}{6} \Rightarrow \sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} > 5-6x$$

$$z \geq 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6} \pm z \quad z \leq 1-7x \leq \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z \Rightarrow y+z = z^2 + y + 2z\sqrt{y} \Rightarrow z - 1 + 2\sqrt{y} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{y} = 1-z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = 1+z-2z \Rightarrow 4 \cdot (3x^2+x+1) = 1 + 12x - 10 + 25 + 36x^2 - 60x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x^2 - 52x + 12 = 0 \Rightarrow 6x^2 - 13x + 3 = 0 \Rightarrow (6x-7)(x-1) \leq 0$$

$$\text{ответ: } \frac{5}{6}, \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

$$\frac{13 \pm \sqrt{169-72}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

К-Т. перпендикуляр из
I на OM

I - центр W

N - T. кас W

O - центр Ω MA - T. кас

$$AC=1 \text{ и } CB=25$$

$$1+25 = AC+CB = AO+OB = 2AO \Rightarrow AO=OB=13=OI$$

$$AO=13 \text{ и } AC=1 \Rightarrow CO=12$$

$\Rightarrow OI \perp AC$ - касат.

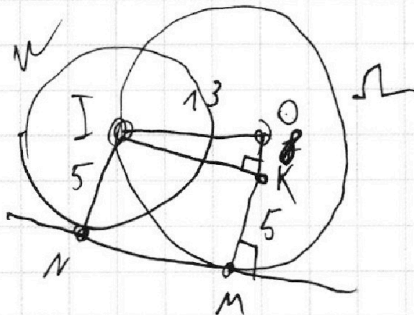
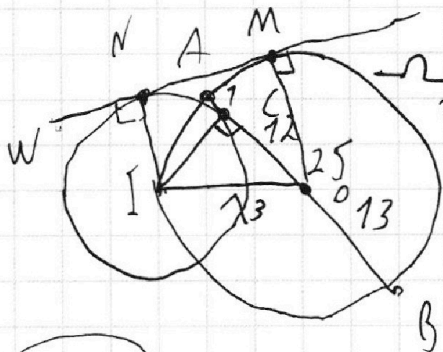
$$IO=13 \Rightarrow IC=5$$

$$\begin{aligned} IN=5 \\ OM=13 \\ OI=13 \end{aligned} \Rightarrow OK=8$$

$\triangle KOI$ - прямоугольный

$$\Rightarrow IK = \sqrt{169-64} = \sqrt{105}$$

ответ: $MN = \sqrt{85} \times \sqrt{105}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 5x - y &= 3z \\
 \frac{8}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{15}{z} \Rightarrow \frac{15x}{yz} = \frac{x}{xy} + \frac{8z}{xz} \\
 25x^2 &= y^2 + 9z^2 + 6yz \\
 \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= \frac{8z + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{25x^2 - 6z^2 - 6yz} = \frac{z \cdot (8z + 6y)}{y^2 + 3z^2} \\
 5x - y &= 3z \\
 \frac{8}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{15}{z} \Rightarrow \frac{5}{yz} = \frac{3}{xy} + \frac{1}{xz} \\
 \frac{8}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{15}{z} \Rightarrow x = \frac{3z + y}{5} \\
 8yz \neq xz &= 15xy \\
 40xz + 3z^2 + yz &= 45zy + 15y^2 \\
 3z^2 - 4yz + 15y^2 &= 0 \Rightarrow 3z^2 - 4yz + 15y^2 = 0 \\
 y^2 - 6yz - 5z^2 &= 0 \quad 15y^2 - 40yz - 65z^2 = 0 \\
 68z^2 + 86yz &= 0 \\
 \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= 9 \Rightarrow 25x^2 - y^2 - z^2 = 9 \cdot (y^2 + 3z^2) \\
 8z^2 + 6yz &= 9 \cdot (y^2 + 3z^2) \\
 x &= 1 \quad z = 3 \quad y = -4
 \end{aligned}$$

$25x^2 = y^2 + 9z^2 + 6yz$
 или $z < 0$ и $(8z + 6y) > 0$
 или $8 \cdot \frac{15y - z}{yz} < 0 \Rightarrow x < 0$
 $5x = 3z + y > 0$
 ??
 или $z < 0$, тогда $(8z + 6y) < 0$
 или $(8z + 6y) < 0$ тогда $z < 0 \Rightarrow z \cdot (8z + 6y) > 0$
 $3z^2 - 4yz + 15y^2 = 0$
 $8z^2 + 6yz \leq 0$
 $z \cdot (8z + 6y) \leq 0$
 $8z + 6y \leq 0$
 $y = -\frac{4}{3}z$
 $5x = \frac{5}{3}z$
 $z = 3x$
 $y = -4x$

Ответ: D

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



v - велос. ехал $x+14$

скорость v_B

M - мот. ехал x

скорость v_M

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ - путь

$$(x+1) \cdot v_B = 5$$

$$x \cdot v_M = 5$$

$$2 \cdot (v_M - v_B) = 49 \text{ км}$$

$$(x+1) \cdot v_M = x \cdot v_B + 49 \text{ км} \Rightarrow x \cdot v_M + 1 + 5 = 5 - v_B + 49 \text{ км}$$

