



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Дважды рассмотрим, в каких степенях 2 и 7 входит в a, b и c .

Пусть: $a = 2^x \cdot 7^k \cdot \alpha$, где α, β, γ - множители, не содержащие 2 и 7.
 $b = 2^y \cdot 7^l \cdot \beta$
 $c = 2^z \cdot 7^m \cdot \gamma$ (2 и 7 - взаимно простые числа)

Тогда из условия:

$$ab : 2^{14} \Rightarrow x + y \geq 14$$

$$bc : 2^{17} \Rightarrow y + z \geq 17 \quad (1)$$

$$ca : 2^{20} \Rightarrow z + x \geq 20$$

Аналогично для 7-ки:

$$ab : 7^{10} \Rightarrow k + l \geq 10$$

$$bc : 7^{17} \Rightarrow l + m \geq 17 \quad (2)$$

$$ca : 7^{37} \Rightarrow m + k \geq 37$$

Пробы abc будут минимальными, степеней вхождения 2 и 7 в это число будут минимальными ($\Rightarrow x + y + z \rightarrow \min$ и $k + l + m \rightarrow \min$), α, β, γ примкнут наименьшее возможное значение - 1.

$$x + z \geq 20 \Rightarrow x + y + z \geq 20, \text{ т.к. } x, y, z \geq 0$$

$$\text{достигается при } x = 14, z = 17$$

$$x + y + z \geq 31 \quad - \text{ если сумма } x + z = 20, \text{ то } y \geq 1,$$

$$\text{тогда } x + y + z \geq 31; \text{ если сумма } x + z = 31, \text{ то } y \geq 0,$$

$$\text{тогда } x + y + z \geq 31; \text{ если сумма } x + z > 31, \text{ то } x + y + z > 31$$

$$\Rightarrow \text{минимальное значение при } x + y + z = 31$$

и достигается при $x = 14, z = 17, y = 0$, удовлетворяющим всем неравенствам (1).

Аналогично для 7-ки:

$$k + m \geq 37 \Rightarrow k + m + l \geq 37. \quad \text{т.к. } k, m, l \geq 0$$

$$k = 10, l = 0, m = 27, \text{ удовлетворяет (2).}$$

Значит, наименьшее возможное значение для abc :

$$7^{10} \cdot 7^0 \cdot 7^{27} \cdot 2^{14} \cdot 2^0 \cdot 2^{17} = 7^{37} \cdot 2^{31}$$

Ответ: $abc = 2^{31} \cdot 7^{37}$ - наименьшее значение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$.

Умножим и знаменатель и числитель дроби

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} \quad \text{можно сократить}$$

на m , $\Rightarrow a+b = km$,
 $k \in \mathbb{N}$

Тогда
$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} = \frac{km}{(km)^2 - 8ab}$$

$\Rightarrow 8ab : m$. Заметим, что $\text{НОД}(a, m) = 1$ и $\text{НОД}(b, m) = 1$,

т.к. иначе $\text{НОД}(a, m) = t \Rightarrow a+b = k \cdot m$
(аналогично для $\text{НОД}(b, m) = t$) $\Rightarrow b : t \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = t$
- противоречие

$\Rightarrow$ максимальное значение для $m = 8$.

Это достигается, например, при $a=1$ и $b=7$.

$$\frac{1+7}{(1+7)^2 - 8 \cdot 7}$$

$\frac{8}{8}$

Ответ: $m = 8$ - максимальное значение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

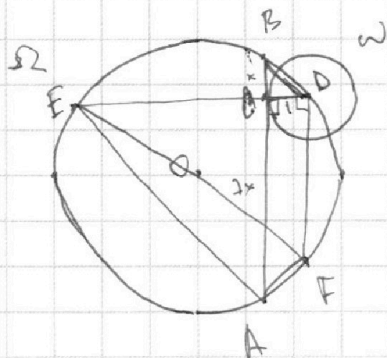
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3 again N 3.



Dave..

$$(\tau, D) \text{ - generic w, } (\in \text{ orig. } \Omega)$$

$$AC : CB = 7$$

$$n(\omega) = 1$$

$$R(\Omega) = 5$$

AB-7

Beispiel: $\text{Alkohol } R_2C=O$, Aldehyd
 $CA = 2X$ (ungesättigter Kohlenstoff)

Программ DC за пересечени с Ω бт.Е.

$$\angle ABD = \angle AED = \frac{1}{2} \angle AOD$$

have been since you

$\Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle CBD$ по 2-м углам

$\angle ECA = \angle BCD = 90^\circ$

т.к. $BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - каретерное к ω)
 $b + c$

$$\Rightarrow BC \cdot CA = EC \cdot CD$$

(negative)

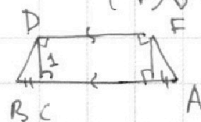
$$\Rightarrow 7x^2 = EC \cdot 1 \Rightarrow EC = 7x^2$$

Apobesin DF 11BA

$$DF \models BA \Rightarrow DF \models ED \text{ (KBALED)}$$

DF 11BA ~ ~~11BA~~ 2018 ~ 2

2) BDFA - p/s Transition

$$(B \cup D = FA).$$


BC = x, BA = 8x

$$\Rightarrow DF = 8x - x - x = 6x.$$

$\angle EDF = 90^\circ$ (по свойству) и

Вывести, 2, EF - геометрия Ω

To resolve this paradox: $ED^2 + DF^2 = EF$

$$(7x^2 + 1)^2 + (6x)^2 = (5+5)^2$$

$$49x^4 + 14x^2 + 1 + 36x^2 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$(x^2 - 1)(49x^2 + 99) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \quad ; \quad AB = 8x = 8$$

Of her: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Пусть $2x^2 - 5x + 3 = a$, $2 - 7x = b$.

