



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Числа a, b и c - числа вида $2^m \cdot 7^n$, где $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\neq$ стороны треугольника a, b и c

$\exists x_2$ - сторона a , y_2 - сторона b , z_2 - сторона c

Тогда $\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 14 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ x_2 + z_2 \geq 20 \end{cases}$, Равен. треугольн. случай: $\begin{cases} x_2 + y_2 = 14 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_2 + z_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 8,5 \\ y_2 = 5,5 \\ z_2 = 11,5 \end{cases}$. Т.к. $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то выберем

Ближайшие, натур. значения: $\begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 6 \\ z_2 = 12 \end{cases}$

$\neq$ сторон. треугольн. $\exists x_7 - a, y_7 - b, z_7 - c$

$\begin{cases} x_7 + y_7 \geq 10 \\ y_7 + z_7 \geq 17 \\ x_7 + z_7 \geq 37 \end{cases}$, Кратчайш. ст.: $\begin{cases} x_7 + y_7 = 10 \\ y_7 + z_7 = 17 \\ x_7 + z_7 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_7 = 15 \\ y_7 = -5 \\ z_7 = 22 \end{cases}$

$y_7 = -5$ не подх. Берем ближайш. удовлет. усл.: $y_7 = 0$ $\begin{cases} x_7 = 15 \\ y_7 = 0 \\ z_7 = 22 \end{cases}$

Тогда $(abc)_{\min} = 2^9 \cdot 2^6 \cdot 2^{12} \cdot 7^{15} \cdot 7^0 \cdot 7^{22} = 2^{27} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{27} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

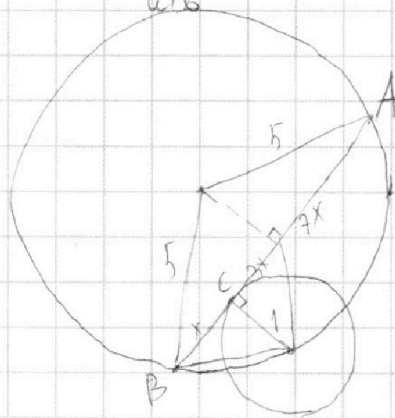
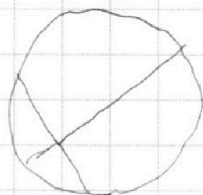
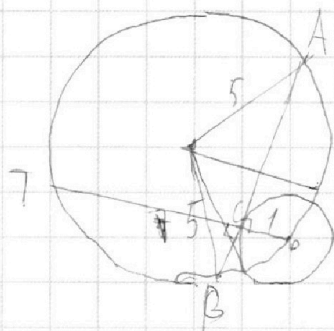
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \xrightarrow{\text{контр}} \frac{a^2-6ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b}$$



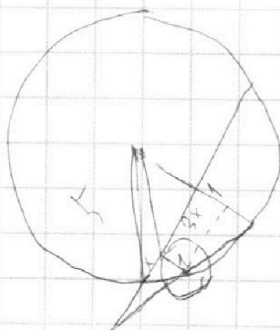
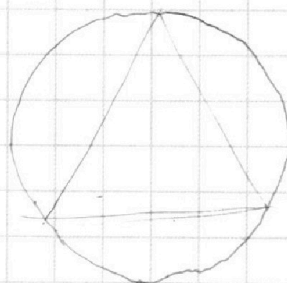
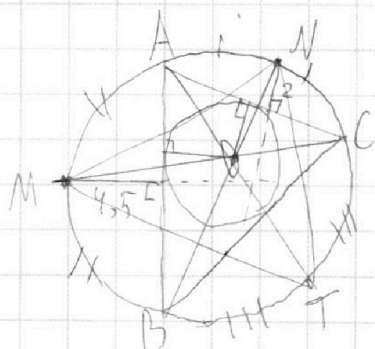
$$1x \cdot 7x = TC$$

$$OC \cdot TC = AC \cdot BC = 7x^2$$

$$\frac{OC}{AC} = \frac{CB}{TC}$$

$$\frac{1}{7x} = \frac{x}{TC}$$

$$1+9x^2+1+x^2=2+10x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

✗ $\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b}$. Для обратной связи m будем считать χ

