



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{12} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{(15+17+23)} \cdot 7^{(11+12+39)} = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

П.к. $a^2 b^2 c^2$ - квадрат (или abc), то все степени в разложении всех его простых делителей четны, и при этом п.к. $a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$ то степени в разложении $a^2 b^2 c^2$ на простые ≥ 56 , а $7 - \geq 68$. $\Rightarrow abc : 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{\frac{68}{2}} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{12} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

П.к. $a^2 b^2 c^2$ - квадрат (или abc) то степени в разложении простых

чисел в его разложении четны $\Rightarrow (a^2 b^2 c^2)_2 \geq 56$
 $\Rightarrow (abc)_2 \geq 28, (abc)_7 \geq 34 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ п.к. ≥ 14 .

Пример, когда достигается равенство:

да. Но при этом $abc : ac : 7^{34} \Rightarrow (abc)_7 \geq 34$
 Значит, $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$
 Пример, когда достигается равенство:
 $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{12}$
 $\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$
 Ответ: $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2 Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократился на m ,

то и $\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b}$ сократился на m .

$$\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} \Rightarrow$$

$\frac{-9ab}{a+b}$ должно делиться сократилось на m . П.к. $(a,b)=1$,

то $(ab, a+b)=1 \Rightarrow$ Если что и сокращается

в числителе, то только ~~в знаменателе~~ в знаменателе

в множитель $9 \Rightarrow m \leq 9$. Пример:

$$a=7, b=2 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5}$$

Ответ: $\max(m)=9$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 $\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$

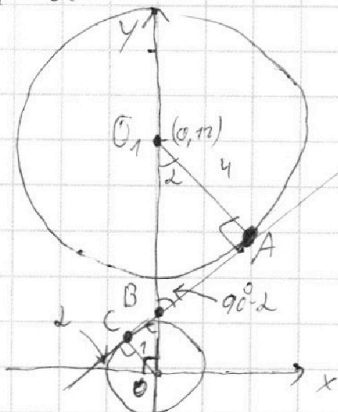
$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$

на координатной плоскости Oxy это две окружности, одна с центром в $O(0,0)$ с радиусом 1 и другая с центром в $C(0,12)$ с радиусом 4. Все точки из области между этими двумя окружностями.

① - прямая вида $y = -ax + 8b$, и если нужно

чтобы имели либо 2 решения, нужно чтобы эта прямая была одной из касательных к окружностям, т.к. пересечений у прямой и окружности - либо 0, либо 1 (случай касания) либо бесконечно много.

1 сл. Если касательная внутренняя:



Пусть O и C - центры окружностей, A и B - точки касания (касания кас), B - точка пересечения прямой $ax+y-8b=0$ и Ox . Т.к. если прямая задана уравнением $y=kx$, то $k = \tan \alpha$, α - угол между прямой и Ox .

$\Delta O_1AB, \angle BO_1A = 2$ т.к. $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$ (кас)

(угол α в $\Delta = 90^\circ$) $= \angle CBA$ (как верт.) $\therefore \tan \alpha =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

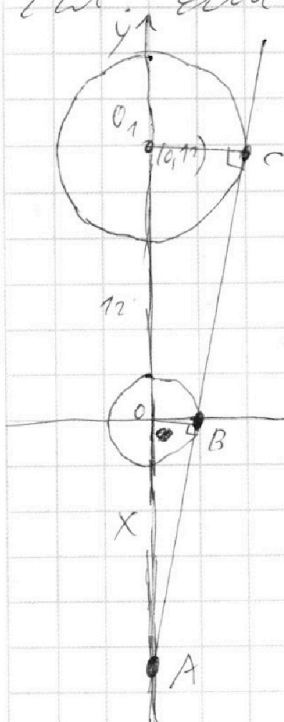
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолж.)
Пусть угол между касательной и $OX = \angle$
будет он острым, т.к. касательная смещена
вправо от центра OY , то если радиус
направлен влево, то и $-a$ - радиус,
т.е. $\tan \angle = -a$ т.к. $-a$ - координата x в
этой точке. Тогда $\angle CBO = 90^\circ$ по сумме
углов Δ , $\angle CBO = \angle O_1BA$ как верт. $\Rightarrow \angle BO_1A = \angle$ из
суммы углов ΔO_1BA . $\angle OBC$ как н/у Δ верт.
углов $\Rightarrow \angle COB = \angle$. $\cos \angle (\text{из } \Delta O_1BA) = \frac{y}{O_1B}$; $\cos \angle (\text{из } \Delta OBC)$
 $= \frac{1}{OB} \Rightarrow$ если $OB = x$, то $O_1B = 12 - x$, т.к. $OO_1 = 12$,
 $\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{y}{12 - x} \Rightarrow 4x = 12 - x \Rightarrow x = 2, y = 4 \Rightarrow \cos \angle = \frac{5}{12} \Rightarrow \angle = \arccos \frac{5}{12}$
 $\Rightarrow a = \pm \tan(\arccos \frac{5}{12})$, тогда $b = x \Rightarrow b = 0,6$
(т.к. b - координата точки пересечения
касательной и OY т.е. точки B)
т.е. если касательная внешняя.