Тогда:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \quad \Rightarrow \quad a \geq 0; \quad a \geq b$$

$$\sqrt{a} + b = \sqrt{a-b} \quad \uparrow^2$$

$$a - 2\sqrt{a}b + b^2 = a - b$$

$$b^2 - 2\sqrt{a}b = -b$$

1) $b = 0$ - yes. 2) $b \neq 0$

1) $b = 0$ $2 - 7x = 0$ $x = \frac{2}{7}$ - yes.

2) $b \neq 0$

$$b - 2\sqrt{a} = -1$$

$$b + 1 = 2\sqrt{a}$$

$$b + 1 \geq 0$$

$$3 - 7x \geq 0$$

$$x \leq \frac{3}{7}$$

$$b^2 + 2b + 1 = 4a$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) = (2 - 7x)^2 + 2 \cdot (2 - 7x) + 1$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 4 - 14x + 49x^2 + 4 - 14x + 1$$

$$41x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 64 + 492 = 556 = 4 \cdot 139$$

$$x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{139}}{82}$$

- не год.

$$\frac{8 - 2\sqrt{139}}{41} < \frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{8 + 2\sqrt{139}}{82}$$

- не год.

$$28 - 7\sqrt{139} < 123 \quad \text{- верно}$$

$$\frac{4 + \sqrt{139}}{41} < \frac{3}{7} \quad 1$$

$$4 + \sqrt{139} < 41$$

$$\sqrt{139} < 37$$

$$139 < 37^2 \quad \text{- верно}$$

$$\frac{4 + \sqrt{139}}{41} \geq \frac{3}{7}$$

$$7\sqrt{139} \geq 95 \quad \text{- неверно}$$

$$\Rightarrow \text{не год}$$

$$\Rightarrow x_2 < \frac{3}{7}$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

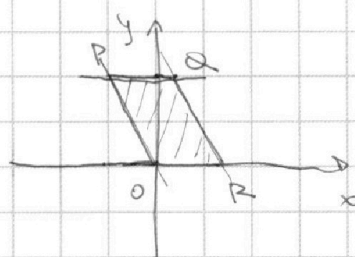
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12.$$

Параметры на трассе

заданы следующими неравенствами:

$$y \geq 0 \quad y \leq 24$$

(выше OR) (~~ниже~~ ниже PQ)

$$y \leq 30 - 2x$$

(ниже QR)

$$y \geq -2x$$

(выше PO)

→ координаты точек A и B

выбрав вершину этих неравенств.

$$2x + y \leq 30$$

$$2x + y \geq 0.$$

Или тогда

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

$$\begin{array}{cc} \wedge & \vee \\ 30 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \wedge & \vee \\ 24 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30; 0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 28$$

Для каждого значения $2x_2 + y_2$ однозначно определяется сумма $2x_1 + y_1$.

Вариантов выбора $2x_1 + y_1 = 29$ (от 0 до 28 включительно)

Для каждого $2x_1 + y_1 = t$, $y_1 = t - 2x_1$, $t \in [0; 28]$ и целое

$$\Rightarrow x_1 \in [0; 14] \text{ и целое.}$$

На любом отрезке нашей прямой $y = t - 2x$, ограниченной параметрами, находим 13 точек, удовлетворяющих условиям. (учитывая шаг от 0 до 24 включительно с шагом 2.)

Значит, свободен выбрать значение y_2

$2x_1 + y_1 = 29$, выбрать такие x_1 и y_1 - 13 способов,

и выбрать координаты x_2 и y_2 - тоже 13 способов,

итого всего способов $29 \cdot 13 \cdot 13$.

Ответ: всего таких пар точек $29 \cdot 13^2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

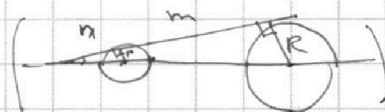
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \sqrt{R^2 + (n+m)^2} - \sqrt{R^2 + n^2} = 8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{n+m} = \frac{R}{n} = \frac{2}{n+m} = \frac{1}{n}$$



$$\Rightarrow 2n = n+m \Rightarrow n=m$$

$$\sqrt{4 + n^2} - \sqrt{1 + n^2} = 8$$

$$2\sqrt{1 + n^2} - \sqrt{1 + n^2} = 8$$

$$\sqrt{1 + n^2} = 8$$

$$1 + n^2 = 64 \quad n = \sqrt{63}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{n} = \frac{1}{\sqrt{63}} = a$$

4) Прямая симметрична относительно ox ,

$$\Rightarrow a = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}, a_2 = -\frac{1}{\sqrt{63}}, a_3 = \frac{3}{\sqrt{55}}, a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