время при $x \cdot v_B = 1 \text{ км}$ больше

$$(v_B + 7) \cdot t = 5$$

$$(v_M + 7) \cdot (t - 3 \frac{1}{4}) = 5$$

$$39 \text{ км} = \frac{39}{60} \cdot 4 = \frac{13}{20} \cdot 4 = 2.6$$

$$(x+1) \cdot (v_B = 5)$$

$$\Rightarrow v_B \cdot x + v_B = v_B \cdot x + 49 \cdot x \Rightarrow x \cdot v_B = \frac{49 \cdot x}{1}$$

$$x \cdot (v_B + 49) = 5$$

$$(49x + 7) \cdot t = 5$$

$$(v_B + 7) \cdot t = 5$$

$$x \cdot (49x + 49) = 5$$

$$(v_B + 56) \cdot (t - 3 \frac{1}{4}) = 5$$

$$(49x + 7) \cdot t = 5$$

$$(49x + 56) \cdot (t - 3 \frac{1}{4}) = 5$$

$$\Rightarrow 49x \cdot t + 7t = 49x \cdot t + 49x \cdot \frac{13}{20} + 56t - 56 \cdot 3 \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{20}$$

$$49x \cdot t + 7t = 49x \cdot t + 49 \cdot 0.6x + 56t - 56 \cdot 0.6$$

$$56 \cdot 0.6 - 49t = 49 \cdot 0.6x$$

$$8 \cdot 0.6 - 7t = 7 \cdot 0.6x \Rightarrow t = \frac{48}{70} + \frac{6}{10}x$$

$$(x+1) \cdot 49x = (49x+7) \cdot (\frac{48}{70} + \frac{6}{10}x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+1) \cdot 49x = S$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 49 \cdot 8 \\ \hline 392 \\ 49 \cdot 5 \\ \hline 245 \\ 49 \cdot 4 \\ \hline 196 \\ 49 \cdot 3 \\ \hline 147 \\ 49 \cdot 2 \\ \hline 98 \\ 49 \cdot 1 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$(x+1) \cdot 49x = (49x+7) \cdot \left(\frac{48}{70} + \frac{6}{10}x\right)$$

$$49x^2 + 49x = \frac{49 \cdot 48}{70} \cdot x + \frac{48}{10} + \frac{49 \cdot 6x^2}{10} + \frac{42}{10} \cdot x$$

$$x^2 \cdot \left(\frac{392}{5}\right) + x \cdot \left(49 - \frac{7 \cdot 24}{5} - \frac{21}{5}\right) - \frac{48}{10} = 0$$

$$x^2 \cdot 78.4 + x \cdot 19.8 - 4.8 = 0$$

$$x^2 \cdot 78.4 + x \cdot 19.8 - 4.8 = 0$$

получен отрицательный корень, так как $x > 0$

$$x = \frac{-19.8 \pm \sqrt{19.8^2 - 4 \cdot 78.4 \cdot (-4.8)}}{2 \cdot 78.4} = \frac{-19.8 \pm \sqrt{392.04 + 1505.28}}{156.8}$$

$$x = \frac{-19.8 + \sqrt{1897.32}}{156.8}$$

$$245 - 189 = 56$$

$$x^2 \cdot \left(49 - \frac{49 \cdot 3}{5}\right) + x \cdot \left(49 - \frac{7 \cdot 24}{5} - \frac{21}{5}\right) - \frac{48}{10} = 0$$

$$x^2 \cdot 9.8 + x \cdot (29.5 - 16.8 - 4.2) - 4.8 = 0$$

$$x^2 \cdot 9.8 + x \cdot 8.5 - 4.8 = 0$$

$$x^2 \cdot 49 + x \cdot 28 - 12 = 0$$

получен отрицательный корень, так как $x > 0$

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 49 \cdot (-12)}}{2 \cdot 49} = \frac{-28 \pm \sqrt{784 + 2352}}{98} = \frac{-28 \pm \sqrt{3136}}{98} = \frac{-28 \pm 56}{98}$$

$$S = \left(\frac{2}{7} + 1\right) \cdot \frac{2}{7} \cdot 49 = 14 + 14 = 28 \text{ км}$$

$$\text{ответ: } S = 28 \text{ км}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

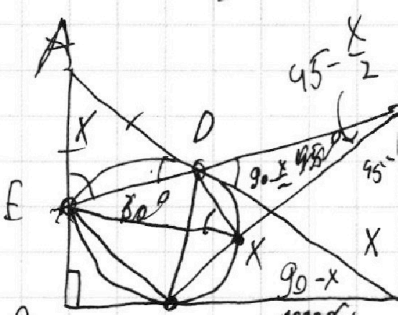
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{EX}{\sin 45^\circ} = \frac{XY}{\sin \angle EXY}$
 $\angle AED = 90 - \frac{x}{2}$
 $\angle EFB = \angle CFB = 45^\circ$
 $\angle EFD = 45 + \frac{x}{2} \Rightarrow \angle EDF = 45^\circ$



