



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^1$$

$$bc: 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow (abc)^2: 2^{45} \cdot 7^{68} \Rightarrow$$

$$abc: 2^{23} \cdot 7^{34}$$

Пусть α, β, γ - степени, 2^4 делит

a, b и c соответ $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. α, β, γ

- неотрицательные тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta \leq 15 \\ \beta + \gamma \leq 14 \\ \gamma + \alpha \leq 23 \end{cases}$$

$$\beta + \gamma \leq 14$$

$$\gamma + \alpha \leq 23$$

β | Макс. число делителей
которого α

0	15
1	14
2	13
3	12
4	11
5	10
6	9

Макс. число делителей
которого γ

14
16
15
14
13
12
11

$\alpha + \beta \leq 23$. Значит $\min(\alpha + \beta + \gamma)$ достигается при $\beta = 5$, т.е. после β увеличивается α , а $\alpha + \beta \leq 23$

$\beta = 5$; $\alpha = 11$; $\gamma = 12$ - подходит, т.е. $\alpha + \beta + \gamma \leq 28$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Т.к. степени "7" не являются степенями "5", то переобозначим L, β, γ как степени "5" чисел a, β и c соотв. образом:

$$\begin{cases} L = \beta \cdot \gamma \cdot 11 \\ \beta + \gamma \geq 18 \\ L + \gamma \geq 39 \end{cases}$$

$$\beta + \gamma \geq 18$$

$$L + \gamma \geq 39$$

L	мин. число β такое которого γ	мин. число β такое что γ
0	11	33
1	10	38
2	9	37
3	8	36
4	7	35
5	6	34
6	5	33
7	4	32
8	3	31
9	2	30
10	1	29
11	0	28
12	0	27

При $L \geq 12$ сумма $L + \beta + \gamma$ увеличивается
не будет (к L приб. 1, из β убав. 1) значит
 $\min(L + \beta + \gamma)$ равно 39. ($L=12; \gamma=27; \beta=0$)

Ответ: $2^{28} \cdot 5^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a}{b}$ - несократимая $\Rightarrow a$ и b - взаимно простые числа.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$. Если $a+b:m$, то $a^2-7ab+b^2:m$ (цел., что $7ab$ сократима).
 $(a+b)^2-9ab = a^2-7ab+b^2$,

получается, что $7ab$ сократима, следовательно $9ab:m$. Если $m:a$ или $m:b$, то

$a+b:a$ или $a+b:b$, что невозможно,

т.к. a и b - взаимнопросты. Значит $m \leq 9$. Пример $m=9$:

$$a=4; b=5.$$

$$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1) D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$2) D = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

замечаем, что $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$,

т.к. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0$, а $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ или } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1$$

(не подходит по ОДЗ)

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 1. \text{ Найдем } x_0: x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \text{ Замечаем, что}$$

при $x < 0$ $3x^2 - 6x + 2 \geq 2 > 1$, а при $x > 0$

$3x^2 + 3x + 1 > 1$; при $x = 0$: $3x^2 + 3x + 1 = 0 + 1 = 1$ и

$$3x^2 - 6x + 2 = 2; \sqrt{1} + \sqrt{2} > 1 \text{ при } x \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \text{ или } x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$ - окр. с. у. в точке $(0; 0)$ и $R = 1$

$x^2 + (y - 12)^2 - 16$ - окр. с. с центром в т. $(0; 12)$ и $R = 4$

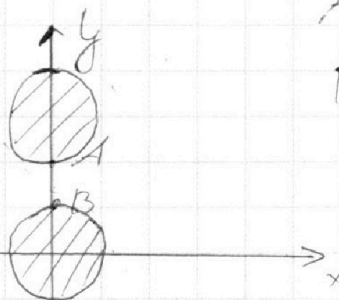
$y = -ax + 8b$ - прямая

$A(0; 8)$

Рассеиваясь идет

$B(0; 1)$

показе 2,



только если

$y = -ax + 8b$ - прямая касательная к кругам, иначе либо не будет касательной, либо бесконечно много, либо 1.