Пусть $OA = x$, тогда $O_1A = 12 + x$. $\sin \angle =$
 $= \frac{OB}{OA} (\text{из } \Delta OBA) = \frac{O_1C}{O_1A} (\text{из } \Delta O_1CA) \Rightarrow$
 $\frac{1}{x} = \frac{y}{12 + x} = \sin \angle \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 = \frac{1}{\sin \angle}$
 $\Rightarrow a = \pm \tan(\arcsin \frac{1}{4})$ (т.к.
касательная внутренняя касательная
от центра $OY \Rightarrow$ если a - радиус от O и
 $-a$ радиус от O_1 тогда $B = y$ (т.к. абсцисса
той же координаты точки A)

Ответ: $a = \pm \tan(\arcsin \frac{1}{4})$
 $a = \pm \tan(\arccos \frac{5}{12})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$ax + y - 12 = 0$$

$$y = -ax + 12$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$\frac{12-x}{4} = \cos \angle$$

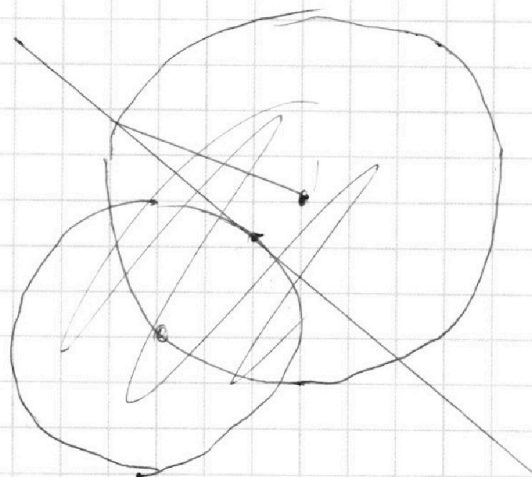
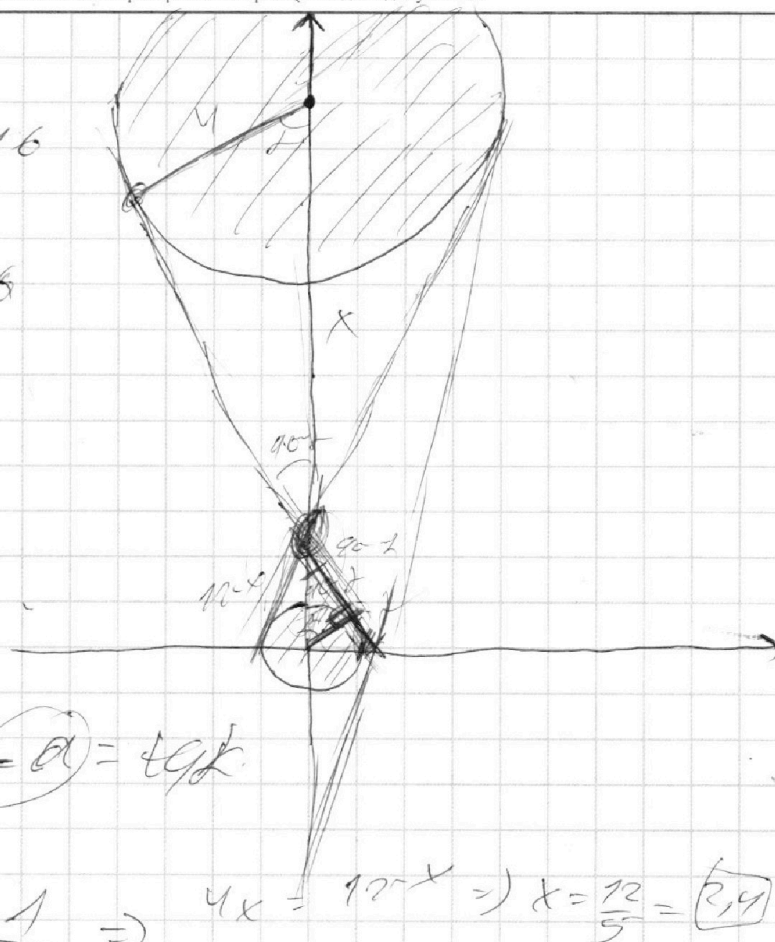
$$\frac{4}{12-x} = \cos \angle = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin \angle = \frac{12}{13} \Rightarrow \boxed{\tan \angle = \frac{12}{5} = -a}$$

