



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab : 3^{11} \cdot 7^{11} &\Rightarrow ab \geq 3^{11} \cdot 7^{11} > 0 \quad \left. \begin{array}{l} (\text{перемножим}) \\ a^2 b^2 c^2 \geq 3^{11} \cdot 7^{11} > 0 \end{array} \right\} \\ bc : 3^{18} \cdot 7^{16} &\Rightarrow bc \geq 3^{18} \cdot 7^{16} > 0 \\ ac : 3^{21} \cdot 7^{38} &\Rightarrow ac \geq 3^{21} \cdot 7^{38} > 0 \end{aligned}$$

↓

$$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{32} \quad \sqrt{7}$$

но n.r. a, b, c - натуральные, то:  $abc \geq 3^{25} \cdot 7^{33}$

Ответ:  $\boxed{abc \geq 3^{25} \cdot 7^{33}}$

Пример:

$$a = 3^7 \cdot 7^{11}$$

$$b = 3^4$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{27}$$

$$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{33}, \text{ но } ac \geq 3^{21} \cdot 7^{38} \Rightarrow ac : 7^{38} \geq abc : 7^{38} \geq$$
$$\Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

Ответ: ~~abc~~ миними  $\boxed{3^{25} \cdot 7^{38}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пусть  $a \equiv k$ , тогда  $b \equiv m-k \equiv -k$

тогда записано вторую строку сразу открыто:

$$\frac{k+(-k)}{k^2-bk(-k)+k^2}$$

$$k^2 + 8k^2 - k^2 = 8k^2 \text{ должно делиться на } m$$

$$10k^2 \equiv 0$$

если  $m > 10$ , то  $\text{HOD}(k^2, m) > 1$ , пусть  $\text{HOD}(k^2, m) = d$ ,

тогда при расщеплении первой линии на  $d$ : пусть это  $p$ , тогда:

$k:p$ ;  $m:p \geq m-k:p$ , но тогда  $\text{HOD}(a, b) \geq p$ , где  $p \geq 2$ ,

это противоречит условию, если  $\frac{a}{b}$  - непростая, то

$$\text{HOD}(a, b) = 1 \Rightarrow m \leq 10$$

Пример:

$$a=1 \quad \text{дробь } \frac{1}{9} \text{ - непростая}$$

$$b=9 \quad \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{1+9}{1-72+81} = \frac{10}{10}, \text{ можно сократить на 10}$$

$$\text{Однако: } m=10.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x \quad | \cdot x^2$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}\sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 + 16x^2 - 8x$$

$$12x^2 - 6x - 6 = 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}\sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$$6x^2 - 3x - 3 = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}\sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$$t = 2x^2 - x + 3,5, \text{ тогда } \text{отсюда!}$$

$$6x^2 - 3x - 3 = 3t - 13,5, \text{ а сюда!}$$

$$2x^2 - 3x + 4 = t - (2x - 0,5)$$

$$2x^2 + x + 3 = t + (2x - 0,5)$$

$$\text{тогда: } \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \sqrt{2x^2 + x + 3} = \sqrt{(t - (2x - 0,5))(t + (2x - 0,5))} = \\ = \sqrt{t^2 - 4(2x - 0,5)^2} = \sqrt{t^2 - 4x^2 + 4x - 0,25} = \sqrt{t^2 - 2t + 6,75}$$

$$\text{то } 3t - 13,5 = \sqrt{t^2 - 2t + 6,75} \quad |^2$$

$$9t^2 + 81t + 13,5^2 = t^2 - 2t + 6,75$$

$$8t^2 - 79t + 175,5 = 0 \quad | : 1$$

~~8t<sup>2</sup> - 79t + 175,5 = 0~~

$$8t^2 - 79t + 175,5 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$16t^2 - 158t + 351 = 0$$

$$D = 158^2 - 4 \cdot 16 \cdot 351 = 4(158^2 - 16 \cdot 351) = 4(6241 - 64) =$$

$$= 4 \cdot 625 = 50^2, \text{ продолжим на другом листе.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t_1 = \frac{158 - 50}{32} = \frac{108}{32} = \frac{27}{8}$$

$$t_2 = \frac{157 + 50}{32} = \frac{207}{32} = \frac{21}{2}$$

$$1) t = \frac{27}{8} = 2x^2 - x + 3,5 \quad | \cdot 8$$

$$27 = 16x^2 - 8x + 28$$

$$16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$(4x - 1)^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$2) \frac{21}{2} = \frac{13}{2} = 2x^2 - x + 3,5$$

$$6,5 = 2x^2 - x + 3,5$$

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{1+5}{4} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{1-5}{4} = -1$$

