



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 = \frac{hk}{t} \cdot 2^9 \cdot 7^{-10} \quad \text{т.к. } b - \text{натур.}, \text{ то}$$

$$\frac{hk}{t} = 2^{10} \cdot 7^{\dots} \quad \frac{hk}{t} = 2^{10} \cdot 7^{\dots}$$

$$\frac{hk}{t} = 2^{10} \cdot 7^{\dots}$$

$$\frac{hk}{t} = \frac{7^{10}}{2^9} \Rightarrow hk = \frac{7^{10}}{2^9} \cdot t \quad \min t = 2^9$$

$$kht = \frac{7^{10}}{2^9} \cdot t^2, \quad \text{значит } \min abc = \frac{7^{10}}{2^9} \cdot 2^9 \cdot 2^9 = 2^{10} \cdot 7^9$$

Пример:

$$a = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad c = h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac = kh \cdot 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$= \frac{7^{10}}{2^9} \cdot 1 \cdot 2^{32} \cdot 7^{29} = 7 \cdot 2^{23}$$

$$kh = \frac{7^{10}}{2^9}$$

$$kht = 7^{10} \cdot 2^9$$

$$\text{значит } \min abc = 7^{10} \cdot 2^9 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68} = 2^{64} \cdot 7^{78}$$

пример:

$$a = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$c = h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{32} \cdot 7^{29}$$

если $k=7; h=7$, то

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\text{м.к. } ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, \text{ где } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{м.к. } bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$bc = h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}, \text{ где } h \in \mathbb{N}$$

$$\text{м.к. } ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ac = t \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}, \text{ где } t \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 = kht \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

~~минимум $kht = 1$, но если $kht = 1$, то $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$ а такого не можем быть м.к. тогда abc - не натур.~~

~~значим мин $kht = 2$, если $kht = 2$~~
 ~~$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68}$ $abc = 2 \cdot 7^{34}$~~

~~Приведем пример~~

$$a = \frac{t \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}}{c} \quad ; \quad b = \frac{h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}}{c}$$

$$ab = \frac{ht \cdot 2^{40} \cdot 7^{57}}{c^2} = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow c^2 = \frac{2^{25} \cdot 7^{46} \cdot ht}{k}$$

$$a^2 = \frac{t^2 \cdot 2^{46} \cdot 7^{78}}{c^2} \cdot \frac{k}{2^{25} \cdot 7^{46} \cdot ht} = \frac{tk}{h} \cdot 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$b^2 = \frac{h^2 \cdot 2^{34} \cdot 7^{36}}{c^2} \cdot k = \frac{hk}{t} \cdot 2^9 \cdot 7^{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N2. \quad a, b \in \mathbb{N}$$

а Будем обозначать $\text{НОД}(x; y) \stackrel{\text{за}}{=} (x; y)$

$\frac{a}{b}$ - несократима - это означает, что $(a; b) = 1$

$$\begin{aligned} (a+b; a^2-7ab+b^2) &= m \quad \text{из } (a+b)^2-9ab \quad a+b \\ &\quad \text{по алгоритму Евклида вычтем } (a+b) \text{ раз} \\ &= ((a+b)^2-9ab; a+b) = (-9ab; a+b) = (9ab; a+b) \quad \text{из } 9ab \\ &\quad \text{вычтем } 9a \text{ раз } (a+b) \text{ (по алгоритму Евклида)} \\ &= (9ab-9a(a+b); a+b) = (-9a^2; a+b) = (9a^2; a+b) = m \end{aligned}$$

т.к. $(a; b) = 1$, но $a+b \nmid a$, значит $\text{НОД}(9a^2; a+b)$
будет максимум 9

Приведем пример если $a=1; b=8$, то

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{1+64-7 \cdot 8} = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{дробь сократима на 9, значит макс достигнута}$$

Ответ: при $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

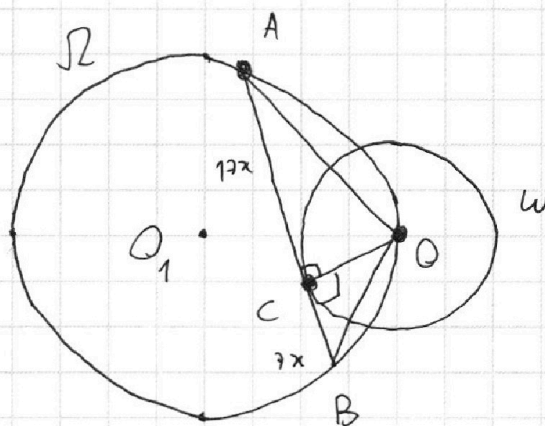
Дано:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$OC = 7 = r$$

$$O_1O = 13 = R$$

AB = ?



