



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$.

- [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
- [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Давайте посмотрим на минимальные возможные степени
3 и γ в abc .

$$\begin{cases} ab : 3^{11} \gamma^{11} \\ bc : 3^{18} \gamma^{16} \\ ac : 3^{21} \gamma^{38} \end{cases} \Rightarrow (abc) : 3^{11+18+21} \cdot \gamma^{38+16+11} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{50} \cdot \gamma^{65} \text{ (на самом деле} \\ \text{если } n^2 : a, \text{ где } a \text{ не квадратична} \Rightarrow \\ \Rightarrow n^2 : a^2 \text{)} \Rightarrow abc : 3^{25} \cdot \gamma^{33} \Rightarrow 0$$

\Rightarrow мин степень γ $= 25$, но $\gamma \neq$ мин степень $= 38$, так как $ac : \gamma^{38}$

Пример таких чисел a, b, c :

$$\begin{cases} a = 3^7 \cdot \gamma^{11} \\ b = 3^{14} (3^4) \\ c = 3^{14} \cdot \gamma^{27} \end{cases} \Rightarrow abc : 3^{25} \cdot \gamma^{38} \text{ (и это значит, что} \\ abc = 3^{25} \cdot \gamma^{38})$$

Ответ: $3^{25} \cdot \gamma^{38}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пример: $\frac{a}{2+11} = \frac{b}{12}$

$$\frac{2+11}{1-2 \cdot 11 \cdot 8 + 12 \cdot 1} = \frac{\cancel{13}}{\cancel{12}} = -\frac{13}{41} \text{ несократима} \Rightarrow m=1.$$

Но если вонре: взяли это максимум, то $a=3$ $b=4 \Rightarrow \frac{10}{-110} = -\frac{1}{10} \Rightarrow m=0+6$
деление не возможно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x \quad (=)$$

Обр: Немн. т.к. в обеих $\sqrt{D < 0}$.

также $x \in \frac{1}{3}$, т.к. $(-1)^2 > 7 - 4x, 4 + x + 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 = 16x^2 - 8x + 1 + (8x - 2)\sqrt{2x^2 + x + 3} + 2x^2 + x + 3 \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 4x = (8x - 2)\sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (\neq) \quad 4x(4x - 1) = 2(4x - 1)\sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (=) \quad x \neq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (\text{без. от умн. } x) \quad \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ отк.}$$

Ненулевым из-за умн. \Rightarrow Немн. эллиптическ. (кроме $\frac{1}{4}$, т.к. это исключено)

$$x = \frac{1}{4}: \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{6}{8} + 4} = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + 3} = 0 \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - \frac{5}{8}} - \sqrt{3 + \frac{3}{8}} = 0 \quad (=) \quad \sqrt{3 \frac{3}{8}} - \sqrt{3 \frac{3}{8}} = 0 \quad (=) \quad \text{исч.} \Rightarrow \frac{1}{4} \text{ кор.}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

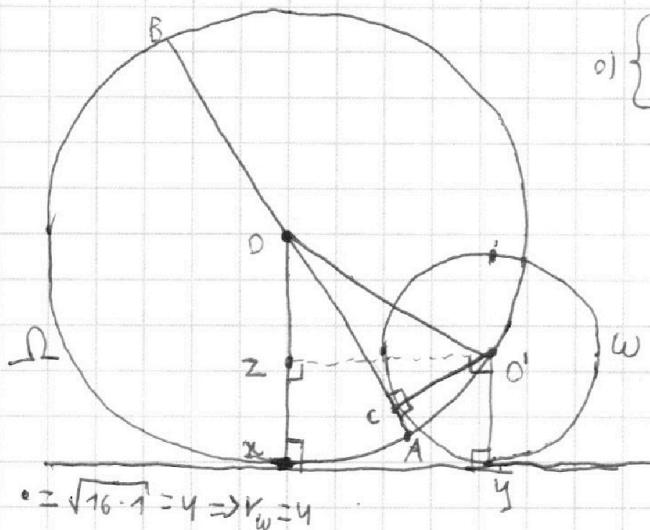
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0) \begin{cases} |AO| = 1 \\ |BC| = 16 \end{cases} \Rightarrow r_O = \frac{|AO| + |BC|}{2} = 8,5$$

1) угол $AO'B$ опирается на диаметр

$[AB]$ остр. $\angle \Rightarrow \hat{AO'B} = 90^\circ$

2) м.к. $\Delta AO'B$ - прям., а $[O'C]$ - её высота
(из-за касания), $|O'C| = \sqrt{|AO'| \cdot |BC|} =$

$$\bullet = \sqrt{16 \cdot 1} = 4 \Rightarrow r_W = 4$$

3) сделано 2 точки: x и y , что надо основание на сим. касательных Ω и W
из точек O и O' симб.