проверка - 1:

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{2+3+4} - \sqrt{2+1+3} = 1+4$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{4} = 5$$

$3 - 2 \neq 5$ , потому что корни раскрываются с плюсом

подставим 1,5:

$$\sqrt{4,5 - 4,5 + 4} - \sqrt{4,5 + 1,5 + 3} = 1 - 6$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{9} = -5$$

2 - 3 ≠ -5

подставим  $\frac{1}{4}$ :

$$\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{27}{8}} - \sqrt{\frac{27}{8}} = 0$$

||

Ответ:  $x = \frac{1}{4}$ .

Удвоенное выражение 2 корня, а т.к.

при выведении в квадрат мы не

учитываем, что под корнем и полу-

чили 4 корня, 2 из них не подходит

один корень был правильным

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x+2y = z \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$9x^2 + 4y^2 + 12xy = z^2 \quad 3yz + xz = zx^2$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - (9x^2 + 4y^2 + 12xy)}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$6x^2 + 8y^2 > -12xy$$

$$6x^2 + 8y^2 + 12xy > 0$$

$$\underbrace{6(x+y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0} > 0 \quad \text{с.m.g}$$

↓

$$\frac{-1(6x^2 + 8y^2 + 12xy)}{x^2 - 6y^2}, \text{ если } x^2 - 6y^2 > 0, \text{ то вся дробь} < 0$$

рассмотрим когда  $x^2 - 6y^2 \leq 0$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 3 + \frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \leq 3$$

Ответ: 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пусть  $x$ -расстояние от  $A$  до  $B$

$y$ -скорость мотоциклиста

$z$ -скорость велосипедиста, метра:

первое условие:  $1 \text{ час } 15 \text{ минут} = \frac{5}{4} \text{ часа}$

$$1) \frac{x}{y} + z = \frac{x}{z}$$

второе условие:

$$2) \frac{x}{y} \cdot z + 96 = \frac{2}{z} \cdot y$$

третье условие:

$$3) \frac{x}{y+6} + \frac{5}{4} = \frac{x}{z+6}$$

Перенесем их:

$$1) xz + 2yz = xy$$

$$2) xz^2 + 96yz = y^2x$$

$$3) 4(xz + 6x) + 5(y+30)(z+6) = 4(xy + 6x)$$

$$4xz + 24x + 5y^2z + 30yz + 30x + 180 = 4xy + 24x$$

$$4xz + 5y^2z + 30yz + 30x + 180 = 4xy$$

Выразим  $z$  из первого:

$$xy - xz = 2yz; x(y-z) = 2yz \quad z = \frac{2yz}{y-z}$$

Подставим во 2:

$$xz^2 + 96yz = y^2x$$

$$x(y^2 - z^2) = 96yz$$

$$x(y-z)(y+z) = 96yz$$

$$\frac{2yz}{y-z} (y-z)(y+z) = 96yz$$

$$2z^2 + 2y^2z = 96yz \quad | :yz \text{ m.r. } y \neq 0; z \neq 0$$

$$2z + 2y = 96$$

$$z + y = 48 \text{ запишем}$$

подстановка на лучшее значение:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{д) } y + z = 48$$

установим первое на 4:

$$4x z + 8 y z = 42y$$

и перенесем третье:

$$42z + 5y z + 32y + 30z + 180 = 4x y$$

приравняем:

$$4x z + 8 y z = 4x z + 5y z + 30y + 30z + 180$$

$$3y z = 30y + 30z + 180$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y z = 10y + 10z + 60 \\ y + z = 48 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y z = 10y + 10z + 60 \\ y + z = 48 \end{array} \right.$$