т.к. OC - радиус, проведенный в
точку касания $OC \perp AB$.

Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$

$\angle AOB = \alpha$, тогда по т. синусов:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot O_1O = 26 \quad \sin \alpha = \frac{24x}{26} = \frac{12x}{13}$$

$$AO = \sqrt{(17x)^2 + 7^2}; \quad OB = \sqrt{(7x)^2 + 7^2} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{OC \cdot AB}{2} = \frac{7 \cdot 24x}{2} = AO \cdot OB \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$7 \cdot 24x = \sqrt{(17x)^2 + 7^2} \cdot 7\sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{12x}{13} \quad x \neq 0 \quad (x \neq 0)$$

$$26 = \sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{Пусть } x^2 = t$$

$$26^2 = (289t + 49)(t + 1) \Rightarrow 289t^2 + 338t + 49 = 676$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$169t^2 + 169t - 313.5 = 0$$

$t \in \mathbb{R}$ если

$t = 1$:

$$26^2 = 338$$

$$338 \cdot 2 = 13 \cdot 26 \cdot 2 = 26^2$$

равенство выполняется



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$289t^2 + 338t - 627 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(289t + 627) = 0$$

$$t > 0, \text{ значит } t = 1$$

$$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \quad x = 1$$

$$AB = 24x = 24$$

$$\text{Ответ: } AB = 24$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

OДЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Положим $3x^2 - 6x + 2 = a$; $3x^2 + 3x + 1 = b$

Тогда $a - b = 1 - 9x$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$ на OДЗ $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$

или

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 1 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad / \quad 3 \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{3}{9} + 1 =$

$= \frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 > 0$

знаем $x = \frac{1}{9}$ подходит

или

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2\sqrt{b} + b \\ a \geq 0 \end{cases}$

3) $1 - 9x = 1 - 2\sqrt{b} \Leftrightarrow 9x = 2\sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 81x^2 = 4b \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 81x^2 = 4b = 12x^2 + 12x + 4$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 6^2 \times 4 \cdot 69 = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 23 =$

$= 4 \cdot 3 (3 + 23) = 12 \cdot 26 = 24 \cdot 13 = 4 \cdot 6 \cdot 13 = 4 \cdot 78$

$\begin{cases} x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 6 \neq 2\sqrt{78} \\ 36 \neq 4 \cdot 78 \end{cases} \quad x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$

знаем не подходит

$x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Но также необходимо проверить неравенство

$$4. \quad 1 \geq \sqrt{6} \quad (2)$$

Мы знаем, что при ~~ка~~ $x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$ выполняется

равенство (1); $9x = 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{9x}{2}$

$$(2) \quad 1 \geq \sqrt{6} = \frac{9x}{2} = \frac{2(3+\sqrt{78})}{69} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3(3+\sqrt{78})}{23}$$

и $\>$ сравнив 1 и $\frac{3(3+\sqrt{78})}{23}$ 23 и $9+3\sqrt{78}$

$$14 \quad \< \quad 3\sqrt{78}$$

$$196 \quad \< \quad 9 \cdot 78$$

Значит: $1 < \sqrt{6}$ ~~также~~ значит нер-во (2) неверно

$$x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} - \text{не подходит}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

что l не будет иметь общих точек с пар-аллелем, а значит ~~точек x_2 (коорд. $x_2; y_2$)~~ тогда ~~как~~ точки с координатами $(x_2; y_2)$ не найдется.

Проведем прямую AB : $y \leq 18 - 2x$

Нам ~~нужно~~ все точки (x_i, y_i) данных элементов иметь
Этой прямой.