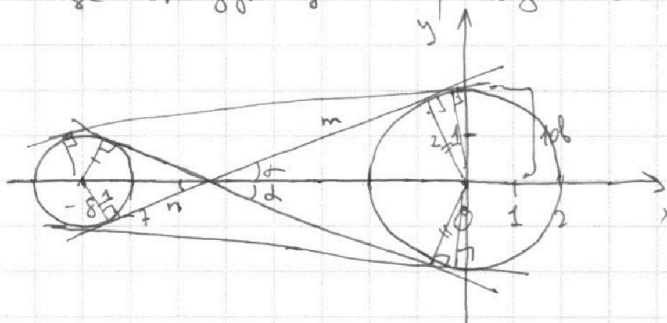
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе неравенство системы решается в виде следующего рисунка:



Окружности: $(x+8)^2 + y^2 - 1 = R^2$
 $x^2 + y^2 - 4 = R^2$

При этом нам известны точки, лежащие внутри кругов и на поверхностях окружностей. (Поверхности внутри круга — не окружности даёт отрицательное значение Δ соотв. скобки, точка на окружности даёт значение скобки = 0.)

Значит, что первое равенство задаёт прямую $y = ax + 10b$. По условию у этой прямой и обеих окружностей должны быть две общие точки

(чтобы было ^{полю} два решения). Значит, эта прямая должна касаться каждой из этих двух окружностей. Значит, где a есть все 4 варианта.

$a = \pm \tan \alpha$ (Заметим, что в криве выбирается: см. рисунок.)

1) По теореме Пифагора:

$$\sqrt{8^2 + m^2} + \sqrt{4^2 + h^2} = 8$$

из подобия треугольников:

$$\tan \alpha = \frac{2}{m} = \frac{1}{h} \quad 2h = m$$

$$\sqrt{4 + 4h^2} + \sqrt{1 + h^2} = 8$$

$$2 \cdot \sqrt{1 + h^2} + \sqrt{1 + h^2} = 8$$

$$3 \cdot \sqrt{1 + h^2} = 8 \quad 1 + h^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$a = \tan \alpha = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{6\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{55}} \Leftrightarrow h = \sqrt{7\frac{1}{3} - 1}$$

2) Прямая симметрична относительно Ox

$$\Rightarrow a = -\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

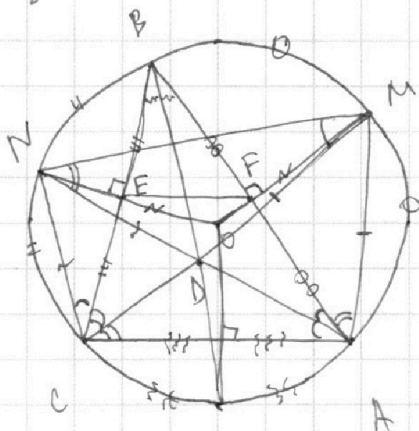
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.



AD = ?

MF = 4,5; NE = 2

Решение:

$$MF^2 + FA^2 = MA^2 \quad (\text{по Пифагору})$$

$$NE^2 + EC^2 = NC^2$$

$$BF \cdot FA = FM \cdot (2R - FM) \quad (\text{пересечение хорд})$$

$$BE \cdot EC = NE \cdot (2R - NE)$$

$$4,5^2 + FA^2 = MA^2$$

$$2^2 + EC^2 = NC^2$$

$$FA^2 = 4,5 \cdot (2R - 4,5)$$

$$EC^2 = 2 \cdot (2R - 2)$$

$$4,5^2 + 4,5^2 + 4,5 \cdot 2R = MA^2$$

$$2^2 - 2^2 + 4R = NC^2$$

$$MA^2 = 9R$$

$$NC^2 = 4R$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{MA}{NC} \quad (\text{из подобия } \triangle CND \text{ и } \triangle DMA)$$

$$\frac{AD^2}{CD^2} = \frac{MA^2}{NC^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow AD:CD = 3:2$$

$$2AD = 3CD$$

$\square DEBF$ - вписанный, т.к.

$\angle OEB = 90^\circ$ и $\angle OFD = 90^\circ$ - противоположные



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution for a geometry problem involving a sphere and a tetrahedron.

Diagrams:

- Top left: A sphere with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, A1, B1, C1, D1, E1, F1, G1, H1, I1, J1, K1, L1, M1, N1, O1, P1, Q1, R1, S1, T1, U1, V1, W1, X1, Y1, Z1, A2, B2, C2, D2, E2, F2, G2, H2, I2, J2, K2, L2, M2, N2, O2, P2, Q2, R2, S2, T2, U2, V2, W2, X2, Y2, Z2, A3, B3, C3, D3, E3, F3, G3, H3, I3, J3, K3, L3, M3, N3, O3, P3, Q3, R3, S3, T3, U3, V3, W3, X3, Y3, Z3, A4, B4, C4, D4, E4, F4, G4, H4, I4, J4, K4, L4, M4, N4, O4, P4, Q4, R4, S4, T4, U4, V4, W4, X4, Y4, Z4, A5, B5, C5, D5, E5, F5, G5, H5, I5, J5, K5, L5, M5, N5, O5, P5, Q5, R5, S5, T5, U5, V5, W5, X5, Y5, Z5, A6, B6, C6, D6, E6, F6, G6, H6, I6, J6, K6, L6, M6, N6, O6, P6, Q6, R6, S6, T6, U6, V6, W6, X6, Y6, Z6, A7, B7, C7, D7, E7, F7, G7, H7, I7, J7, K7, L7, M7, N7, O7, P7, Q7, R7, S7, T7, U7, V7, W7, X7, Y7, Z7, A8, B8, C8, D8, E8, F8, G8, H8, I8, J8, K8, L8, M8, N8, O8, P8, Q8, R8, S8, T8, U8, V8, W8, X8, Y8, Z8, A9, B9, C9, D9, E9, F9, G9, H9, I9, J9, K9, L9, M9, N9, O9, P9, Q9, R9, S9, T9, U9, V9, W9, X9, Y9, Z9, A10, B10, C10, D10, E10, F10, G10, H10, I10, J10, K10, L10, M10, N10, O10, P10, Q10, R10, S10, T10, U10, V10, W10, X10, Y10, Z10, A11, B11, C11, D11, E11, F11, G11, H11, I11, J11, K11, L11, M11, N11, O11, P11, Q11, R11, S11, T11, U11, V11, W11, X11, Y11, Z11, A12, B12, C12, D12, E12, F12, G12, H12, I12, J12, K12, L12, M12, N12, O12, P12, Q12, R12, S12, T12, U12, V12, W12, X12, Y12, Z12, A13, B13, C13, D13, E13, F13, G13, H13, I13, J13, K13, L13, M13, N13, O13, P13, Q13, R13, S13, T13, U13, V13, W13, X13, Y13, Z13, A14, B14, C14, D14, E14, F14, G14, H14, I14, J14, K14, L14, M14, N14, O14, P14, Q14, R14, S14, T14, U14, V14, W14, X14, Y14, Z14, A15, B15, C15, D15, E15, F15, G15, H15, I15, J15, K15, L15, M15, N15, O15, P15, Q15, R15, S15, T15, U15, V15, W15, X15, Y15, Z15, A16, B16, C16, D16, E16, F16, G16, H16, I16, J16, K16, L16, M16, N16, O16, P16, Q16, R16, S16, T16, U16, V16, W16, X16, Y16, Z16, A17, B17, C17, D17, E17, F17, G17, H17, I17, J17, K17, L17, M17, N17, O17, P17, Q17, R17, S17, T17, U17, V17, W17, X17, Y17, Z17, A18, B18, C18, D18, E18, F18, G18, H18, I18, J18, K18, L18, M18, N18, O18, P18, Q18, R18, S18, T18, U18, V18, W18, X18, Y18, Z18, A19, B19, C19, D19, E19, F19, G19, H19, I19, J19, K19, L19, M19, N19, O19, P19, Q19, R19, S19, T19, U19, V19, W19, X19, Y19, Z19, A20, B20, C20, D20, E20, F20, G20, H20, I20, J20, K20, L20, M20, N20, O20, P20, Q20, R20, S20, T20, U20, V20, W20, X20, Y20, Z20, A21, B21, C21, D21, E21, F21, G21, H21, I21, J21, K21, L21, M21, N21, O21, P21, Q21, R21, S21, T21, U21, V21, W21, X21, Y21, Z21, A22, B22, C22, D22, E22, F22, G22, H22, I22, J22, K22, L22, M22, N22, O22, P22, Q22, R22, S22, T22, U22, V22, W22, X22, Y22, Z22, A23, B23, C23, D23, E23, F23, G23, H23, I23, J23, K23, L23, M23, N23, O23, P23, Q23, R23, S23, T23, U23, V23, W23, X23, Y23, Z23, A24, B24, C24, D24, E24, F24, G24, H24, I24, J24, K24, L24, M24, N24, O24, P24, Q24, R24, S24, T24, U24, V24, W24, X24, Y24, Z24, A25, B25, C25, D25, E25, F25, G25, H25, I25, J25, K25, L25, M25, N25, O25, P25, Q25, R25, S25, T25, U25, V25, W25, X25, Y25, Z25, A26, B26, C26, D26, E26, F26, G26, H26, I26, J26, K26, L26, M26, N26, O26, P26, Q26, R26, S26, T26, U26, V26, W26, X26, Y26, Z26, A27, B27, C27, D27, E27, F27, G27, H27, I27, J27, K27, L27, M27, N27, O27, P27, Q27, R27, S27, T27, U27, V27, W27, X27, Y27, Z27, A28, B28, C28, D28, E28, F28, G28, H28, I28, J28, K28, L28, M28, N28, O28, P28, Q28, R28, S28, T28, U28, V28, W28, X28, Y28, Z28, A29, B29, C29, D29, E29, F29, G29, H29, I29, J29, K29, L29, M29, N29, O29, P29, Q29, R29, S29, T29, U29, V29, W29, X29, Y29, Z29, A30, B30, C30, D30, E30, F30, G30, H30, I30, J30, K30, L30, M30, N30, O30, P30, Q30, R30, S30, T30, U30, V30, W30, X30, Y30, Z30, A31, B31, C31, D31, E31, F31, G31, H31, I31, J31, K31, L31, M31, N31, O31, P31, Q31, R31, S31, T31, U31, V31, W31, X31, Y31, Z31, A32, B32, C32, D32, E32, F32, G32, H32, I32, J32, K32, L32, M32, N32, O32, P32, Q32, R32, S32, T32, U32, V32, W32, X32, Y32, Z32, A33, B33, C33, D33, E33, F33, G33, H33, I33, J33, K33, L33, M33, N33, O33, P33, Q33, R33, S33, T33, U33, V33, W33, X33, Y33, Z33, A34, B34, C34, D34, E34, F34, G34, H34, I34, J34, K34, L34, M34, N34, O34, P34, Q34, R34, S34, T34, U34, V34, W34, X34, Y34, Z34, A35, B35, C35, D35, E35, F35, G35, H35, I35, J35, K35, L35, M35, N35, O35, P35, Q35, R35, S35, T35, U35, V35, W35, X35, Y35, Z35, A36, B36, C36, D36, E36, F36, G36, H36, I36, J36, K36, L36, M36, N36, O36, P36, Q36, R36, S36, T36, U36, V36, W36, X36, Y36, Z36, A37, B37, C37, D37, E37, F37, G37, H37, I37, J37, K37, L37, M37, N37, O37, P37, Q37, R37, S37, T37, U37, V37, W37, X37, Y37, Z37, A38, B38, C38, D38, E38, F38, G38, H38, I38, J38, K38, L38, M38, N38, O38, P38, Q38, R38, S38, T38, U38, V38, W38, X38, Y38, Z38, A39, B39, C39, D39, E39, F39, G39, H39, I39, J39, K39, L39, M39, N39, O39, P39, Q39, R39, S39, T39, U39, V39, W39, X39, Y39, Z39, A40, B40, C40, D40, E40, F40, G40, H40, I40, J40, K40, L40, M40, N40, O40, P40, Q40, R40, S40, T40, U40, V40, W40, X40, Y40, Z40, A41, B41, C41, D41, E41, F41, G41, H41, I41, J41, K41, L41, M41, N41, O41, P41, Q41, R41, S41, T41, U41, V41, W41, X41, Y41, Z41, A42, B42, C42, D42, E42, F42, G42, H42, I42, J42, K42, L42, M42, N42, O42, P42, Q42, R42, S42, T42, U42, V42, W42, X42, Y42, Z42, A43, B43, C43, D43, E43, F43, G43, H43, I43, J43, K43, L43, M43, N43, O43, P43, Q43, R43, S43, T43, U43, V43, W43, X43, Y43, Z43, A44, B44, C44, D44, E44, F44, G44, H44, I44, J44, K44, L44, M44, N44, O44, P44, Q44, R44, S44, T44, U44, V44, W44, X44, Y44, Z44, A45, B45, C45, D45, E45, F45, G45, H45, I45, J45, K45, L45, M45, N45, O45, P45, Q45, R45, S45, T45, U45, V45, W45, X45, Y45, Z45, A46, B46, C46, D46, E46, F46, G46, H46, I46, J46, K46, L46, M46, N46, O46, P46, Q46, R46, S46, T46, U46, V46, W46, X46, Y46, Z46, A47, B47, C47, D47, E47, F47, G47, H47, I47, J47, K47, L47, M47, N47, O47, P47, Q47, R47, S47, T47, U47, V47, W47, X47, Y47, Z47, A48, B48, C48, D48, E48, F48, G48, H48, I48, J48, K48, L48, M48, N48, O48, P48, Q48, R48, S48, T48, U48, V48, W48, X48, Y48, Z48, A49, B49, C49, D49, E49, F49, G49, H49, I49, J49, K49, L49, M49, N49, O49, P49, Q49, R49, S49, T49, U49, V49, W49, X49, Y49, Z49, A50, B50, C50, D50, E50, F50, G50, H50, I50, J50, K50, L50, M50, N50, O50, P50, Q50, R50, S50, T50, U50, V50, W50, X50, Y50, Z50, A51, B51, C51, D51, E51, F51, G51, H51, I51, J51, K51, L51, M51, N51, O51, P51, Q51, R51, S51, T51, U51, V51, W51, X51, Y51, Z51, A52, B52, C52, D52, E52, F52, G52, H52, I52, J52, K52, L52, M52, N52, O52, P52, Q52, R52, S52, T52, U52, V52, W52, X52, Y52, Z52, A53, B53, C53, D53, E53, F53, G53, H53, I53, J53, K53, L53, M53, N53, O53, P53, Q53, R53, S53, T53, U53, V53, W53, X53, Y53, Z53, A54, B54, C54, D54, E54, F54, G54, H54, I54, J54, K54, L54, M54, N54, O54, P54, Q54, R54, S54, T54, U54, V54, W54, X54, Y54, Z54, A55, B55, C55, D55, E55, F55, G55, H55, I55, J55, K55, L55, M55, N55, O55, P55, Q55, R55, S55, T55, U55, V55, W55, X55, Y55, Z55, A56, B56, C56, D56, E56, F56, G56, H56, I56, J56, K56, L56, M56, N56, O56, P56, Q56, R56, S56, T56, U56, V56, W56, X56, Y56, Z56, A57, B57, C57, D57, E57, F57, G57, H57, I57, J57, K57, L57, M57, N57, O57, P57, Q57, R57, S57, T57, U57, V57, W57, X57, Y57, Z57, A58, B58, C58, D58, E58, F58, G58, H58, I58, J58, K58, L58, M58, N58, O58, P58, Q58, R58, S58, T58, U58, V58, W58, X58, Y58, Z58, A59, B59, C59, D59, E59, F59, G59, H59, I59, J59, K59, L