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b}$$

Найдём max m для $\frac{8ab}{a+b}$. Оно будет max χ ,
если $\chi \mid (a^2 - 6ab + b^2)$ и $\chi \mid (a+b)$ $\Rightarrow$ $\chi \mid ((a+b)^2 - 8ab)$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} (a^2 - 6ab + b^2) : m \\ (a+b) : m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ((a+b)^2 - 8ab) : m \\ (a+b) : m \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 8ab : m$

1) Пусть $a : m$ и $b : m$ $m = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)$,
где p_n и q_n — простые множители a и b соответственно.
Тогда $8ab : m$, но $(a+b) \nmid m$, т.к. a и b — взаимно простые
 $(a : p_n, b : p_n)$

2) Если $m = 2^k \cdot (p_1 \cdot \dots \cdot p_n) \cdot (q_1 \cdot \dots \cdot q_n)$, где $k \in [1, 3]$, $\mathbb{N}$, то
 $8ab : m$ из-за 8 в числителе, но $(a+b) \nmid m$, опять же из-за m ,
 что 8 — некр., т.е. a и b — взаимно простые.

Заметим, что a и b не н.д. одновременно чётными (тогда a и b — чётные).
 Таким образом, в разложении m нет простых делителей a и b .
 1. a и b не н.д. одновременно чётными (иначе a и b — чётные).

2. Если $a : 2$ и $b \nmid 2$ (или наоборот), то $8ab$ — чёт., $a+b$ — нечёт., значит, не взаимно простые.

3. Если $a \nmid 2$ и $b \nmid 2$, то $a+b \nmid 2$ и может делиться на 8 (если $a \equiv 1, b \equiv 7$ или $a \equiv 7, b \equiv 1$) — в этом случае
 подходит $m = 8$, больше делить не мож. из-за 8 в числителе. Ответ: $m = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} \stackrel{N4}{=} 2-7x$$

$$] a = \sqrt{2x^2-5x+3}, b = \sqrt{2x^2+2x+1}. \text{ Тогда } 2-7x = a^2 - b^2$$

$$a-b = a^2-b^2 \Leftrightarrow a-b = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$1) a-b=0 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = -2 \\ D = 49 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$2) a+b=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = -4x^2+3x-3$$

$$\neq f(x) = -4x^2+3x-3, \text{ Дискриминант}$$

$$D = 9 - 48 < 0, \text{ Тогда } -4x^2+3x-3 \text{ всегда меньше нуля}$$

$$\text{Значит, } 2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = -4x^2+3x-3 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

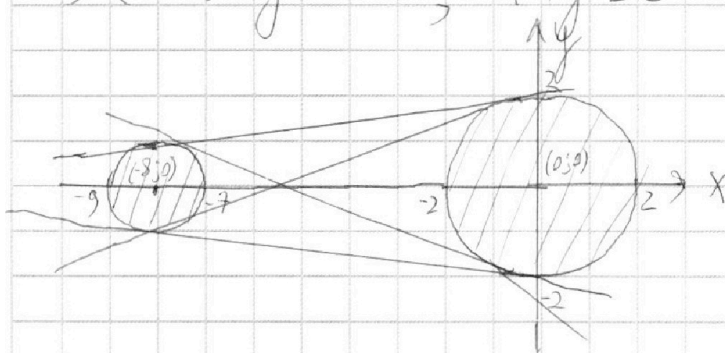
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\neq (x+8)^2 + y^2 = 1^2, \quad x^2 + y^2 = 2^2$$



$$\neq ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \text{ — верно тогда}$$

и только тогда, когда $(\cdot) (x_0; y_0)$ лежит внутри или на одной окружности и не лежит внутри или на другой

