



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Заметим, что если $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$, то $\min ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

Тогда $\times ab : 2^{15} \cdot 7^{18}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$ заметим, что 7 у нас хватает (в смысле $\min abc$ содержит 7^{39} , т.к. 7 можно разложить в a и c так, чтобы $ab : 2^{15} \cdot 7^{18}$, а $bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$)

А вот с 2 есть проблема т.к. ac содержит только 2^{23} , тогда $\times ab^2c : 2^{32} \cdot 7^{29}$, тогда $b^2 : 2^9 \Rightarrow \min b = 2^5$

Давайте поймём, что $abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \min$, ну мы знаем, что ac меньше чем $2^{23} \cdot 7^{39}$ быть не может. Ну тогда допустим $ac > 2^{23} \cdot 7^{39}$ но $ac < 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc : 2^{28} \Rightarrow$ мы нашли минимальное abc.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$, пусть E_m существует m , такое что

$(a+b):m$ и $(a^2-7ab+b^2):m$, пусть $m = \max$.

$$\begin{aligned} & \text{т.к. } a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab, \text{ т.к. } a+b:m \Rightarrow \\ & \Rightarrow (a+b)^2:m \Rightarrow 9ab:m. \end{aligned}$$

Пусть $a+b=mk, k \in \mathbb{N}$, а $9ab=ms, s \in \mathbb{N}$

Тогда

$$9abk = a+b(a+b)s = a^2 + 2ab + b^2$$

Ну, т.к. $9abk:a$, то $(a+b)s + b^2:a$, т.к. $a^2:a$, то $b^2:a$, но $b \nmid a$, значит $\text{НОД}(b;a)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow s:a$$

Аналогично $s:b \Rightarrow s:ab$

Пусть $s = abt, t \in \mathbb{N}$

Тогда

$$9ab = mabk$$

$$9 = mk$$

$$m_1 = 1$$

$$k_1 = 9$$

$$m_2 = 3$$

$$k_2 = 3$$

$$m_3 = 9$$

$$k_3 = 1$$

(т.к. m и $k \in \mathbb{N}$)

Тогда $\max m = 9$

Приведем пример: $a=4, b=5$ ($\text{НОД}(a,b)=1$)

$$\frac{4+5}{4^2+5^2-7 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{4} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Заметим, что $3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x$

Тогда пусть $3x^2 + 3x + 1 = t$, а $1 - 9x = d$.

тогда имеем:

$$\sqrt{t+d} - \sqrt{t} = d \quad | \cdot (\sqrt{t+d} + \sqrt{t}) \neq 0, \text{ т.к. } 0 \text{ достигается}$$

нигда

или $d=0$, но $\sqrt{t}$ не равен 0

тогда имеем $t+d - t = d(\sqrt{t+d} + \sqrt{t})$
 $d = d(\sqrt{t+d} + \sqrt{t})$

1) $d=0 \Rightarrow 1-9x=0$
 $x = \frac{1}{9}$

2) $d \neq 0 \Rightarrow 1 = \sqrt{t+d} + \sqrt{t}$

$\sqrt{t}$ и $\sqrt{t+d}$ - всегда больше 0 $\Rightarrow \sqrt{t}$ достигает минимума, когда $\sqrt{t+d}$ достигает минимума
 или $x = x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \min t = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{t} > 1$, а
 $\sqrt{t+d} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{t+d} + \sqrt{t} > 1 \Rightarrow$ уравнение $\sqrt{t+d} + \sqrt{t} = 1$
 не имеет корней.