$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1; \quad x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + x(-16ab) + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(1 + a^2)(64b^2 - 1) = 0 \text{ (касательная)}$$

$$48a^2b^2 + (1 + a^2)(1 - 64b^2) = 0$$

$$48a^2b^2 + a^2 - 64a^2b^2 + 1 - 64b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть $k = -a$ и $8b = \frac{1}{b}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = kx + \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow x^2 + k^2 x^2 + 2kx \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} = 1 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(2k/b) + \frac{1}{b^2} - 1 = 0$$

$D = 4k^2 \frac{1}{b^2} - 4(1+k^2)(\frac{1}{b^2} - 1) = 0$ (усл. для
касания). $k^2 \frac{1}{b^2} - (\frac{1}{b^2} - 1 + k^2 \frac{1}{b^2} - k^2) =$
 $= -\frac{1}{b^2} + k^2 + 1$; ~~зависит~~ $k^2 = -(\frac{1}{b^2} + 1)$ $\frac{1}{b^2} = k^2 + 1$

$$\begin{cases} x^2 + (y-12)^2 = 16 \\ y = kx + \frac{1}{b} \end{cases} \quad k \neq 0, \text{ так как прямая, пер-} \\ \text{пендикулярная оси } OY \text{ не явл. касат. к окружности.}$$

$x = \frac{y - \frac{1}{b}}{k}$ $\frac{y^2 - 2y/b + \frac{1}{b^2}}{k^2} + y^2 - 24y + 128 = 0$

$$y^2 - 2y/b + \frac{1}{b^2} + k^2 y^2 - 24k^2 y + 128k^2 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + y(-24k^2 + \frac{1}{b^2}) + \frac{1}{b^2} + 128k^2 = 0$$

$D = 4(12k^2 + \frac{1}{b^2})^2 - 4(1+k^2)(\frac{1}{b^2} + 128k^2) = 0$

$$(12k^2 + \frac{1}{b^2})^2 - (1+k^2)(\frac{1}{b^2} + 128k^2) =$$

$$= (13k^2 + \frac{1}{b^2}) - (1+k^2)(\frac{1}{b^2} + 128k^2) =$$

$$= 13k^2 + \frac{1}{b^2} - (\frac{1}{b^2} + 128k^2 + k^2 + 128k^4 + k^2) =$$

Пусть $k^2 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$169a^2 + 26a + 1 - (123a^2 + 130a + 1) =$$
$$= 46a^2 - 104a = 0; \text{ т.к. } a \neq 0$$

$$46a = 104; \quad a = \frac{104}{46} = \frac{52}{23} = \frac{26}{11.5} = \frac{13}{5.75}$$

Сокращенная запись:

$$k^2 = \frac{13}{5}; \quad b^2 = \frac{18}{5}$$

Сокращенная запись:

$$a^2 = \frac{13}{5}; \quad 64b^2 = \frac{18}{5}$$

Заметим, что при $a = \pm \sqrt{\frac{13}{5}}$ существуют
b, являющиеся решением параметрической, при
которых ровно 2 решения

$$\text{Счет: } \pm \sqrt{\frac{13}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$a^2 - 6ab^2 - 12a^2b^2 + 1 = 0$$

$$b^2(-6a - 12a^2) + 1 - a^2 = 0$$

$$D_b = 4(6a + 12a^2)(1 - a^2)$$

Но $a=0$ не подходит; т.е. прямая, касаясь
ок не является общей касательной

$$x = \frac{8b-y}{a}$$

$$\left(\frac{8b-y}{a}\right)^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$\frac{64b^2 - 16by + y^2}{a^2} + y^2 - 24y + 144 - 16 = 0;$$