$$a = \pm \frac{12}{5} \Rightarrow b = 2, 4$$

$$6x = \frac{12}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & \cancel{12x^4} + 726x^2 + 4\cancel{6x^3} - 12x^2 + 60x = \cancel{16x^4} + 12x^2 - \cancel{4x^3} - 4x^2 \\
 & - 24x + 24x^2 + 24x + 8 \\
 & 24x^4 + 54x^3 - \cancel{4x^3} - \cancel{60x} - 24x^2 - 60x + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 432 + 432 + 4 - 996 + 120 \\
 & 868 -
 \end{aligned}$$

$$432 \cdot 2^4 + 432 \cdot 2^3 = 432(4 + 2)$$

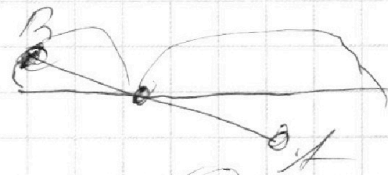
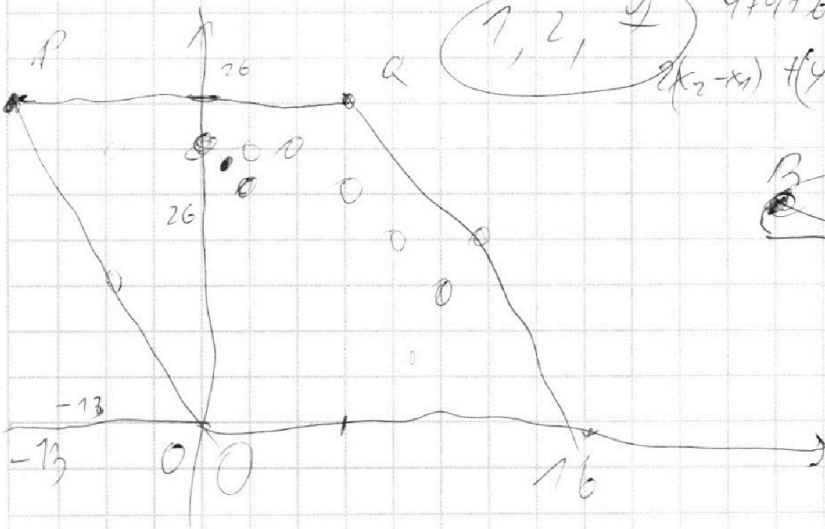
$$10368 + 4 -$$

$$9456 + 4 - 996 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 6x + 2 &= 0 \\
 6 \pm \sqrt{36 - 24} \\
 6
 \end{aligned}$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\begin{aligned}
 & (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14 \\
 & 1, 2, 1
 \end{aligned}$$



$$\left(\frac{5}{3}\right)$$

Если 7 точек
то 14-20
24-26-28

$$x_2 - x_1 \leq 16 - (-13) = \boxed{\leq 29}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 - y_1 &\leq 26 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4a - 4a + 4 = 4 \\
 & -4a + 4 = -45 \quad a+b = \frac{9ab}{a+b} > 9
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving two circles and a triangle.