4) $m.z$ - осн. на $[Ox]$ из O'

$$5) xz \perp O'y - \text{прямокутник, м.к. } \hat{x} = \hat{y} = \hat{z} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} |xz| = |O'y| = r_W \\ |xy| = 120' \end{cases}$$

$$6) |zo'| = \sqrt{|Oo'|^2 - |oz|^2} = \sqrt{r_O^2 - (|ox| - |xz|)^2} = \sqrt{r_O^2 - (r_O - r_W)^2} = \\ = \sqrt{8,5^2 - 4,5^2} = \sqrt{(8,5 - 4,5) \cdot (8,5 + 4,5)} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

$$7) \text{из 5) } |xy| = |zo'| = 2\sqrt{13}.$$

Отвем: $2\sqrt{13}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Leftrightarrow \frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{z} \Leftrightarrow z = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$\begin{cases} z = 3x+2y \\ z = \frac{2xy}{3y+x} \end{cases} \Rightarrow 3x+2y = \frac{2xy}{3y+x} \Leftrightarrow x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3y \pm \sqrt{9y^2 - 8y^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\therefore \Rightarrow x = \frac{-3y \pm y}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y & 1) \\ x = -2y & 2) \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x = -y \\ z = -y \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

$$2) \begin{cases} x = -2y \\ z = -4y \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4.$$

$$4 > \frac{2}{5}$$

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

t_g - время, при котором велосипедист прошел S , S - путь от А к В

$t_m - t$, при котором мотоциклист прошел S при v_m .

$$1) \sqrt{v_g} \cdot t_g = v_m \cdot t_m = S$$

$$2) t_m + 2 = t_g$$

$$3) \sqrt{v_g} \cdot t_m + 96 = v_m \cdot t_g$$

$$3) \frac{S}{\sqrt{v_g} + 6} = \frac{S}{v_m + 6} + 75$$

система ур. с 5 уравнениями и 5 переменными,
его можно решить.

$$\begin{cases} \sqrt{v_g} \cdot t_g = v_m \cdot t_m = S \\ t_m + 2 = t_g \\ \sqrt{v_g} \cdot t_m + 96 = v_m \cdot t_g \\ \frac{S}{\sqrt{v_g} + 6} = \frac{S}{v_m + 6} + 75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{v_g} \cdot t_g = v_m \cdot t_m = S \\ t_m + 2 = t_g \\ \sqrt{v_g} \cdot t_g - 2\sqrt{v_g} = v_m \cdot t_g \\ \frac{S}{\sqrt{v_g} + 6} = \frac{S}{v_m + 6} + 75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{v_g} \cdot t_g = v_m \cdot t_m = S \\ t_m + 2 = t_g \\ S - 2\sqrt{v_g} + 96 = S + 2\sqrt{v_g} \\ \frac{S}{\sqrt{v_g} + 6} = \frac{S}{v_m + 6} + 75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{v_g} \cdot t_g = v_m \cdot t_m = S \\ t_m + 2 = t_g \\ \sqrt{v_g} = 48 - \sqrt{v_g} \\ \frac{S}{\sqrt{v_g} + 6} = \frac{S}{54 - \sqrt{v_g}} + 75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{v_g} \cdot t_g = v_m \cdot t_m = S \\ t_m + 2 = t_g \\ \sqrt{v_g} = 48 - \sqrt{v_g} \\ 56 - \sqrt{v_g} = \sqrt{v_g} + 6 + 75(\sqrt{v_g} + 6)(56 - \sqrt{v_g}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{v_g} \cdot t_g = (48 - \sqrt{v_g})(t_g - 2) = S \\ t_m + 2 = t_g \\ \sqrt{v_g} = 48 - \sqrt{v_g} \\ 56 - \sqrt{v_g} = \sqrt{v_g} + 6 + 75(\sqrt{v_g} + 6)(56 - \sqrt{v_g}) \end{cases}$$