$$64b^2 - 16by + y^2 + y^2a^2 - 24a^2y + 128a^2 = 0$$

$$y^2(1+a^2) + y(-16b - 24a^2) + 64b^2 + 128a^2 = 0$$

$$D = (8b + 12a^2)^2 - 4(1+a^2)(64b^2 + 128a^2) = 0$$

$$4b^2 + 6a^2b + 3a^4 - 4(1+a^2)(4b^2 + 8a^2) = 0$$

$$4b^2 + 6a^2b + 3a^4 - 16b^2 - 32a^4 - 16a^2b^2 - 32a^2 = 0$$
$$-12b^2 - 23a^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

d	$g \cdot \tau$	$f \cdot \tau$	
0	11	38	
1	10	38	
2	9	34	
3	8	36	
4	7	35	
5	6	34	
6	5	33	
7	4	37	
8	3	31	
9	2	30	
10	1	29	40
11	0	28	39
12			
13	0	27	

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha + \beta + \gamma = 54 - \delta$$

$$\alpha = 11$$

$$\gamma = 23$$

$$\delta = 46 - \gamma$$

$$2\delta = 46$$

$$\delta = 23$$

$$\alpha = 16$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 50 - \alpha$$

$$\alpha = 18$$

$$\alpha = 15 - \beta$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = 39$$

$$\beta = 11$$

$$\alpha = 40$$

$$\alpha = 1$$

$$\gamma = 38$$

$$\beta = 10$$

$$\delta = 39$$

$$\alpha = 5$$

$$\beta = 6$$

$$\gamma = 39$$

$$\delta = 5$$

$$\alpha + \gamma = 38 - \beta - \alpha$$

$$\alpha + \gamma = 23$$

$$\beta + \alpha = 15$$

$$\alpha = 13 - \beta$$

$$\beta = 14 - \gamma$$

$$\gamma = 23 - \alpha$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha = 15$$

$$\gamma = 14$$

$$\beta = 1$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = 39$$

$$\beta = 10$$

$$\alpha = 1$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 54 - \delta$$

$$\alpha = 18$$

$$\gamma = 39$$

$$\delta = 54$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 37$$

$$\alpha = 14$$

$$\gamma = 16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~min завед. $L+B+T$~~ ~~(завед. $32-B$)~~

B	$L+B+T$	$32-B$
0	23	32
1	24	31
2	25	30
3	26	29
4	27	28
5	28	27
6	29	

Откуда видно, что при $B=5$ выполняется
необходимое усл. ($L+B+T=32-B$),
значит $L+B+T=28$ (подождем $L=11$; $B=5$; $T=12$)
т.к. степень „2“ не касается степеней
„4“, то переобозначим L, B, T как
степени „4“ числа a, b и c соотв.
чисел:

$$\begin{cases} L+B \geq 11 \\ B+T \geq 18 \\ T+L \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



М1

$$ab: 2^{15} \cdot 4^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 4^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$(abc)^2: 2^{45} \cdot 4^{68} \Rightarrow$$

$$abc: 2^{23} \cdot 4^{34}$$

Пусть α, β, γ - степени 2^k чисел
 a, b и c соотв., тогда

$$\alpha + \beta \geq 15$$

$$\beta + \gamma \geq 14$$

$$\gamma + \alpha \geq 23$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) \geq 45, \quad \alpha + \beta + \gamma \geq 23$$

~~Если $\alpha + \beta + \gamma = 23$, то $\beta = 0$; $\alpha = 15$; $\gamma = 8$~~

~~противоречие, значит $\alpha + \beta + \gamma \geq 24$~~

~~$\alpha = 11$; $\beta = 5$; $\gamma = 17$~~

~~т.е. $\beta = 0$; $\alpha = 15$; $\gamma = 8$~~

~~$\beta = 0$; $\alpha \geq 15$~~

~~$\alpha + \beta + \gamma \geq 32$~~

~~$\gamma \geq 14$~~

$\alpha + \beta + \gamma \geq 32 - \beta$, при этом $\alpha + \gamma \geq 23 \Rightarrow$