Ответ: $x = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



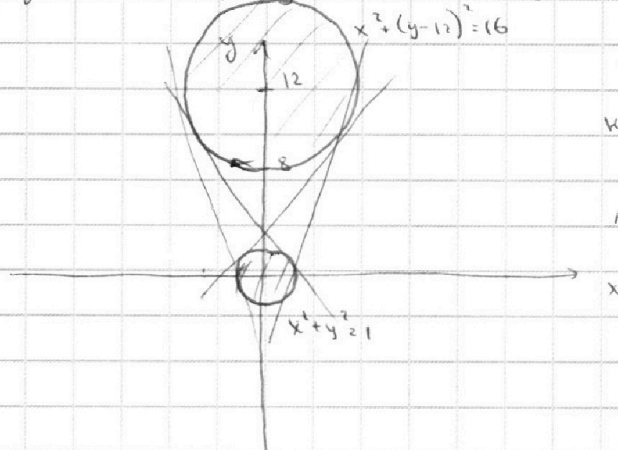
№6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

схематично

Давайте изобразим второе неравенство графически:

графиками $x^2+y^2=1$ и $x^2+(y-12)^2=16$ являются окр.



Тогда решением
неравенства будет мно-
жество точек в окр, вк-
лючая границы

✗ $ax+y-8b=0$ - это прямая, тогда, чтобы было только
2 решения нужно, чтобы она касалась двух окр. одновр.
как показано на рис. Т.е. всего 4 прямых.

Тогда нам нужно решить систему:

$$\begin{cases} x^2+(8b-ax)^2=1 & (1) \\ x^2+(8b-ax-12)^2=16 & (2) \end{cases}$$

так, чтобы каждое уравнение имело
всего лишь 1 корень, т.е. $D=0$

$$(1) \quad x^2 + x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 12 = 0$$

$$D = a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$(2) \quad (a^2+1)x^2 + ax(24-16b) + 64b^2 - 192b + 128 = 0$$

$$D = a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0$$

Получим новую систему:

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$-60b^2 - 12b + 9 = 0$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}(1)$$

$$b_2 = \frac{3}{10}(1/2)$$

$$(1) \quad a^2 - 64\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1$$

$$(2) \quad a^2 - 64\left(\frac{3}{10}\right)^2 = -1$$

$$a^2 = 15.27 \quad a = \pm\sqrt{15.27}$$

$$a^2 = \frac{169}{25} - 1 = \frac{119}{25}$$

$$a = \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\text{Ответ: } -\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{119}}{5}, \frac{\sqrt{119}}{5}, \sqrt{15}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

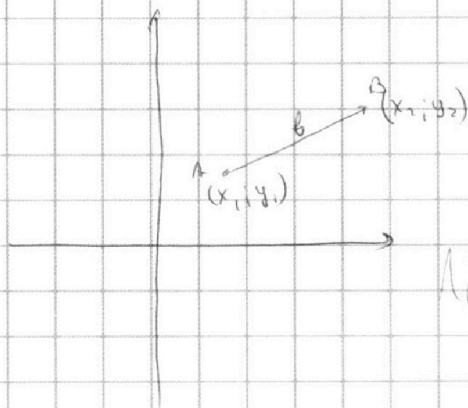
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

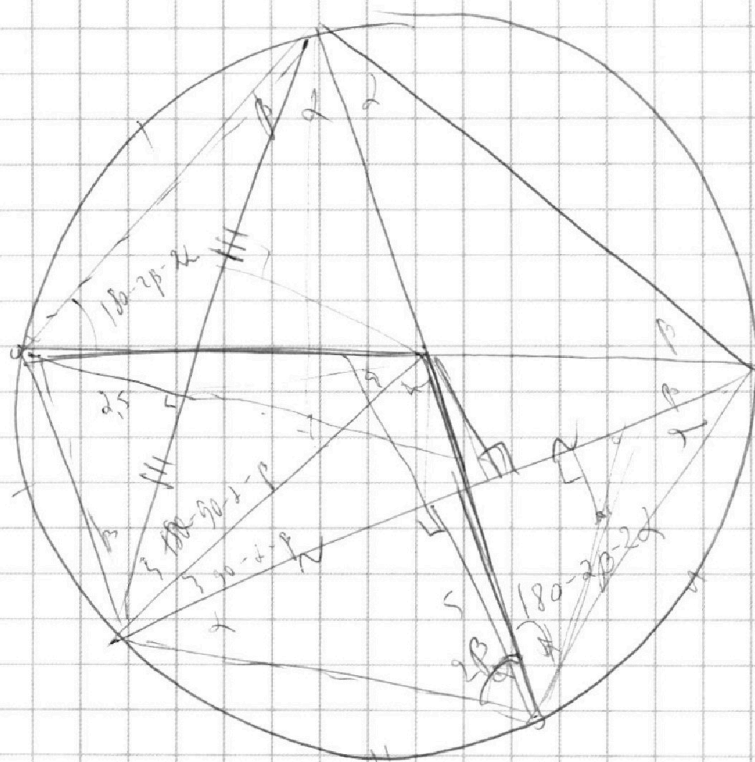
№5. Давайте возьмем любой вектор с координатами $x_1(x_2-x_1); (y_2-y_1)$