Diagram: Two circles with centers O_1 and O_2 are shown. A triangle ABC is inscribed in the circle centered at O_1 . Point D is on the circle centered at O_2 . Lines connect O_1 to A, B, C and O_2 to D . Various points and lines are labeled with numbers and letters.

Handwritten Calculations:

- Top left: $249 \cdot 4$, 976 , 27 , 432 , 3436
- Top right: $AC = \frac{72}{7}$, $x = 7$
- Left side: $24 \cdot 4 = 96$, $76^2 \cdot 3$, 704 , 432 , 3436
- Center: $3x^2 - 6x + 2 = (1-x)^2 \sqrt{7x^2}$
- Right side: $3x^2 - 15x + 2$, $725 - 72 - 9$, 704 , $912 - 72 - 1254$, $10 + 36$
- Bottom: $3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1$, $3(2x^2 - x + 1) = 1 - 10x + 4x^2 + 2\sqrt{(x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$, $-3x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{\dots}$, $(3x^2 - 15x + 2)^2 = 4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$
- Bottom right: $225x^2 + 4 - 10x^2 + 60x = 4(9x^2 + 6x + 3x^2 - 10x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2)$



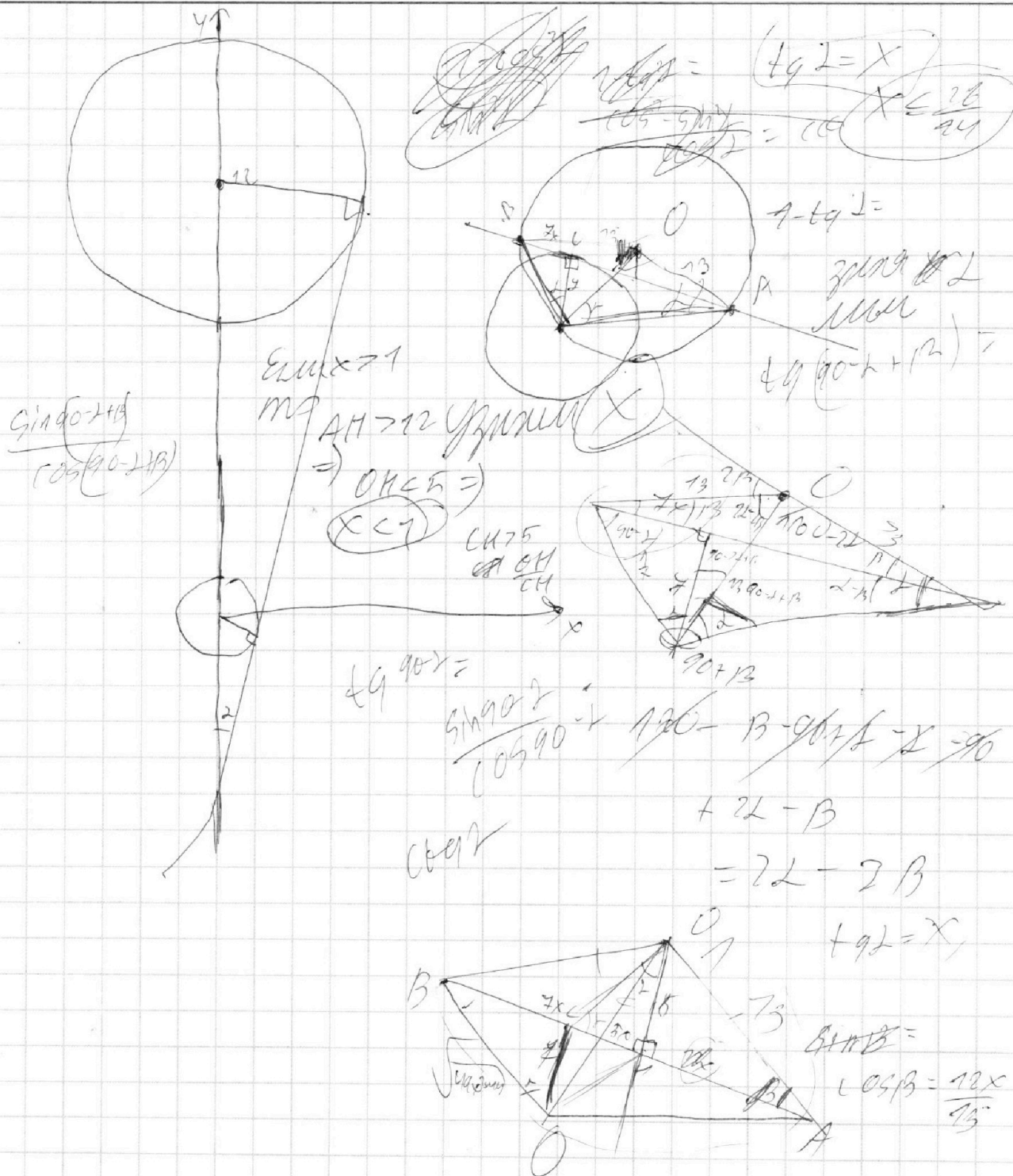
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