$$\sqrt{v_g} \cdot t_g = 48t_g - 96 - S - 2\sqrt{v_g} \Leftrightarrow 2S = 48t_g - 96 - 2\sqrt{v_g} \Leftrightarrow S = 24t_g - 48 - \sqrt{v_g} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{v_g}(t_g - \sqrt{v_g}) = 24(t_g - 2) \Leftrightarrow \sqrt{v_g} = \frac{24(t_g - 2)}{t_g - 1} \Leftrightarrow \sqrt{v_g} - 24t_g = -144 - 24\sqrt{v_g} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_g(24 - \sqrt{v_g}) = 48 - \sqrt{v_g} \Leftrightarrow t_g = \frac{48 - \sqrt{v_g}}{24 - \sqrt{v_g}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 56 - \sqrt{8} - \sqrt{8} - 6 = \frac{75(\sqrt{8} + 6)(56 - \sqrt{8})}{50 - 2\sqrt{8}} \Leftrightarrow S = \frac{75(\sqrt{8} + 6)(56 - \sqrt{8})}{50 - 2\sqrt{8}}$$

u) $S = \frac{75(\sqrt{8} + 6)(56 - \sqrt{8})}{50 - 2\sqrt{8}} \Leftrightarrow \frac{75(\sqrt{8} + 6)(56 - \sqrt{8})}{50 - 2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}(48 - \sqrt{8})}{24 - \sqrt{8}} \Leftrightarrow$

$$u) \cancel{\sqrt{8} + 6} \cancel{54 - \sqrt{8}} + \cancel{75} \Leftrightarrow 54 - \sqrt{8} = \sqrt{8} + 6 + 75 \sqrt{8}$$

$$\sqrt{8} \cdot t_8 = (48 - \sqrt{8}) / t_8 - 2 \Leftrightarrow t_8 = \frac{48 - \sqrt{8}}{24 - \sqrt{8}}$$

$$\frac{S}{\sqrt{8} + 6} = \frac{S}{54 - \sqrt{8}} + 75 \Leftrightarrow 54 - \sqrt{8} = \sqrt{8} + 6 + \frac{75(\sqrt{8} + 6)(54 - \sqrt{8})}{S} \Leftrightarrow S = \frac{75(\sqrt{8} + 6)(54 - \sqrt{8})}{48 - 2\sqrt{8}}$$

$$S = \frac{(48 - \sqrt{8})\sqrt{8}}{24 - \sqrt{8}} = \frac{75(\sqrt{8} + 6)(54 - \sqrt{8})}{48 - 2\sqrt{8}} \Leftrightarrow 2\sqrt{8}(48 - \sqrt{8}) = 75(-\sqrt{8}^2 + 48\sqrt{8} + 324) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 96\sqrt{8} - 2\sqrt{8}^2 = -75\sqrt{8}^2 + 3600\sqrt{8} + 24300 \Leftrightarrow 43\sqrt{8}^2 - 3504\sqrt{8} - 24300 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8} = \frac{3504 \pm \sqrt{5182416}}{746} \quad (+\text{не подходит к } \sqrt{8} < 24)$$

$$S = \frac{\sqrt{8}(48 - \sqrt{8})}{24 - \sqrt{8}} = \frac{3504 - \sqrt{5182416}}{746} \left(48 - \frac{3504 - \sqrt{5182416}}{746} \right)$$

↑
 $24 = \frac{3504 - \sqrt{5182416}}{746}$

Ответ:

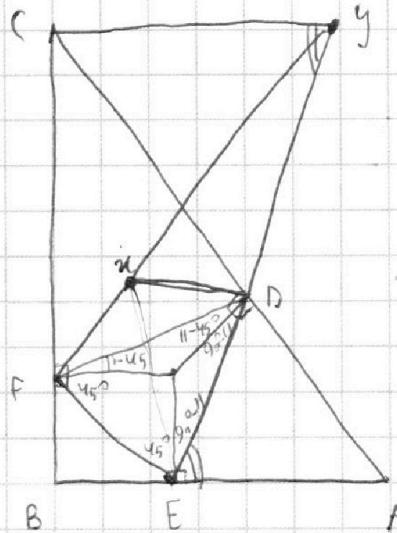


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.