$\beta \leq 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 4^4$$

$$bc: 2^{14} \cdot 4^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$(abc)^2: 2^{45} \cdot 4^{68}$$

$$abc: 2^{23} \cdot 4^{34}$$

~~abc~~

$$2^2$$

$$2^{11}$$

$$2^{25}$$

$$2^5$$

$$2^8$$

$$2^{12}$$

$$abc \geq 2^{24} \cdot 4^{39}$$

$$2 \leq \beta = 11$$

$$\beta \leq \gamma = 18$$

$$2 + \gamma = 39$$

$$2^{11}$$

$$2 + \beta + \gamma \in [23, 24]$$

$$\beta \leq 4 \quad 28$$

$$2 \geq 11$$

$$2 + \gamma \geq 32 - 2\beta$$

$$2 + 2\beta + \gamma \geq 32$$

$$2 + 2\beta + \gamma \geq 32$$

$$5 + 4 \geq 14$$

$$3 + 8 \geq 1$$

$$2 \geq 14$$

$$11 \geq 1$$

$$2(2 + \beta + \gamma) = 49$$

$$17 \geq 13$$

$$17 \geq 14$$

$$-11 \leq -1$$

$$ac: 4^{39}$$

$$4^{45}$$

$$\begin{cases} 2 + \beta = 33 \\ \beta + \gamma = 18 \\ 2 + \gamma = 40 \end{cases}$$

$$\gamma - \beta = 8$$

$$\gamma = 8 + \beta$$

$$2 + \beta = 10$$

$$\beta = 5$$

$$2 = 24$$

$$\gamma = 13$$

$$(24) \quad 30 \quad 29$$

$$2 + \beta + \gamma = 21$$

$$\beta + \gamma \geq 23$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 1$$

$$\beta = 2$$

$$\beta = 3$$

$$\beta = 4$$

$$2 + \beta + \gamma \geq 29 - \beta$$

$$2 + \beta + \gamma \geq 54 - \beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$(abc)^2: 2^{45} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{\alpha} \cdot 7$$

$$b = 2^{\beta}$$

$$c = 2^{\gamma}$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$2\alpha + \beta + \gamma = 45$$

$$2\alpha + \beta + \gamma = 23$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \alpha = 23$$

$$a^2bc: 2^{50}$$

$$b^2ac: 2^{29}$$

$$c^2ab: 2^{57}$$

$$\gamma - \beta = 7$$

$$\gamma = 7 + \beta$$

$$2\beta = 10$$

$$\beta = 5$$

$$\gamma = 12$$

$$\alpha = 11$$

$$2\alpha + \beta + \gamma$$

$$2\alpha$$

$$\alpha + \beta = 11$$

$$\beta + \gamma = 18$$

$$\gamma + \alpha = 39$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\gamma = 28 + \beta$$

$$2\beta = -10$$

$$\beta = -5$$

$$\alpha = 16$$

$$\gamma = 27$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\gamma + \beta = 18$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$c \quad \alpha$$

$$\alpha \geq \gamma + \beta$$

$$\beta \geq 21 + \alpha$$

$$\gamma \geq 28 + \beta$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 7 \\ \hline 14 \\ 32-21 \\ \hline 11 \\ 32-11 \\ \hline 21 \\ 21-11 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 26 \\ 27 \\ 28 \\ 29 \\ 30 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$y = ax + 8b$$

$$x^2 + a^2 x^2 - 16axb + b^2 = 0$$

$$x^2(1+a^2) + x(-16ab) + b^2 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2-1) =$$

$$= 256a^2b^2 + 4(1+a^2)(1-b^2) =$$

$$= 256a^2b^2 + 4(a^2 - a^2b^2 + 1 - b^2) =$$

$$= 252a^2b^2 + 4a^2 - 4b^2 + 4 = 0$$

$$16 \cdot 16$$

$$16 \cdot 4$$

$$64$$

$$a^2(63b^2 + 1) - b^2 + 1 = 0$$

$$64a^2b^2 + a^2 - a^2b^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$63a^2b^2 + a^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$b^2$$