$\neq ax - y + 10b = 0$ — прямая, ~~система~~ система имеет два решения $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$ прямая $ax - y + 10b = 0$ касается обеих окружностей (касательная)

$$ax - y + 10b = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}x + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}y - \frac{10b}{\sqrt{a^2 + 1}} = 0$$

$$\begin{cases} \left| \frac{10b}{\sqrt{a^2 + 1}} \right| = 2 \\ \left| \frac{8a}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{10b}{\sqrt{a^2 + 1}} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25b^2 = a^2 + 1 \\ 64a^2 + 100b^2 - 16ab = a^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 67a^2 - 16ab + 3 = 0 \\ b = \frac{\pm \sqrt{a^2 + 1}}{5} \end{cases} \neq$$

$$\neq \begin{cases} 67a^2 + 3 = 32a\sqrt{a^2 + 1} \\ 67a^2 + 3 = -32a\sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow 67^2 a^4 + 402a^2 + 9 = 1024a^4 + 1024a^2 \Leftrightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0$$

$$D = 622^2 - 36 \cdot 3465 = 262144 = 512^2$$

$$\left[\begin{aligned} a^2 &= \frac{622 + 512}{6930} = \frac{1134}{6930} = \frac{567}{3465} = \frac{189}{1155} = \frac{63}{385} = \frac{9}{55} \\ a^2 &= \frac{622 - 512}{6930} = \frac{110}{6930} = \frac{11}{693} = \frac{1}{63} \end{aligned} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\frac{3}{55}} \\ a &= \pm \sqrt{\frac{1}{63}} \end{aligned} \right. \quad - \text{четыре ром-я для 4-х случаев}$$

$$\text{Ответ: при } a \in \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}, -\frac{1}{\sqrt{63}}, \frac{1}{\sqrt{63}}, \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 622 \\ \times 622 \\ \hline 1244 \\ + 1244 \\ 3732 \\ \hline 386884 \\ - 124740 \\ \hline 262144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3465 \\ \times 36 \\ \hline 20790 \\ + 10395 \\ \hline 124740 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 256 \\ \hline 1536 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65536 \\ \times 4 \\ \hline 262144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1280 \\ + 512 \\ \hline 65536 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3465 \\ \times 2 \\ \hline 6930 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 567 \\ - 3 \\ \hline 26 \\ - 24 \\ \hline 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 512 \\ + 622 \\ \hline 1134 \end{array}$$

$$500 + 50 + 17 = 567$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$ab: 2 \quad 7$$

$$bc: 2 \quad 7$$

$$ac: 2 \quad 7$$

$$x = a$$

$$y = b$$

$$z = c$$

$$\begin{array}{r} 3465 \\ - 27 \\ \hline 76 \\ - 72 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 385 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z = 12 \\ y = 6 \\ x = 9 \end{array}$$

$$y = 5,5 \\ x = 8,5$$

$$\begin{array}{r} 385 \\ - 35 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ - 2 \\ \hline 11,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 693 \\ - 66 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ y + z = 17 \\ x + z = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ z + y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y + z = 17 \\ x + z = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z - x = 7 \\ z + x = 37 \end{cases}$$

$$z = \frac{44}{2} = 22 \quad y_1 = -5 \\ x_1 = 15 \quad y_1 = 0$$

$$a = 2^9 7^{15} \quad b =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

		14	10
ab	2	7	

$$BC : 17 \quad 17$$

$$a_1 : 2 \quad 7 \quad 20 \quad 37$$

$$\begin{array}{ccc} a = 2 & b = 2 & c = 2 \\ \begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 14 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 17 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$(abc)^2 : 2^5 7^6$$

$$abc : 2^{26} 7^{32}$$

~~$\min(a, b) = 2$~~ ²⁶ 3

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{80} + \frac{1}{80}} = \frac{8ab}{a+b}$$

$$(2-7x)^2 = 4 - 28x + 49x^2$$

at
200

$$abc \geq 2^{26} 7^{32}$$

$\sqrt{x}$ $\sqrt{x}$
 $\sqrt{x}$ $\sqrt{x}$ $\begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

$$9 - 16 \cdot 3 =$$

$$\begin{array}{ccc} \overset{5}{7} & \overset{5}{7} & \overset{12}{7} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overset{9}{7} & \overset{1}{7} & \overset{16}{7} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 25 - 24 = 1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b=10 \\ b+c=17 \\ a+c=27 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} a - c = 7 \\ a + c = 10 \\ a + c = 37 \end{cases}$$

$$\frac{-2}{4} - \frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt{x^2 - 5x + 3} \quad b = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

$$a - b = 2 - 7x$$

$$a-b = 2-7x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} + b = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow a + b^2 + 2\sqrt{a}b = a^2 + b + 2a\sqrt{b}$$