$\angle AED = \angle FDE$
 $\angle ADE = \angle FDE$
 $\angle EAD = \angle DCF$
 $\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle FDE$
 $\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{DE}{DF}$
 $\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{DE}{DF}$
 $\angle FCD = 45^\circ$
 $\angle EFD = 90^\circ$
 $\angle ADE = 90 - \frac{x}{2}$
 $\angle FDE = 45 + \frac{x}{2}$
 $\Rightarrow \angle EDF = 45^\circ$

$\angle FXD = \angle EFD = 90 - \frac{x}{2}$
 $\angle EDF = \angle FDE = 45^\circ$
 $\angle ADE = \angle FDE = 90 - \frac{x}{2}$
 $\angle FDE = 45^\circ$
 $\angle DCF = x$
 $\Rightarrow \angle XDY = 90^\circ$

$EX^2 = ED^2 + XD^2$
 $XY^2 = ED^2 + DY^2$

$2XY^2 = ED^2 + XD^2$

$XY^2 = XD^2 + DY^2$

$ED^2 = XD^2 + 2DY^2$

$\frac{ED}{DY} = 1 + 2 \frac{DY}{ED}$

$DX = \sqrt{ED \cdot DY}$

$\frac{ED}{DY} = z$
 $z = 1 + 2 \frac{1}{z}$
 $z^2 - 2z - 2 = 0$
 $z = 2$

$\Rightarrow \frac{ED}{DY} = 2 = \frac{AD}{DC}$

Ответ: $\frac{AD}{DC} = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 + 3z^2 = 5x - 7 = 3z \quad 5x = 3z + 7 \quad 25x^2 = 9z^2 + 49z + 49$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy \Rightarrow 8yz + \frac{(3z+7) \cdot z}{5} = 3 \cdot (3z+7) \cdot y \Rightarrow$$

$25x^2 - y^2 - z^2$ всё в квадраты, потому что $x, y, z > 0$

$$\frac{y^2 + 3z^2}{11} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{9z^2 + 6zy + y^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} \quad 8yz + xz = 15xy$$

$$6yz = \frac{3}{4}xz + \frac{45}{4}xy$$

$$2) \quad 40yz + \frac{(3z+7) \cdot z}{5} = 3 \cdot (3z+7) \cdot y$$

$$40yz + 3z^2 + 7z = 9z^2 + 21y$$

$$32xz = 3x^2 - 8z^2$$

$$3z^2 - 815y^2 = 4z^2 \Rightarrow 6zy = \frac{9}{2}z^2 + \frac{45}{2}y^2$$

$$\Rightarrow \frac{8z^2 + \frac{9}{2}z^2 - \frac{45}{2}y^2}{y^2 + 3z^2} = 1 \quad \frac{27z^2 - 45y^2}{2y^2 + 6z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{25x^2 - 6yz}$$

$$2, 1, 3 \quad 10 - x = 9 \quad 4 + 7 = 5$$

$$\frac{100 - 1 - 9}{28} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$$

$$25x^2 - y^2 - z^2 = y^2 + 3z^2$$

$$6yz = 3xz \quad 40yz + 3z^2 + 7z$$

$$25x^2 = 2x^2 + 4z^2 \quad 5z^2 = 0$$

$$x^2 - 6yz = 3z^2 + 4z^2 = 7z^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution for a geometry problem involving a square and its diagonals. The solution includes a diagram and various calculations.

Diagram: A square \$ABCD\$ with diagonals \$AC\$ and \$BD\$ intersecting at \$O\$. Points \$E\$ and \$F\$ are on the diagonals. Lines \$AE\$, \$BF\$, \$CE\$, and \$DF\$ are drawn. The diagram shows various angles and segments labeled with \$x\$ and \$y\$.

Calculations:

- $AE = AD$
- $DC = FC$
- $EB = BF$
- $\angle ADE = \angle YOC \Rightarrow \angle PCX = x = \angle EAD$
- $\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle DYC$
- $EX = \sqrt{2} \cdot XY$
- $\frac{EX}{XY} = \sqrt{2}$
- $\triangle AED \sim \triangle DYC \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{CY}$
- $AD = AE$
- $\triangle AED \sim \triangle DYC \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{CY}$
- $5x - \sqrt{3} = 3\sqrt{5}$
- $x = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{3}}{5}$
- $\angle CEF = 90 - \frac{x}{2}$
- $\angle YEF = 45 + \frac{x}{2} \Rightarrow \angle F.YD = 45$
- $\angle F.YD = 45$
- $\angle DEF = 45 + \frac{x}{2}$
- $\angle BEF = 45$
- $\angle PAE = 90 - \frac{x}{2}$
- $\angle DEF = 45 + \frac{x}{2}$
- $\frac{40}{3\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{5}}$
- $EX^2 = XY^2 + YE^2 - 2 \cdot YE \cdot XY \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $EX^2 = \frac{1}{2} EX^2 + YE^2 - 2 YE \cdot EX$
- $\frac{1}{2} EX^2 = YE^2 - 2 YE \cdot EX$
- $YE = EX + \sqrt{2} EX^2$