$$y = 48 - z, \text{ подставим:}$$

$$(48 - z) z = 480 - 10z + 10z + 60$$

$$48z^2 - z^2 = 540$$

$$z^2 - 48z + 540 = 0 \quad 540 = 2 \cdot 27 \cdot 10; 4 \cdot 540 = 16(135)$$

$$D = 48^2 - 4 \cdot 540 = 16(144 - 135) = 16 \cdot 9 = 12^2$$

$$z_1 = \frac{48 + 12}{2} = 30 \quad \text{Соответственно } y = 18$$

$$z_2 = \frac{48 - 12}{2} = 18 \quad 30$$

Когда мы выразили  $x$  два решения:  $y - z$

$$\text{м.д. } x > 0; y - z > 0 \quad y > z \Rightarrow y = 30; z = 18$$

проверим дальше:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 30$$

$$z = 18$$

$$x = \frac{2y+z}{y-z} = \frac{2 \cdot 30 + 18}{12} = \frac{32 \cdot 18}{6} = 30 \cdot 3 = 90$$

Ответ: 90 км



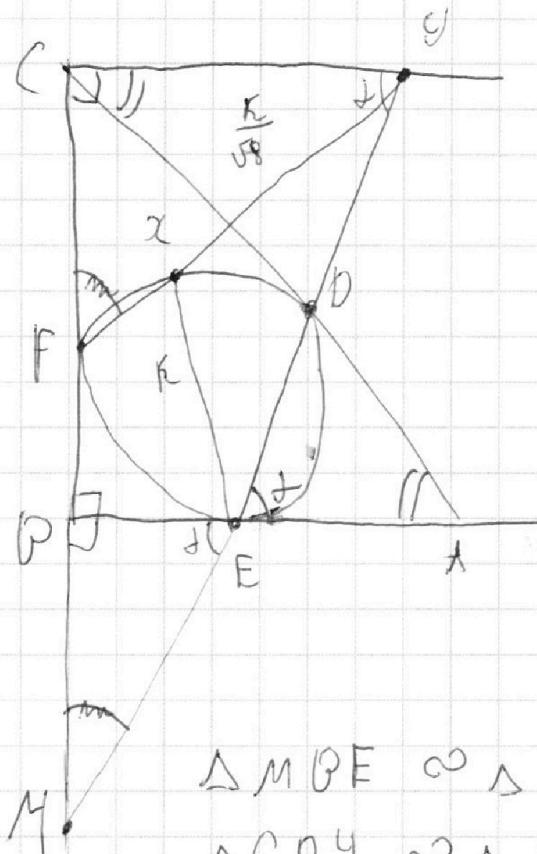
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x$ -расстояние

$y$ -скорость кат.

$z$ -скорость велосип.

$$S = V \cdot t$$

$$z = 30, 18$$

$$y = 18, 30$$

$$x = \frac{2 \cdot 340}{12} =$$

$$540 = 1$$

$$1) \frac{x}{y} + z = \frac{2}{z} \quad \frac{xy}{z} = x + 2y = \frac{75}{60} = 1 \frac{15}{60} = 1 \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 = \frac{540}{6} =$$

$$2) \frac{2 \cdot z}{y} + 96 = \frac{xy}{z} \quad \frac{96}{30} + z = \frac{90}{18} \quad 6 \cdot 8$$

$$3) \frac{x}{y+6} + \frac{5}{4} = \frac{x}{z+6} \quad \frac{3 \cdot 18 + 96}{36} = 150 \quad \frac{90}{36} + \frac{5}{4} = \frac{90}{24} = \frac{5}{4}$$

$$1) xz + zy \geq xy \quad z(x-y) = 2yz; z = \frac{2yz}{y-z}$$

$$2) xz^2 + 96yz = y^2x \quad 48 - z = \frac{10z + 60}{z-10}$$

$$4(xz + 6z) + (5y + 30)(z+6) = y(2y + 6x) \quad 48z - z^2 - 480 + 10z = 10z + 60 \\ z^2 - 48z + 540 = 0$$

$$4xz + 24x + 5yz + 30y + 30z + 180 = 4xy + 24x \quad D = 6 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 8 - 4 \cdot 540$$

$$3) 4xz + 5yz + 30y + 30z + 180 = 4xy = 4x^2 + 8yz$$

$$3yz = 30y + 30z + 180$$

$$4x^2 + 8yz$$

$$16(144 - 135) =$$

$$yz = 10y + 10z + 60$$

$$y(z-10) = 10z + 60$$

$$-16(g) =$$

$$\frac{zy^2}{y-z} + 96yz = \frac{2y^2z}{y-7}$$

$$y = \frac{10z + 60}{z-10}$$

$$= (3 \cdot 4)^2$$

$$4xz + 5yz + 30y + 30z + 180 = 4xy$$

$$2) 2(y-z)(y+z) = 96yz \quad z = \frac{48 \cdot 12}{2} = 288 \\ z^2 - 2yz + y^2 = 96yz$$