В таком случае

Заметим, что для каждой точки (x_i, y_i)
прямая l будет пересекать ^{её} параллельно обра-
зу l ^(QR) ^{на этих} ~~одинаковые~~ по длине отрезки, ~~на отрезках~~
~~будут~~ ~~равны~~ ~~во~~ отрезках будет всегда оди-
наковое кол-во точек с целочисленными коорди-
натами.

Два каморы вверху будут учебн. у.

(по некаждому т.к. при $y \neq 2$ и будет градиентом)

Центры координат x $\rightarrow$ Бюджет 14.

Значит для каждой точки (x_1, y_1) , лежащей
ниже AB , будет соотв. по 14 точек (x_2, y_2)

Найдем кол-во максим. точек (x_1, y_1) их будет

14.10 (все точки лежат на отрезках $\parallel AB$, максим
будет 10, а на каждой отрезке 19 точек)

Два камгэи $(x_1; y_1)$ comb. no 14 нөсрөк $(x_2; y_2)$
нор дугеи 14.14.10 = 1960 Инбейн: 1960

Amber: 196a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6.

$$\begin{cases} ax+y-86=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+(y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

$x^2+y^2=1$ - y -~~я~~ окружность
и $x^2+(y-12)^2=16$

Начертим их - во точках удовл. (2) (это будет 2 круга)

< центры

$M(0;12)$ и $N(0;0)$

$L: ax+y-86=0$ - это

пр-я

2 решения y
системы будет,
если прямая
касается $\leq$
каждой окруж-
ности.

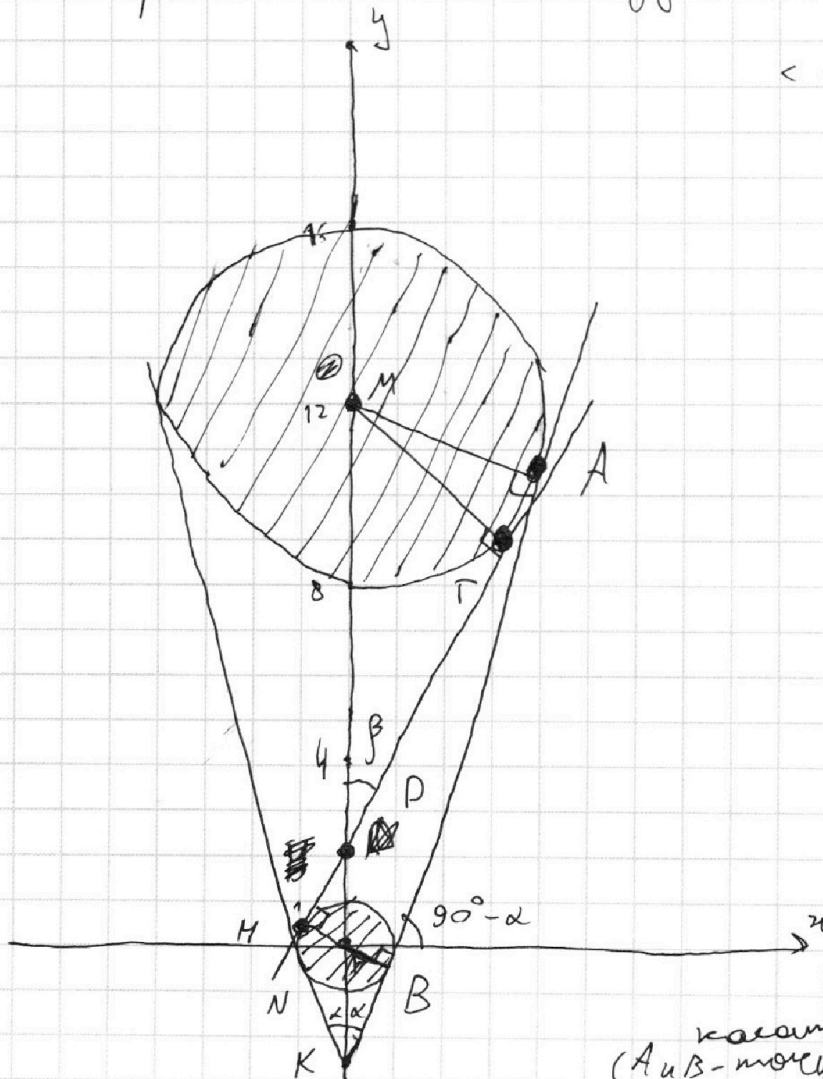
По сути явл.
одной касате-
льной.