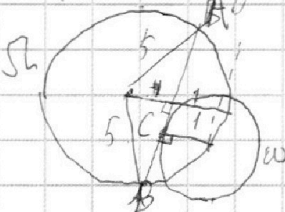
$$m-t = m^2 - t^2 \Leftrightarrow m-t = (m-t)(m+t) \Leftrightarrow \begin{cases} m=t \\ m+t=1 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = -4x^2+5x-3 = -2(2x^2-1,5x+1,5)$$

$$\sqrt{y-3,5x} \cdot \sqrt{y+3,5x} = 12 - y$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} \rightarrow 1 + 1 = \frac{1}{2}$$



$$3x + x = 3 \quad x = \frac{3}{4}$$

$$a + b$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 - 2ab$$

$$= a+b - \frac{\frac{a+b}{a+b}}{\frac{a+b}{a+b}} = a+b - \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$



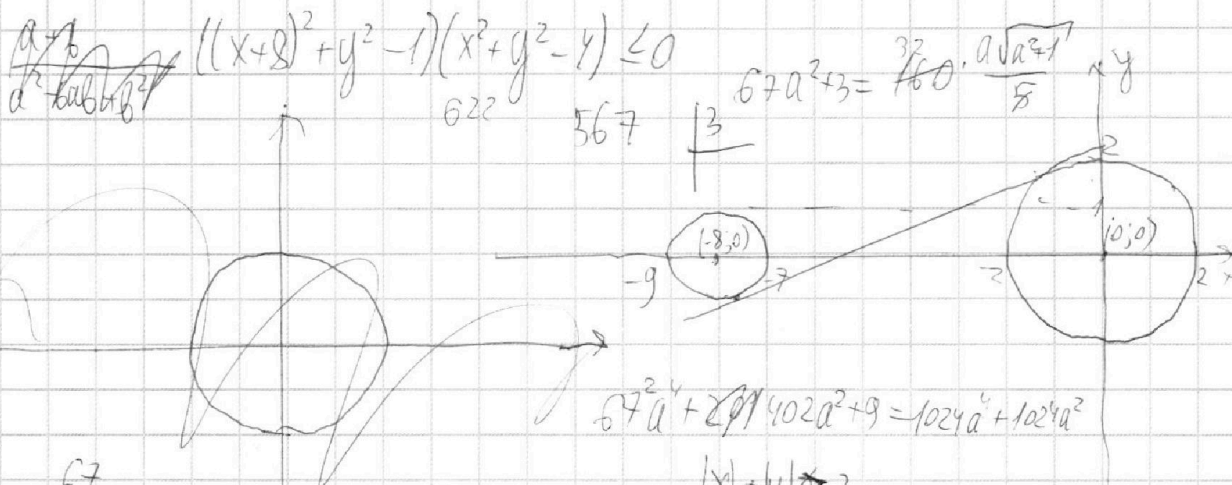
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 67 \\ 402 \\ \hline 1489 \\ 1024 \\ \hline 3765 \end{array}$$

$$ax - y + 10b = 0$$
$$|x| + |y| \geq 2$$
$$|x+8| + |y| \geq 1$$
$$y = ax + 10b$$
$$ax - y + 10b = 0$$
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}x - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}y + \frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 0$$

$$\frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 2$$
$$5b = \sqrt{a^2+1}$$
$$25b^2 = a^2 + 1$$
$$99 \cdot 35 = 11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$\frac{8a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{10b}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$b = \frac{4}{5}a$$
$$16a^2 = a^2 + 1$$

$$b = \frac{\sqrt{a^2+1}}{5} - 10b$$
$$\frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 2$$
$$\frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 2$$
$$\frac{8a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 1$$

$$\frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \Rightarrow 25b^2 = a^2 + 1$$
$$\frac{8a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{10b}{\sqrt{a^2+1}} = 1$$

$$\begin{cases} 63a^2 - 160ab - 1 = -100b^2 \\ 4a^2 + 4 = 100b^2 \end{cases}$$
$$64a^2 + 100b^2 - 160ab = a^2 + 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 67a^2 - 160ab + 3 = 0 \\ 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0 \end{cases}$$