$$4x(y-z)$$

$$2y + 2z = 96$$

$$8yz = 5yz + 3xy + 20z^2 + 180$$

$$y+z = 48$$

$$y = 48 - z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{c} 5^2 \\ 5 \quad 8 \\ \hline 7 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 7 \\ \hline 2 \\ 5 \end{array}$$

ном. выше.

$$z + \frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2}$$

$$v_2 \cdot \frac{s}{v_1} + 96 = v_1 \cdot \frac{s}{v_2}$$

$$\frac{s}{v_1+6} + \frac{s}{4} = \frac{s}{v_2+6}$$

$$100x + 960 = \frac{40}{x} + 100x + 400$$

$$\frac{40}{x} = 560$$

$$40 = 560x$$

$$x = \frac{40}{560} = \frac{4}{56} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$y = 240$$

$$z = 10$$

$$20 + \frac{10}{14} = \frac{260}{14} \vee$$

$$\frac{100}{14} + 960 = \frac{2900}{14}$$

$$80 + \frac{40}{14} = \frac{40 \cdot 240}{14}$$

$$z + \frac{1}{14 \cdot 240} = \frac{1}{140}$$

$$20 + \frac{1}{240} = \frac{1}{10}$$

$$280 +$$

$$2x + 2z = xy$$

$$z^2x + 96z = y^2x$$

$$\frac{2}{y+6} + \frac{5}{4} = \frac{x}{z+6}$$

$$xz + 6x - \frac{5z + 30}{4} = xy + 6x$$

$$\frac{4}{x} = 560$$

$$40 = 560x$$

$$x = \frac{40}{560} = \frac{4}{56} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$2z + 30 = xy$$

$$8z + 4xz = 4xy = 4xz + 5z + 30$$

$$3z = 30$$

$$z = 10$$

$$20 + 10x = xy$$

$$100x + 960 = y^2x$$

$$40x + 50 + 30 = 4xy$$

$$4xy = 80 + 40x = 40x + 50 + 30$$

$$2xy + 10x = 100x + 960$$

$$100x + 960 = \left( \frac{40}{x} + 100 + \frac{400}{x} \right) x = \frac{40}{x} + 100x + 400$$

1240  
124  
267  
58  
84100  
84  
384  
96  
13440  
14  
1120  
1160  
124  
1160  
1160  
1160

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + 2y = z \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \quad 3yz + xz = 2xy$$

$$\frac{3x^2 - 14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 3 - \frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{-7y\sqrt{14-z}(y\sqrt{14+z})}{(x-4y\sqrt{6})(z+4y\sqrt{6})}$$

$$\frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \geq 0$$

$$1) 14y^2 \geq z^2 \quad \text{и} \quad x^2 \geq 6y^2 \\ 6y^2 \leq z^2$$

$$20y^2 \geq z^2 + x^2$$

$$12xy^2 \geq z^2 + x^2$$

$$+2xy - 6xy = -4xy$$

$$(5x+2y)(x-2y) - 4xy = z^2$$

$$2x - 2zy - 4xy = z^2 \\ -4xy = -6y^2 - 2x^2$$

$$36x^2 + 76y^2 + 48xy = 4z^2 \quad 34x^2 + 60xy$$

$$16y^2 \geq 12x^2 + 72xy$$

$$8y^2 \geq 5x^2 + 72xy$$

$$8y(y-x) \geq 52(x+y) + xy$$

$$\frac{2(-x - 8y - z)}{x^2 - 6y^2}$$

$$-9x^2 + 4y^2 - 12xy + 3x^2 - 4y^2 = \\ = -6x^2 + 4y^2 + 12xy$$

$$\frac{6x^2 + 8y^2 + 12xy}{6y^2 - x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc : 3^7 \cdot 7^1$$

$$7^1 = 2^7$$

0

$$\frac{18}{3} \cdot 7^6 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \frac{7^2 \cdot 7^6}{5} = \frac{7^{12}}{5}$$