59, M59, N59, O59, P59, Q59, R59, S59, T59, U59, V59, W59, X59, Y59, Z59, A60, B60, C60, D60, E60, F60, G60, H60, I60, J60, K60, L60, M60, N60, O60, P60, Q60, R60, S60, T60, U60, V60, W60, X60, Y60, Z60, A61, B61, C61, D61, E61, F61, G61, H61, I61, J61, K61, L61, M61, N61, O61, P61, Q61, R61, S61, T61, U61, V61, W61, X61, Y61, Z61, A62, B62, C62, D62, E62, F62, G62, H62, I62, J62, K62, L62, M62, N62, O62, P62, Q62, R62, S62, T62, U62, V62, W62, X62, Y62, Z62, A63, B63, C63, D63, E63, F63, G63, H63, I63, J63, K63, L63, M63, N63, O63, P63, Q63, R63, S63, T63, U63, V63, W63, X63, Y63, Z63, A64, B64, C64, D64, E64, F64, G64, H64, I64, J64, K64, L64, M64, N64, O64, P64, Q64, R64, S64, T64, U64, V64, W64, X64, Y64, Z64, A65, B65, C65, D65, E65, F65, G65, H65, I65, J65, K65, L65, M65, N65, O65, P65, Q65, R65, S65, T65, U65, V65, W65, X65, Y65, Z65, A66, B66, C66, D66, E66, F66, G66, H66, I66, J66, K66, L66, M66, N66, O66, P66, Q66, R66, S66, T66, U66, V66, W66, X66, Y66, Z66, A67, B67, C67, D67, E67, F67, G67, H67, I67, J67, K67, L67, M67, N67, O67, P67, Q67, R67, S67, T67, U67, V67, W67, X67, Y67, Z67, A68, B68, C68, D68, E68, F68, G68, H68, I68, J68, K68, L68, M68, N68, O68, P68, Q68, R68, S68, T68, U68, V68, W68, X68, Y68, Z68, A69, B69, C69, D69, E69, F69, G69, H69, I69, J69, K69, L69, M69, N69, O69, P69, Q69, R69, S69, T69, U69, V69, W69, X69, Y69, Z69, A70, B70, C70, D70, E70, F70, G70, H70, I70, J70, K70, L70, M70, N70, O70, P70, Q70, R70, S70, T70, U70, V70, W70, X70, Y70, Z70, A71, B71, C71, D71, E71, F71, G71, H71, I71, J71, K71, L71, M71, N71, O71, P71, Q71, R71, S71, T71, U71, V71, W71, X71, Y71, Z71, A72, B72, C72, D72, E72, F72, G72, H72, I72, J72, K72, L72, M72, N72, O72, P72, Q72, R72, S72, T72, U72, V72, W72, X72, Y72, Z72, A73, B73, C73, D73, E73, F73, G73, H73, I73, J73, K73, L73, M73, N73, O73, P73, Q73, R73, S73, T73, U73, V73, W73, X73, Y73, Z73, A74, B74, C74, D74, E74, F74, G74, H74, I74, J74, K74, L74, M74, N74, O74, P74, Q74, R74, S74, T74, U74, V74, W74, X74, Y74, Z74, A75, B75, C75, D75, E75, F75, G75, H75, I75, J75, K75, L75, M75, N75, O75, P75, Q75, R75, S75, T75, U75, V75, W75, X75, Y75, Z75, A76, B76, C76, D76, E76, F76, G76, H76, I76, J76, K76, L76, M76, N76, O76, P76, Q76, R76, S76, T76, U76, V76, W76, X76, Y76, Z76, A77, B77, C77, D77, E77, F77, G77, H77, I77, J77, K77, L77, M77, N77, O77, P77, Q77, R77, S77, T77, U77, V77, W77, X77, Y77, Z77, A78, B78, C78, D78, E78, F78, G78, H78, I78, J78, K78, L78, M78, N78, O78, P78, Q78, R78, S78, T78, U78, V78, W78, X78, Y78, Z78, A79, B79, C79, D79, E79, F79, G79, H79, I79, J79, K79, L79, M79, N79, O79, P79, Q79, R79, S79, T79, U79, V79, W79, X79, Y79, Z79, A80, B80, C80, D80, E80, F80, G80, H80, I80, J80, K80, L80, M80, N80, O80, P80, Q80, R80, S80, T80, U80, V80, W80, X80, Y80, Z80, A81, B81, C81, D81, E81, F81, G81, H81, I81, J81, K81, L81, M81, N81, O81, P81, Q81, R81, S81, T81, U81, V81, W81, X81, Y81, Z81, A82, B82, C82, D82, E82, F82, G82, H82, I82, J82, K82, L82, M82, N82, O82, P82, Q82, R82, S82, T82, U82, V82, W82, X82, Y82, Z82, A83, B83, C83, D83, E83, F83, G83, H83, I83, J83, K83, L83, M83, N83, O83, P83, Q83, R83, S83, T83, U83, V83, W83, X83, Y83, Z83, A84, B84, C84, D84, E84, F84, G84, H84, I84, J84, K84, L84, M84, N84, O84, P84, Q84, R84, S84, T84, U84, V84, W84, X84, Y84, Z84, A85, B85, C85, D85, E85, F85, G85, H85, I85, J85, K85, L85, M85, N85, O85, P85, Q85, R85, S85, T85, U85, V85, W85, X85, Y85, Z85, A86, B86, C86, D86, E86, F86, G86, H86, I86, J86, K86, L86, M86, N86, O86, P86, Q86, R86, S86, T86, U86, V86, W86, X86, Y86, Z86, A87, B87, C87, D87, E87, F87, G87, H87, I87, J87, K87, L87, M87, N87, O87, P87, Q87, R87, S87, T87, U87, V87, W87, X87, Y87, Z87, A88, B88