Таким каза-
тельным y

(2 внутр и
2 внешн.)

Проведем внешнюю

касательную
(A и B - точки касания)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $NKB = \alpha$

$$NK = \frac{NB}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}; \quad MK = \frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin \alpha}$$

$$MK = \frac{MN + NK}{\sin \alpha} = \frac{12 + \frac{1}{\sin \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$MK = 12 + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{3}{\sin \alpha} = 12 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

($\sin \alpha \neq 0$)

По теореме $NK = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$; ~~тогда~~

$$KB = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}; \quad KB \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{KB}{NB} = \sqrt{15}$$

т.е. a - котанг. касательной, значит

$$a = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{15}$$

в при $a = \sqrt{15}$ существует b , при котором прямая l совпадает с AB .

для внутр. касательной $a = \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) =$

$$= -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{15}$$

Проведем внутр. касательную MT .

$$ND = \frac{NH}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta}; \quad MD = \frac{MT}{\sin \beta} = \frac{4}{\sin \beta}$$

$$ND + MD = 12 = \frac{5}{\sin \beta} \quad \sin \beta = \frac{5}{12} \quad (\text{н.к. } \sin \beta \neq 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$ND = \frac{12}{5}$~~ ~~$ND = \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 1} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \sqrt{\frac{119}{25}} = \frac{\sqrt{119}}{5}$~~

$ND = \frac{12}{5}; HD = \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$ctg \beta = \frac{ND}{HD} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\alpha = a$ - угол наклона НТ, значит $tg(90^\circ - \beta) = a$

$a = ctg \beta = \frac{\sqrt{119}}{5}$

Аналогично угол наклона другой внутренней касательной равен $tg(90^\circ + \beta) = -ctg \beta = -\frac{\sqrt{119}}{5} = a$

при всех найденных a будут существовать
(разные) b , при которых прямые станут общими касат.
значит, эти a подходят.

Ответ: $a = \pm \sqrt{15}$

$a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \beta \approx \frac{1}{DN}; \quad \sin \beta = \frac{AM}{MD} = \frac{4}{MD}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 144 \\ \hline 145 \end{array}$$

$$DN + MD = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\sin \beta} \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = \frac{4}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{4}{12}} = \frac{144}{25} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{119}{25} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$kht = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$$

$$c = a \cdot 2^2 \cdot 7^1 \cdot \frac{h}{k}; b = \frac{a}{2^4 \cdot 7^{21}} \cdot \frac{h}{t}$$

$$a \cdot h \geq \frac{2^1 \cdot 7^{21} \cdot t}{h}$$

$$a = 2^4 \cdot 7^{21}$$

$$h = 2^0$$

$$6 \times b = k \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} =$$

$$ab \leq c;$$

$$b \leq k \quad ba \leq k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\frac{a^2}{2^4 \cdot 7^{21}} \cdot \frac{h}{t} = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow \frac{a^2 h}{k t} = 2^{19} \cdot 7^{32}$$

$$h \geq 2$$

$$k \leq 2$$

$$\frac{a^2}{k t} \leq 2^{18} \cdot 7^{32}$$

$$kht = 4$$

$$kt = \frac{4}{h}$$

$$\frac{a^2 h^2}{4} = 2^{19} \cdot 7^{32}$$

$$kht \neq 4:$$

$$kht = 7:$$

$$\frac{a^2 h^2}{7} = 2^{19} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{t}{h} \cdot 2^6 \cdot 7^{21}$$

$$kht = 2$$

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\frac{a^2}{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}} = \frac{t}{h} \cdot 2^6 \cdot 7^{21}$$

$$\frac{a^2}{k t} \cdot h = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$kht = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$$