$$a^2 - 8ab + b^2 - a - b = m$$

$$ac : 3^2 \cdot 7^3 \cdot 8^6 = D \neq 912$$

$$a^2 - 4a > 0 - a(2a+1) + b(2a+1)$$

$$a^2 b^2 c^2 \leq 3^50 \cdot 7^{65} = \frac{6}{4}$$

$$\begin{cases} 2 \\ 2x \\ 2x+3 \end{cases} - 2x$$

$$abc \leq 3^7$$

$$a/a - 4$$

$$a+b = m \cdot k$$

$$a^2 - 8ab + b^2 = m \cdot l$$

$$\frac{a+b}{(2a-2b)^2 - 3(a^2 + b^2)} \stackrel{1}{\rightarrow} \frac{10}{a^2 + b^2 - 72} = \frac{10}{810} 2x^2 - x - 6$$

$$(t-3)^2 = (t-2x+4)(t+2x+3)$$

$$(a-b) \leq 4ab$$

$$8ab \geq 8 \cdot k(-k) \geq -8k$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4} \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 + 16x^2 - 8x$$

$$12x^2 - 6x - 6 = -2$$

$$(k, m-k) = 1$$

$$6x^2 - 3x - 3 = -\sqrt{2x^2 - 3x + 4} \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$$k+m-k$$

$$(6x^2 - 3x - 3)^2 = (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3)$$

$$x^2 - (m-k)^2 - 8 + k + m + k = \\ = x^2 + 2 - 8x^2$$

$$36x^4 + 9x^2 + 9 + 36x^3 - 36x^2 + 18x = 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x + 8x^2 + \\ + 12x + 12$$

$$a^m$$

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0$$

$$b^m - k$$

$$x^2(32x^2 - 38) + 2(32x^2 - 38) - 3 - 152 = 0$$

$$k^2 + k^1 + 8k^2$$

$$(x^2 - 2)(32x^2 - 38) - 3(1 + 5x) = 0$$

$$-6k^4 = 0$$

$$10k^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + 2x + 3} = 1 - 4x$$

$$x^2 + 2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x$$

$$(-x)^2 + x^2 - 2x$$

$$(x+1)^2 - 2x^2 - 2x + 2$$

$$(x-2)^2 + x^2 + 5x - 1$$

$$t = -2x^2$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + 2x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + 2x + 3)} = 1 + 16x^2 - 8x^2 - 5,5 = 0$$

$$12x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$6x^2 - 3x - 3 = \sqrt{(2x^2 - 3x + 4) \cdot (2x^2 + 2x + 3)}$$

$$3t = 13,5$$

$$t = 2x^2 - 2x + 3,5$$

$$\sqrt{t^2 - (2x^2 + 2x + 3)} \cdot \sqrt{t^2 - (2x^2 - 3x + 4)} =$$

$$= \sqrt{t^2 - (2x^2 - 3x + 4)^2} =$$

$$D = 158 - 4 \cdot 16 \cdot 35,9$$

$$= t^2 - 4x^2 + 2x - 0,25 =$$

$$4(79^2 - 351 \cdot 16) =$$

$$= \sqrt{t^2 - 2t + 675} = 3t - 13,5$$

$$= 4 \cdot 625 = 50^2$$

$$\frac{158 - 5}{32} = \frac{208}{32} = \frac{104}{16} = \frac{52}{8} =$$

$$t_1 = \frac{158 - 5}{32} = \frac{208}{32} = \frac{104}{16} = \frac{52}{8} = t^2 - 2t + 675 = 9t^2 + 81t + (13,5)$$

$$= \frac{26}{4} = \frac{13}{2} = 8t^2 - 79t + 182,25 - 6,75$$

$$t_2 = \frac{158 - 5}{32} = \frac{208}{32} = \frac{104}{16} = \frac{52}{8} = 80t^2 - 740t + 1755 = 0$$

$$16t^2 - 158t + 351 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{8} - \frac{6}{8} + 4 = 3 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 4 =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{32}{8} = \frac{27}{8}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{27}{8} = \frac{27}{8}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 3 =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{24}{8} =$$