$$\text{Путь } AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$$180 - 2\alpha - 2\beta$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta}$$



$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta}$$

$$\frac{2R \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2R \sin \beta}{\sin \beta}$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta}$$

$$(180 - 2\alpha - 2\beta)$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta}$$



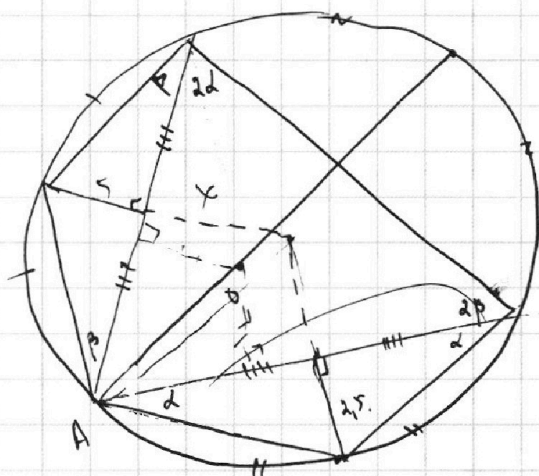
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



#

(cos φ sin φ)
x cos φ sin φ

$2 \cdot 8 \cdot 7^{28}$

$2^{23} \cdot 7^{40}$

$R = 5 + x$

$5 \tan \alpha$

$\sqrt{\left(\frac{5}{\sin \beta}\right)^2 - 25} =$
 $\sqrt{\frac{25 - 25 \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta}}$

$\frac{5}{\tan \beta}$

$5 \tan \alpha$

$\frac{10}{\tan \beta}$

$\frac{5}{\tan \beta}$

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\frac{5}{\tan \alpha} = \frac{5}{\tan \beta}$

$x = \frac{5}{\tan \beta}$

$\frac{5}{\tan \alpha} \sin \alpha = \frac{10}{\tan \beta} \sin \beta$

$2 \tan \alpha \sin \alpha = \frac{10}{\tan \beta} \sin \beta$

$2 = \frac{10}{\tan \beta}$

$5 \cdot (x + 5 + x) = 5$

$5(2x + 5) = \frac{25}{\tan^2 \beta}$

$5(2.5 + x + x + 5) = \frac{2.5}{\tan^2 \beta}$

$2.5 + 2x = \frac{2.5}{\tan^2 \beta}$

$2x + 5 = \frac{5}{\tan^2 \beta}$

$2.5 = \frac{2.5}{\tan^2 \beta} - \frac{5}{\tan^2 \beta}$

$\frac{1}{\cos^2 \beta} + 1$

$1 = \frac{1}{\tan^2 \beta} - \frac{2}{\tan^2 \beta}$

$\frac{1}{\tan^2 \beta} = \frac{2}{\tan^2 \beta}$

$\frac{2.5}{\tan^2 \beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1$$

$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 - 2 \cdot 8 \cdot ab \cdot x = 1$$

$$x^2(a^2 + 1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(64b^2 - 1)(a^2 + 1) = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 - 256b^2 + 4a^2 + 4 = 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + (8b - ax)^2 - 2(8b - ax) \cdot 12 + 144 = 16$$