$$11F\hat{x}^D = 45^\circ + 11$$

$$2) \chi^2_{FD} = \chi^2_{DF} = 67,5 - \frac{11}{2}$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

A

B

$$t_m = t_g + 2$$

$$\sqrt{m} \quad \sqrt{g}$$

$$s_m = s_g$$

$$\sqrt{g} \cdot t_g + 2\sqrt{g} = s = \sqrt{m} \cdot t_g + 2\sqrt{m}$$

$$\sqrt{g} \cdot t_m + 96 = \sqrt{m} \cdot t_g$$

$$\frac{s}{\sqrt{g}+6} = \frac{s}{\sqrt{m}+6} + 75$$

$$\sqrt{g} \cdot t_m$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ - 54 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ - 54 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ - 54 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\sqrt{g} \cdot (t_g + 2) = \sqrt{g} \cdot t_g + 2$$

$$75(\sqrt{g} + 6)$$

$$(75\sqrt{g} + 450) / 1$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 3 \\ \hline 17 \\ - 12 \\ \hline 29 \\ - 2 \\ \hline 292 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 232 \\ \overline{)24300} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24300 \\ - 292 \\ \hline 218700 \\ + 48600 \\ \hline 2673600 \\ - 2095600 \\ \hline 5782416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3504 \\ \overline{)3504} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3504 \\ - 3504 \\ \hline 0 \\ + 10016 \\ 14520 \\ - 10512 \\ \hline 12248016 \\ - 1095600 \\ \hline 5782416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \overline{)48} \\ + 800 \\ \hline 302 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \overline{)324} \\ + 300 \\ \hline 24 \\ - 225 \\ \hline 24300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \overline{)746} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 7 - 4x \quad (\Rightarrow) \quad \sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (\Leftarrow)$$

$$(\Leftarrow) \quad 2x^2 - 3x + 4 = 1 - 8x + 16x^2 + 2(1 - 4x)\sqrt{2x^2 + x + 3} + 2x^2 + x + 3 \quad (\Leftarrow)$$

$$(\Leftarrow) \quad 16x^2 - 4x = 2(4x - 1)\sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (\Leftarrow) \quad \frac{4x(4x - 1)}{4x - 1} = 2\sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (\Leftarrow) \quad \frac{-3+9}{4x-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(\Leftarrow) \quad 2x = \sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (\Leftarrow) \quad 4x^2 = 2x^2 + x + 3 \quad (\Rightarrow) \quad 2x^2 - x - 3 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \boxed{\frac{3}{2}, -1}$$

$$(\Leftarrow) \quad 2x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + x + 3} + 2x^2 + x + 3 = 7 - 8x + 16x^2 \quad (\Leftarrow)$$

$$(\Leftarrow) \quad 4x^2 - 76x^2 - 4x^2 - 8x + 2x + 7 - 7 = -2\sqrt{2x^2 + x + 3} \quad (\Leftarrow)$$

$\boxed{[-1; \frac{3}{2}]}$

$$(\Leftarrow) \quad 72x^2 - 6x - 6 = -2 \quad (\Leftarrow) \quad -6x^2 + 3x + 3 = \sqrt{\dots} \quad (\Leftarrow)$$

$$(\Leftarrow) \quad -6x^2 + 3x + 3 = \sqrt{4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x + 3x^2 + 4x + 12}$$

$$\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12}$$

$$(-6x^2 + 3x + 3)(-6x^2 + 3x + 3) = 36x^4 - 18x^3 - 18x^2 - 18x^3 + 9x^2 + 9x - 18x^2 + 9x + 9$$

$$\begin{array}{r} \cancel{6} \\ \underline{-} \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{-} \end{array} \quad 4 - 116 + 49$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \underline{-} \end{array}$$

$$54 - 116 + 49$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{-} \end{array}$$

$$36x^4 - 36x^3 - 27x^2 + 18x + 9$$

↓

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x + 3 = 0$$

$$32x^2(x^2 - x) - 23(x^2 - x) - 75x^2 - 3 = 0$$

$$(x^2 - x)(32x^2 - 23) - 75x^2 - 3 = 0$$