, C88, D88, E88, F88, G88, H88, I88, J88, K88, L88, M88, N88, O88, P88, Q88, R88, S88, T88, U88, V88, W88, X88, Y88, Z88, A89, B89, C89, D89, E89, F89, G89, H89, I89, J89, K89, L89, M89, N89, O89, P89, Q89, R89, S89, T89, U89, V89, W89, X89, Y89, Z89, A90, B90, C90, D90, E90, F90, G90, H90, I90, J90, K90, L90, M90, N90, O90, P90, Q90, R90, S90, T90, U90, V90, W90, X90, Y90, Z90, A91, B91, C91, D91, E91, F91, G91, H91, I91, J91, K91, L91, M91, N91, O91, P91, Q91, R91, S91, T91, U91, V91, W91, X91, Y91, Z91, A92, B92, C92, D92, E92, F92, G92, H92, I92, J92, K92, L92, M92, N92, O92, P92, Q92, R92, S92, T92, U92, V92, W92, X92, Y92, Z92, A93, B93, C93, D93, E93, F93, G93, H93, I93, J93, K93, L93, M93, N93, O93, P93, Q93, R93, S93, T93, U93, V93, W93, X93, Y93, Z93, A94, B94, C94, D94, E94, F94, G94, H94, I94, J94, K94, L94, M94, N94, O94, P94, Q94, R94, S94, T94, U94, V94, W94, X94, Y94, Z94, A95, B95, C95, D95, E95, F95, G95, H95, I95, J95, K95, L95, M95, N95, O95, P95, Q95, R95, S95, T95, U95, V95, W95, X95, Y95, Z95, A96, B96, C96, D96, E96, F96, G96, H96, I96, J96, K96, L96, M96, N96, O96, P96, Q96, R96, S96, T96, U96, V96, W96, X96, Y96, Z96, A97, B97, C97, D97, E97, F97, G97, H97, I97, J97, K97, L97, M97, N97, O97, P97, Q97, R97, S97, T97, U97, V97, W97, X97, Y97, Z97, A98, B98, C98, D98, E98, F98, G98, H98, I98, J98, K98, L98, M98, N98, O98, P98, Q98, R98, S98, T98, U98, V98, W98, X98, Y98, Z98, A99, B99, C99, D99, E99, F99, G99, H99, I99, J99, K99, L99, M99, N99, O99, P99, Q99, R99, S99, T99, U99, V99, W99, X99, Y99, Z99, A100, B100, C100, D100, E100, F100, G100, H100, I100, J100, K100, L100, M100, N100, O100, P100, Q100, R100, S100, T100, U100, V100, W100, X100, Y100, Z100, A101, B101, C101, D101, E101, F101, G101, H101, I101, J101, K101, L101, M101, N101, O101, P101, Q101, R101, S101, T101, U101, V101, W101, X101, Y101, Z101, A102, B102, C102, D102, E102, F102, G102, H102, I102, J102, K102, L102, M102, N102, O102, P102, Q102, R102, S102, T102, U102, V102, W102, X102, Y102, Z102, A103, B103, C103, D103, E103, F103, G103, H103, I103, J103, K103, L103, M103, N103, O103, P103, Q103, R103, S103, T103, U103, V103, W103, X103, Y103, Z103, A104, B104, C104, D104, E104, F104, G104, H104, I104, J104, K104, L104, M104, N104, O104, P104, Q104, R104, S104, T104, U104, V104, W104, X104, Y104, Z104, A105, B105, C105, D105, E105, F105, G105, H105, I105, J105, K105, L105, M105, N105, O105, P105, Q105, R105, S105, T105, U105, V105, W105, X105, Y105, Z105, A106, B106, C106, D106, E106, F106, G106, H106, I106, J106, K106, L106, M106, N106, O106, P106, Q106, R106, S106, T106, U106, V106, W106, X106, Y106, Z106, A107, B107, C107, D107, E107, F107, G107, H107, I107, J107, K107, L107, M107, N107, O107, P107, Q107, R107, S107, T107, U107, V107, W107, X107, Y107, Z107, A108, B108, C108, D108, E108, F108, G108, H108, I108, J108, K108, L108, M108, N108, O108, P108, Q108, R108, S108, T108, U108, V108, W108, X108, Y108, Z108, A109, B109, C109, D109, E109, F109, G109, H109, I109, J109, K109, L109, M109, N109, O109, P109, Q109, R109, S109, T109, U109, V109, W109, X109, Y109, Z109, A110, B110, C110, D110, E110, F110, G110, H110, I110, J110, K110, L110, M110, N110, O110, P110, Q110, R110, S110, T110, U110, V110, W110, X110, Y110, Z110, A111, B111, C111, D111, E111, F111, G111, H111, I111, J111, K111, L111, M111, N111, O111, P111, Q111, R111, S111, T111, U111, V111, W111, X111, Y111, Z111, A112, B112, C112, D112, E112, F112, G112, H112, I112, J112, K112, L112, M112, N112, O112, P112, Q112, R112, S112, T112, U112, V112, W112, X112, Y112, Z112, A113, B113, C113, D113, E113, F113, G113, H113, I113, J113, K113, L113, M113, N113, O113, P113, Q113, R113, S113, T113, U113, V113, W113, X