$$\frac{a^2 \cdot h^2}{2^{\alpha} \cdot 7^{\beta}} = 2^{21} \cdot 7^{32} \Rightarrow (ah)^2 = 2^{21+\alpha} \cdot 7^{32+\beta}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$h=1:$$

$$a^2 = 2^{22} \cdot 7^{32} \rightarrow a = 2^{11} \cdot 7^{16}$$

$$b= \quad k=2:$$

$$b = 2^{26-11} \cdot 7^{11-16}$$

$$b = 2^{15} \cdot 7^{-5}$$

$$kht = \min \quad 16 + \frac{15}{2}$$

$$c > a$$

$$a \nmid ac > ab$$

$$bc > ab$$

$$c > a$$

$$c = \max$$

$$c > b$$

$$ab^2c = 1109$$
$$= b^2 \cdot c \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} = kh \cdot 2^{17} \cdot 7^{29}$$

$$b^2 \cdot c \cdot 7^{10} = kh \cdot 2^9$$

$$b = \frac{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{a}$$

$$a = \frac{c \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}}{c}$$

$$c = k \cdot 2^1$$

$$b = \frac{h \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}}{c}$$

$$ab = \frac{h \cdot c \cdot 2^{40} \cdot 7^{57}}{c^2} = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$c^2 = \frac{h \cdot c}{k} \cdot 2^{25} \cdot 7^{46}$$

$$a^2 = c^2 \cdot 2^{46}$$

$$\frac{62}{a^2} = \frac{62}{a} \cdot c = \frac{78}{32}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$MN = 12$$

$$a/b = \frac{b/c}{a/b} = \frac{c}{a} = \frac{k}{k} \cdot 2^2 \cdot 7^1 \quad \begin{matrix} 2^2 \\ 3^3 \end{matrix}$$

$$c = a \cdot 2^2 \cdot 7^1 \cdot \frac{h}{k}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = 2^5 \cdot 7^{21} \cdot \frac{h}{k} \quad b = \frac{a}{2^5 \cdot 7^{21}} \cdot \frac{h}{k}$$

$$c = a \cdot 2^3 \cdot 7^9$$

$$a = 2^1 \cdot 7^{21} \quad a = 1$$

$$b = 8$$

$$b = \frac{a}{2^4 \cdot 7^{21}}$$

$$\frac{a}{b} = 2^5 \cdot 7^{21} \cdot \frac{h}{k}$$

$$\frac{h}{k}$$

$$(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$(a+b; a^2 - 7ab + b^2) =$$

$$= (a+b; -9ab) = (9ab; a+b) = (-9a^2; a+b) =$$

$$9a^2 + 9ab = 9a(a+b) \quad (-9a^2; a+b) \xrightarrow{55} \frac{9}{g}$$

$$9a^2; a$$

$$1; 9a$$

$$9; a+b$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9a(a+b) + 9a^2}$$

$$\frac{1}{a+b-9a} = \frac{9a^2}{a+b-9a}$$

$$\frac{9}{1-7 \cdot 8 + 63} =$$

$$= \frac{9}{63-55} = \frac{9}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$
 $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$abc - \min$
 $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc = l \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^2 \cdot 7^7$
 $ac = h \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^8 \cdot 7^{28}$

$(abc)^2 = k^2 l^2 h^2 \cdot 2^{10} \cdot 7^{35}$
 $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{9ab}{a+b}$
 $\frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{1}{a+b} - \frac{9ab}{a+b}$
 $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$
 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{b} + b$
 $1 - 9x = 1 - 2\sqrt{b} \Rightarrow 2\sqrt{b} = 9x$
 $36 \cdot b^2 + 4 \cdot 89 = b^2 + 4 \cdot 3 \cdot 23 =$
 $= 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 23 = 4 \cdot 3(3 + 23) = 12 \cdot 26 = 12 \cdot 2 \cdot 13$

$D = 496^2 - 46^2$
 $\frac{a}{b} - \text{несокр.}$
 $a^2 - 7ab + b^2 - a - b = k$
 $\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{196}$
 $\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{196}$
 $\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{196}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x^2 = \left(\frac{2(3 + \sqrt{78})}{69} \right)^2 = \frac{4(81 + 6\sqrt{78})}{69^2}$$