$$= \frac{27}{8} = \frac{3 \sqrt{3}}{2 \sqrt{2}}$$

$$2 - 3 = 1 - 6$$

$$t = 2x^2 - x + 3,5$$

$$1) t = \frac{23}{2} \quad 4,5 - 4,5 + 4$$

$$2) t = \frac{27}{8} \quad 4,5 + 1,5 + 3$$

$$2) \frac{27}{8} = 2x^2 - x + 3,5$$

$$\frac{27}{8} = 4x^2 - 2x + 7$$

$$27 = 16x^2 - 8x + 28$$

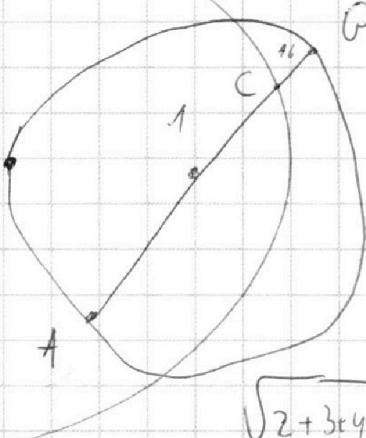
$$16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$D = 64 - 64 = 0$$

$$(4x+1)^2 = 0$$

$$4x = -1$$

$$x = -\frac{1}{4} = -0,25$$



$$\frac{18}{18+14} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$2 - 1 + 3$$

$$3 - 2 = 1 + 4$$

$$13 = 42 - 2x + 7$$

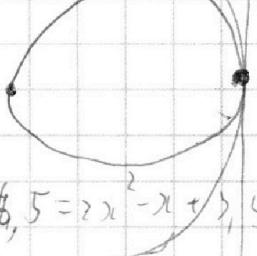
$$\sqrt{2+3+4} - \sqrt{2-1+3} = 1+4$$

$$3 - 2 = 1+4 \quad 4x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 4 = 1x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{32}{8} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{5}{2 \sqrt{2}} =$$



$$1) 6,5 = 2x^2 - x + 3,5$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{1+5}{4} = \underline{1,5}$$

$$x_2 = \frac{1-5}{4} = \underline{-1}$$

$$2+3+4 = 3$$

$$\sqrt{2-1+3} = 2$$

$$(4x+1)^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 + 2y^2 = 2 \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} \quad a = \quad a+b = 11$$

$$b = \quad b+c = 16$$

$$3y^2 + 2z^2 = 2xy \quad c = \quad a+c = 38$$

$$9x^2 + 4y^2 + 12xy = z^2 \quad 3x^2 + 4y^2 > 6xy \quad a+b+c = 38$$

$$-6x^2 - 8y^2 - 12xy \quad x^2 + y^2 > 2xy \quad c = 24$$

$$3x^2 + 3y^2 > 6xy \quad a = 11$$

$$3 - \frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \quad 10y^2 = 3 \cdot 34y^2 + 11xy \quad c =$$

$$x^2 < 6y^2 \quad 10y^2 > 9x^2 + 11xy \quad -11y^2 \sqrt{\frac{34}{3}} =$$

$$\text{или } 14y^2 - z^2 < 0 \quad 14y^2 > z^2 \quad 10 = 3 \cdot 34 + 11 \sqrt{\frac{34}{3}}$$

$$14y^2 > z^2 \quad 10y^2 > 9x^2 + 11xy \quad a+b = 11$$

$$54y^2 > 9x^2 = z^2 - 4y^2 - 11xy \quad b+c = 18$$

$$54y^2 > z^2 - 11xy = 5 + 16y + 16x \quad a+b+c = 50$$

$$7y^2 > x^2 + y^2 > 2xy = 3y^2 + xy \quad c = 24 \quad b = 4$$

$$14y^2 > z^2 \quad 3y^2 + 6y^2 + 3x^2 + 2xy = 22y$$

$$14y^2 > 6y^2 + 2x^2 \quad 4 \cdot 3xy + 6y^2 + 3x^2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 14y^2 = z^2 \\ 3x + 2y = z \end{array} \right. \quad 10y^2 = 9x^2 + 11xy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = z \\ 3x^2 + 2z^2 = 22y \end{array} \right. \quad 12xy + 34y^2 - 11x^2 = 5x^2 + 11xy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \\ 3x^2 + 2z^2 = 22y \end{array} \right. \quad 34y^2 = 3x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{34y^2}{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