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Упрощение

1) a, b, c - натур.

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}, bc : 2^{14} \cdot 7^{12}, ac : 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{matrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \\ 2^k & 2^l & 2^m \end{matrix}$$

мин abc - ?

$$\begin{aligned} x+y &\geq 14 & k+l &\geq 10 \\ y+z &\geq 14 & l+m &\geq 12 \\ z+x &\geq 20 & k+m &\geq 32 \end{aligned}$$

мин $x+y+z$ - ?

мин $k+l+m$ - ?

$$z+x \geq 20$$

$$\Rightarrow y = mk$$

$$x+2y+z \geq 31$$

$$\Rightarrow y \geq 1$$

$$\text{пу } y = 1$$

$$x+y = 21$$

$$x = 14, z = 17, y = 1$$

$$x+1 \geq 14$$

$$z+1 \geq 14$$

$$z+x \geq 20$$

$$x = 14, z = 16, y = 1$$

$$\Rightarrow 31$$

$$k+m \geq 32$$

$$k+2l+m \geq 22$$

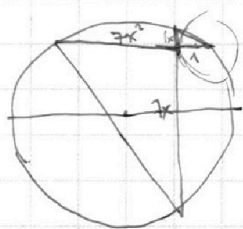
$$k+l \geq 10$$

$$32 = 16 + 16$$

$$k = 10$$

$$m = 22$$

$$k+m = 32$$



2) $\frac{a}{b}$ натур (а, b ∈ натур)

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$a \geq b$$

$$a \geq b \Rightarrow a^2 - 6ab + b^2 \geq 0$$

наим m, n, k, p

$$a+b : m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 : k$$

$$a+b : m, a+b = mk$$

$$m - \text{наим } m$$

$$mk$$

$$(mk)^2 - 8ab$$

$$: m$$

$$8ab : m \Rightarrow m \mid 8ab$$

$$a+b = 8ab$$

m и a не имеют общих делителей.

$$\Rightarrow m \mid 8$$

$$a+b = 8k$$

$$8$$

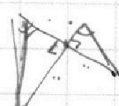
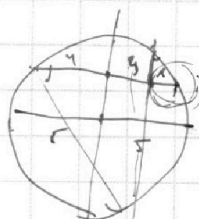
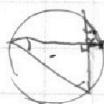
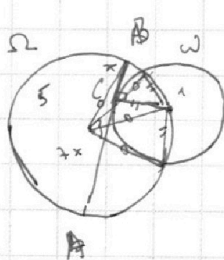
$$8k$$

$$64k^2 - 8ab$$

$$64 - 8k$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{1}{7} \Rightarrow BC = CA$$

$$\frac{BC}{CB} = \frac{EC}{CA} \Rightarrow \frac{BC}{CB} = \frac{BC}{CA}$$



$$\frac{1-x^2}{49x^2+49x} = \frac{1}{49x}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b$$

$$\sqrt{a} + b = \sqrt{a-b}$$

$$a + 2\sqrt{a-b} + b^2 = a-b$$

$$2\sqrt{a-b} + b^2 = -b$$

$$2\sqrt{a-b} + b = -1$$

$$2\sqrt{a-b} = -(1+b)$$

$$4(a-b) = 1 + 2b + b^2$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 1 + 2 \cdot (2 - 7x) + (2 - 7x)^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 1 + 4 - 14x + 4 - 28x + 49x^2$$

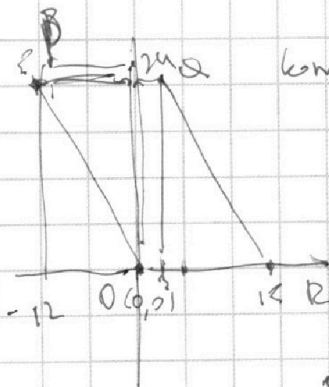
$$0 = 41x^2 - 22x - 3$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 - 4 \cdot 41 \cdot (-3) = 484 + 492 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x_1 = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82}$$

$$x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{82}$$



Комплексные корни $A(x_1, y_1)$
 $B(x_2, y_2)$

$$x_1 = y_1 = 0$$

Второй корень найдем

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2 \cdot \frac{1}{49} = \frac{10}{7} + 3$$

$$\frac{8}{49} = \frac{20}{49} + \frac{1}{49}$$

$$4 + \sqrt{135}$$

$$8 + 2\sqrt{135}$$

$$123$$

$$4 + \sqrt{135}$$

$$41$$

$$\frac{1}{2} \quad 1 \quad 1\frac{1}{2}$$

$$41$$

$$13$$

$$41$$