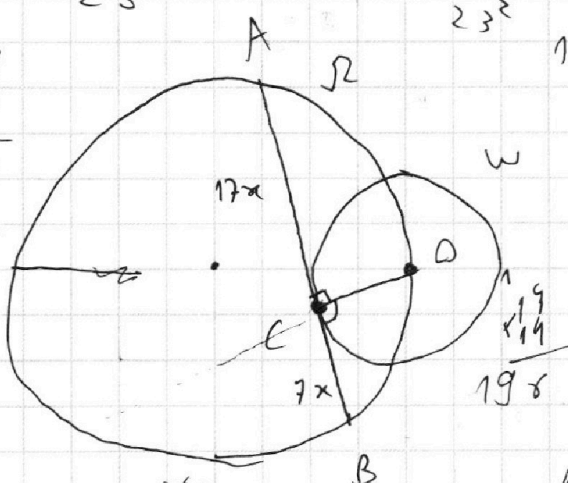
$$3x^2 = \frac{4(81 + 6\sqrt{78})}{69^2} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3(27 + 2\sqrt{78})}{69^2}$$

$$= \frac{4(9 + 2\sqrt{78})}{23^2} - \frac{8 \cdot 2(3 + \sqrt{78})}{23^2} = \frac{4}{23} \left(\frac{9 + 2\sqrt{78}}{23} - \frac{6 + 2\sqrt{78}}{23} \right)$$

$$= \frac{4}{23} \cdot \frac{-60 - 21\sqrt{78}}{23} = -\frac{4 \cdot 3(20 + 7\sqrt{78})}{23^2}$$

$$\frac{17}{119} \cdot \frac{1}{119} = \frac{1}{1463}$$

$$\frac{17}{119} \cdot \frac{1}{119} = \frac{1}{1463}$$



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$

$$AB = 17$$

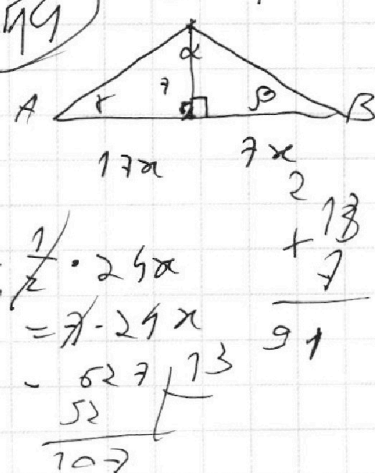
$$\angle AOB = 2\alpha$$

$$\sin \angle AOB = \sin 2\alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{1} = \frac{2 \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{12}{13}}{1} = \frac{168}{169}$$

$$AO = \sqrt{(17x)^2 + 7^2}; BO = \sqrt{(7x)^2 + 7^2}$$

$$\frac{AO}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin \beta}$$

$$(289t + 49)(t + 1) = t \cdot 292$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2\beta + 2\alpha) = \cos 2\alpha - 2\cos 2\beta$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos(\beta + 2\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\beta + 2\alpha)}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{18} \cdot 16$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r} 117 \\ 7 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 25 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ + 39 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$7 \cdot 17$$

$$\begin{array}{l} a = 2 \cdot 7 \\ b = 5 \cdot 0 = 2 \end{array}$$

$$c = 2 \cdot 13 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 17 \\ \hline 32 \\ + 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\frac{98}{5} + \frac{12}{5} = 12$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 2 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$ab \cdot kth \cdot c$$

$$(abc)^2 = kth \cdot \frac{55}{2} \cdot 68$$

$$kth \cdot \min kth = 2$$

$$(abc)^2 = 2 \cdot 28 \cdot 34$$

$$a = 2 \cdot 7^\beta$$

$$b = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$c = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^{18} \cdot 7^{39}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{50}$$