$$4; 12$$

$$0; 1$$

$$y = kx + b$$

$$\begin{cases} 12 = 4k + b \\ 0 = k + b \end{cases}$$

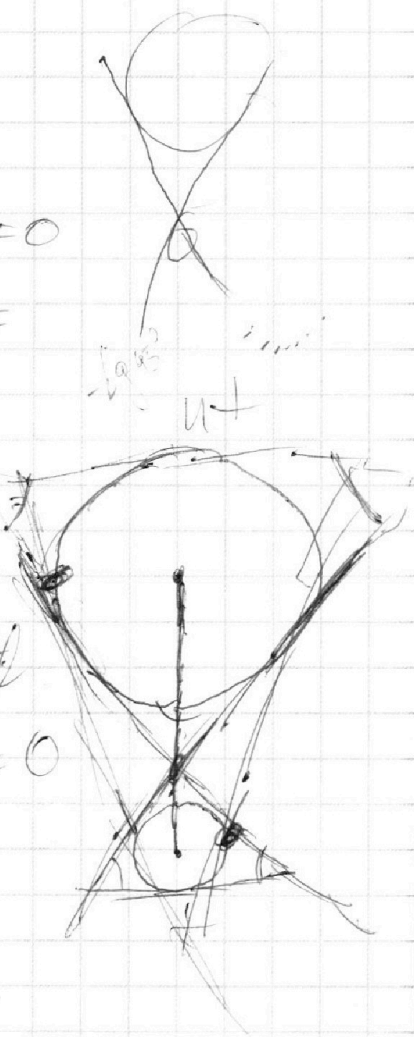
$$\begin{cases} 3k = 12 \\ 3b = 32 \end{cases}$$

$$32$$

$$k = 4 \quad b = -4$$

$$16 \cdot 4$$

$$y = 4x^2 - 4$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + b$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kxb + b^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(2kb) + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 4k^2 b^2 - 4(1+k^2)(b^2 - 1) = 0$$

$$k^2 b^2 - (b^2 - 1 + k^2 b^2 - k^2) = 0$$

$$k^2 - b^2 = 0$$

$$k^2 = b^2$$

$$y = kx + b; \quad x = \frac{y-b}{k}$$

$$x^2 + (y-kx)^2 = 1$$

$$\frac{y^2 - 2yb + b^2}{k^2} + y^2 - 2yk + 128 = 0$$

$$y^2 - 2yb + b^2 + y^2 k^2 - 2yk + 128k^2 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + y(-2b-2k) + b^2 + 128k^2 = 0$$

$$D = 4(b+k)^2 - 4(1+k^2)(b^2 + 128k^2) = 0$$

$$(b+k)^2 - (1+k^2)(b^2 + 128k^2) = 0 \quad b \neq 0$$

$$b^2(1+12k) - b^2(1+k^2) \cdot 128 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{QED 3: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 7 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 9x = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$D < 0$

$$36 - 8 \cdot 3 = 12$$

$$9x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$x_0 = 6$$

$$3x^2$$

$$\frac{3 - 6}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$-1,5x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq \sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 3x^2 - 6x + 7 \quad 3x^2 - 6x + 7 - 3x^2 - 3x - 1 =$$

$$9x \geq 1$$

$$= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 7} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$1. \text{ ч. } \leq 0 \quad \text{а} \quad \text{пр. ч. } \leq 0$$

$$-9x - 1$$

$$\frac{1}{9} - \text{корень}$$

$$3x^2 - 6x + 7 + 81x^2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$+ 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$

$$+ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x + 1 \quad \underline{6}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{2} + 2$$

$$18 \cdot \frac{1}{9} = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - 6x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 0$$

$$2\sqrt{\dots} = 3x - 6x^2 - 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{2} + 2 = ax + y - 8b = 0$$