$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 - 16abx - 192b + 24ax + 128 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + ax(24 - 16b) + 64b^2 - 192b + 128 = 0$$

$$D = a^2(24 - 16b)^2 - 4(64b^2 - 192b + 128)(a^2 + 1) =$$

$$= 144a^2 - 24 \cdot 8a^2b + 64a^2b^2 - 64a^2b^2 - 64b^2 + 192a^2b + 192b - 128a^2 - 128 = 16a^2 - 64b^2 + 192b - 128 = 0$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{cases} a^2 - 8b^2 + 12b - 8 = 0 \\ a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$56b^2 + 12b - 10 = 0$$

$$28b^2 + 6b - 5 = 0$$

$$D = 36 + 560 = 596 = 4 \cdot 149 = (2\sqrt{149})^2$$

$$b = \frac{-6 \pm 2\sqrt{149}}{28} = \frac{-3 \pm \sqrt{149}}{14}$$

$$D = 36 + 600 = 636$$

$$30b^2 + 20b + 4b - 3 = 0$$

$$D = 16 + 400 = 416 = 16 \cdot 26 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 4 \cdot 13 = 2\sqrt{13}$$

$$b = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{40} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{20}$$



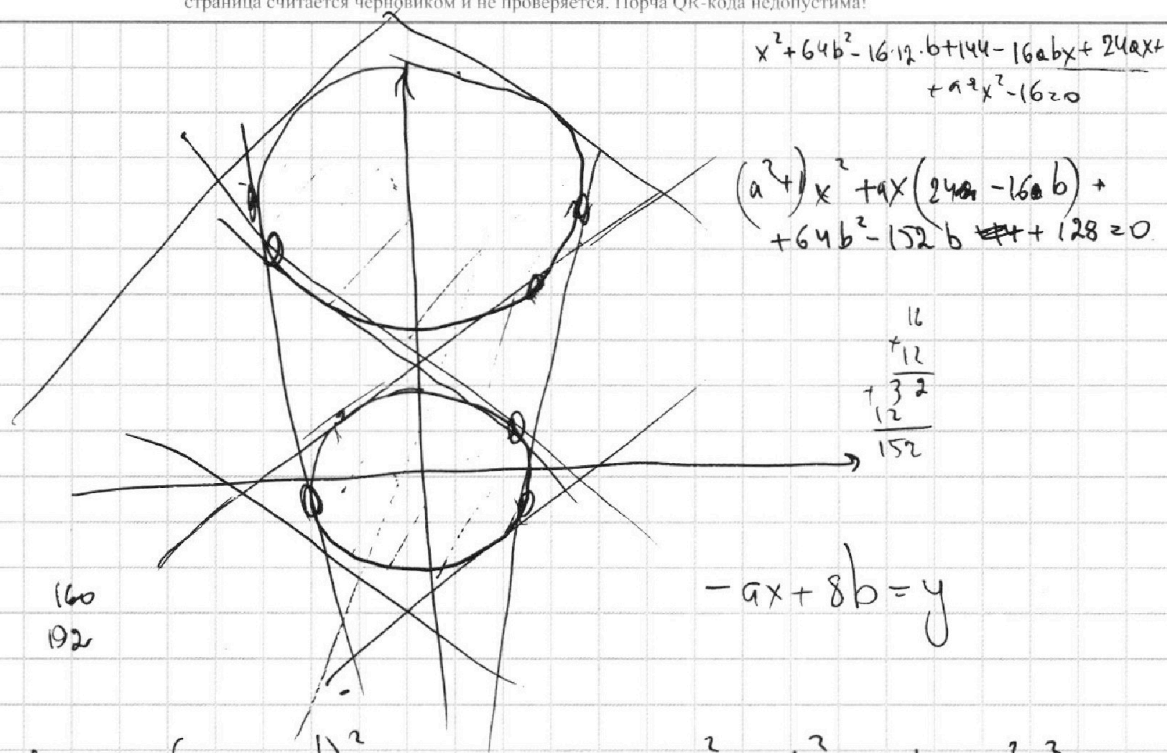
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 = 1 \\ x^2 + (8b - 12)^2 - 2a(8b - 12)x + a^2x^2 = 16 \end{cases}$$