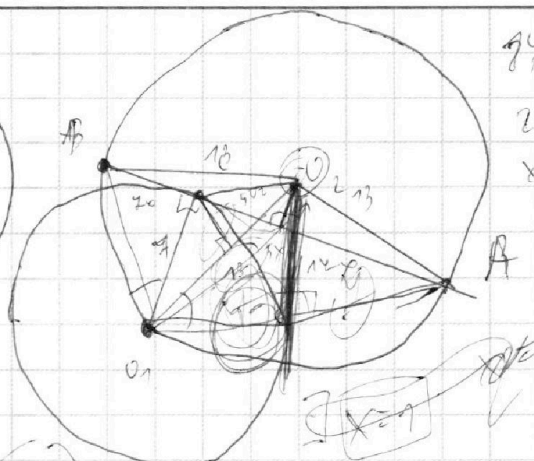
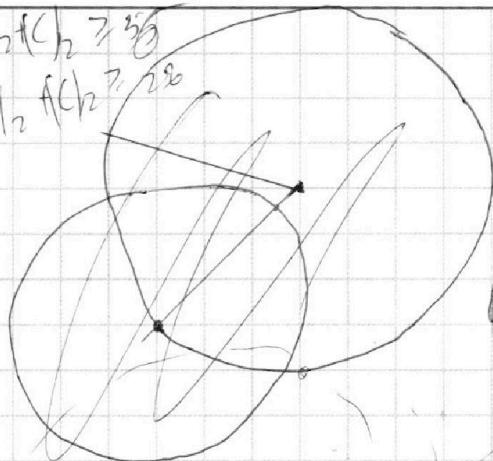
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



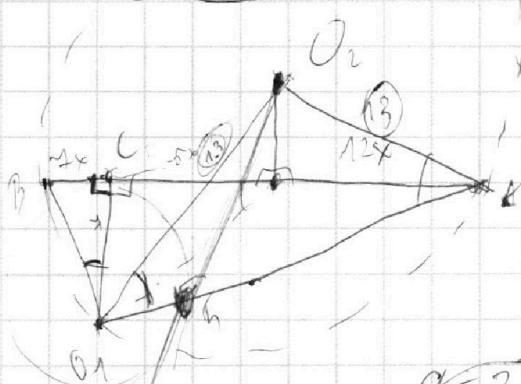
$$2ab + b + c \geq 35$$

$$(a+b) + b + c \geq 28$$



$$24x \leq 26$$

$$x \leq \frac{26}{24}$$



$$AB = ?$$

$$x = \frac{12}{O_1 C} = \tan \angle BO_1 C = \tan \angle U_2 O_1 A$$

$$\frac{15}{23} = \frac{55}{23}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7$$

$$a+b \geq 11$$

$$a+c \geq 16$$

$$b+c \geq 39$$

$$b \geq 39 - c$$

$$a + 39 - c \geq 11$$

$$a - c \geq -28$$

$$a + c \geq 16$$

$$2c \geq 46$$

$$c \geq 23$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$b = 29, c = 28$$

$$31 = 23 + 2b$$

$$41 = 2b$$

$$b = 6.5$$

$$\Rightarrow a = 9, 10, 11, 13$$

$$b = 11, 13$$

$$34 = 29 + 2b$$

$$29 \leq 34 + 2b$$

$$ab = 2^{15} \cdot 11$$

$$bc = (2^{14} \cdot 7 \cdot 16) \Rightarrow c = 2^{14}$$

$$a = 2^{10}$$

$$c = 2^{13}$$

$$b = 2^5$$