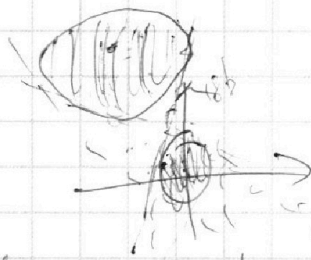
$$y = -ax + 8b$$

$$x < 0 \Rightarrow$$

$$x > 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$



$$(y_2 - y_1) = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$y = kx + b \quad x = \frac{y-b}{k}$$

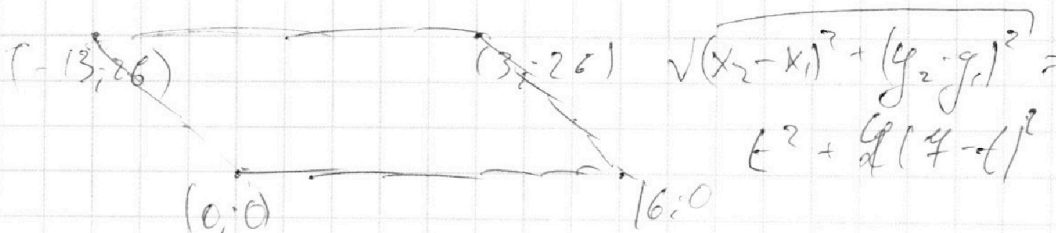
$$x^2 + (kx + b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + k^2x^2 + 2kxb + b^2 = 1$$

$$\frac{y^2 - 2yb + b^2}{k^2} + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$\Delta = 0$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$



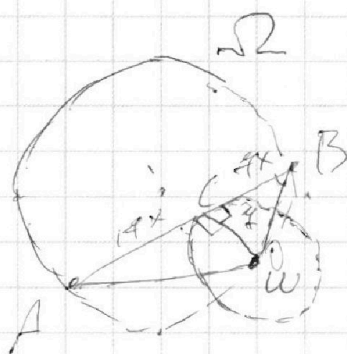
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

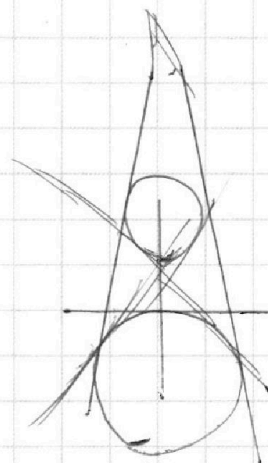
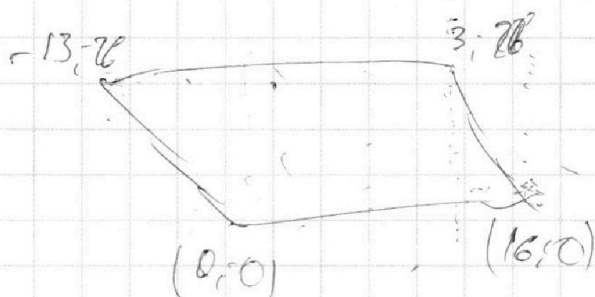
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R \cdot R =$$

$$R = 13 \quad w = 4$$

$$AB = \sqrt{t^2 + (14 - 2t)^2} = \sqrt{t^2 + 4(7 - t)^2} = \sqrt{t^2 + 4(49 - 14t + t^2)} = \sqrt{t^2 + 196 - 56t + 4t^2} = \sqrt{5t^2 - 56t + 196}$$



$$V_2 - V_1 = 1$$

$$V_2 - V_1 = 1$$

$$V_2 - V_1 = a$$

$$g_2 - g_1 = b$$

$$a \in [-29; 29]$$

$$b \in [-26; 26]$$

$$2a + b = 14$$

$$a = \frac{14 - b}{2} \Rightarrow b = 2c + 14$$

$$b = 2k$$

$$c + k = 7$$

$$a = 7 + k$$

$$a \in [-29; 29] \quad k \in [-13; 13]$$

24 решения