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^{18} \cdot 7^{39}$$

$$2 \cdot c = 2^{24} \cdot 7^{100}$$

$$\alpha - \alpha_1 = 5$$

$$\alpha + \alpha_1 = 15$$

$$2\alpha = 2\alpha = \alpha \neq 10$$

$$\alpha_1 = 5$$

$$\alpha_2 = 13$$

$$\beta_2 = 39$$

$$\beta - \beta_1 = 11$$

$$\beta + \beta_1 = 11$$

$$\beta = 11$$

$$\beta_1 = 0$$

$$\sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{KN}$$

$$\sin \alpha = \frac{9}{MK}$$

$$MK - KN =$$

$$= 12$$

$$\sin \alpha =$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\alpha + \alpha_2 = 23$$

$$\beta + \beta_2 = 39$$

$$\alpha + \alpha_1 = 15$$

$$\beta + \beta_1 = 11$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 17$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 18$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 = 18$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

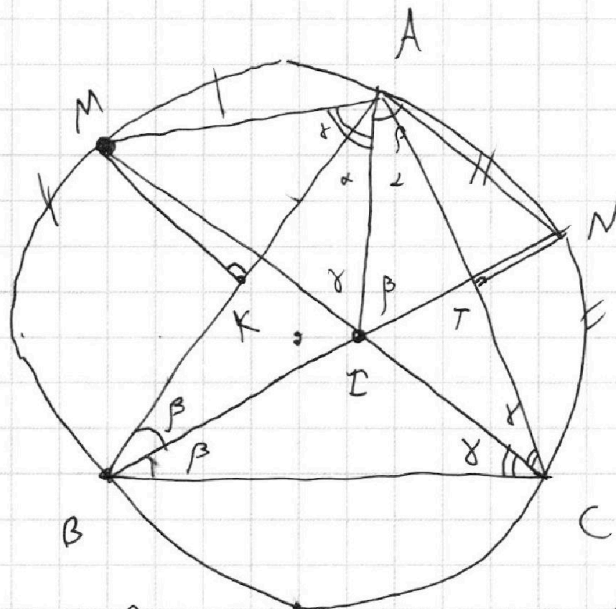
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$

14



$$\frac{MK}{\sin(\delta - \alpha)} = MA$$

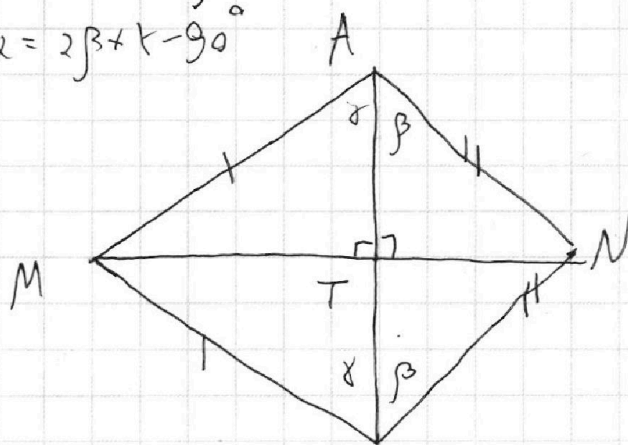
$$\frac{AN \cdot NT}{\sin(\beta - \alpha)} = AN$$

$$\delta + \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \delta - \beta$$

$$\delta - \alpha = 2\delta - 90^\circ + \beta$$

$$\beta - \alpha = 2\beta + \delta - 90^\circ$$



$$AM^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\delta) =$$

$$= MT \cdot AT \cdot \frac{1}{2}$$

$$2AM^2(1 - \cos(180^\circ - 2\delta)) = AT^2$$

~~AT~~

$$AT = AM \cdot \cos \delta$$

$$AT = AN \cdot \cos \beta$$

$$AM \cos \delta = \frac{2}{\sin(\delta - \alpha)} \cdot \cos \delta = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \cos \beta$$

$$\frac{2}{\sin(90^\circ - (\beta + 2\delta))} \cdot \cos \delta = \frac{1}{\sin(90^\circ - (\beta + \delta))} \cdot \cos \beta$$

$$\frac{2}{\cos(\beta + 2\delta)} \cdot 2 \cos \delta \cos(\beta + 2\delta) = \cos \beta \cos(\beta + 2\delta)$$

$$\cos(2\beta + 2\delta) + \cos(2\beta) = \frac{1}{2} (\cos(2\beta + 2\delta) + \cos(2\delta))$$