$$(-ax + 8b - 12 + ax - 8b)(-ax + 8b - 12 + ax + 8b) = 15$$

$$D = a^2(24 - 16b)^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 152b + 128) = 0$$

$$144a^2 - 24 \cdot 8a^2b + 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + 152a^2b - 128a^2 - 64b^2 + 152b - 128 = 0$$

$$16a^2 - 40a^2b - 64b^2 + 152b - 128 = 0$$

$$16a^2 - 40a^2b - 64b^2 + 152b - 128 = 0$$

$$ax - 8b + 6 = \frac{15 \cdot 5}{24 \cdot 8}$$

$$ax - 8b = -\frac{5}{8} + 6$$

$$-ax + 8b = \frac{43}{8}$$

$$x^2 + \left(\frac{43}{8}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{8 + 43}{8} = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - x(16 - 16abx + 64b^2 - 120) = 0$$

$$D = 64a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 120) = 0$$

$$64a^2b^2 - 4 \cdot 64a^2b^2 + 4a^2 - 4 \cdot 64b^2 + 480 = 0$$

$$-3 \cdot 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 120 = 0$$

$$-48a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 120 = 0$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 5a^2b - 8b^2 + 19b - 16 = 0 \\ -48a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 120 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2+3x+1-9x+1} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$1 - 9x = 1$$

$$3x^2 + 3x + 12d.$$

$$\sqrt{t+d} - \sqrt{d} = t \cdot (\sqrt{t+d} + \sqrt{d})$$

$$t + d + d - 2\sqrt{td + d^2} = t$$

$$t + 2d - t^2 = 2\sqrt{td + d^2}$$

$$d + d + d = \sqrt{(\sqrt{d} + \sqrt{d})}$$

$$\sqrt{1+d} \approx 1 + \frac{1}{2}d = 1.2$$

$$g_{abk} = s_a + s_b,$$

gab $\frac{1}{100}$ ms

$$S: ab.$$

$s = abv$

$$g_{ab} = m_{ab}r$$

$$g = m_f$$

m21 n29

$$n \geq 3 \quad r \geq 3$$

(fn 29) r21

$$3x^1 + 3x + 1 = 0$$

$$X_0^2$$

$$y_0 = 3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3-6+4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$1 + d + d + 2\sqrt{1+d} = 1$$

$$t + 2d - 1 \quad z - 2\sqrt{(t+d)d}.$$

$$(t+2d-1)(t+2d-1) = t^2 + 2td - t + 2d + t + 4d^2 - 2d - t - 2d + 1 =$$

$$2d^2 + 4d^2 + 1 + 4d + 2d - 2d = 2d^2 + 4d^2 + 4d^2$$

$$69x^2 + 12x - 420$$

$$D = 14 + 4.69 - 4 =$$

$$16(8+69) = 16 \cdot 77$$

$$t^2 - 2(t + 2d) + 120$$

$$D_2 (\tilde{d} + 2d)^2 = 4$$

$$t^2 - 2t - 4t + 120$$

$$D = 4 + 16d - 4 = 16d = (4d)^2$$

$$f = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$16-9x = 1 + 2\sqrt{3x^2 - 3x + 1}$$

$$-9x^2 - 2$$

$$x^2 - 9x = x^2 - 2\sqrt{3}x^2 - 3x + 1$$

$$9x^2 \sqrt{3x^2 - 3x + 1}$$

$$81x^2 - 12x^2 - 12x + 4$$

