



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $a \leq 2^{14} 7^{10}$ ,  $b \leq 2^{17} 7^{17}$ ,  $a \leq 2^{20} 7^{37}$ , тогда:

$$a^2 b^2 c^2: 2^{51} 7^{64}, \text{ т.е. } (abc)^2: 2^{51} 7^{64}$$

$abc \in \mathbb{N}$ , т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , тогда  $abc$  будет минимальным

натур. числом  $\sqrt{2^{51} 7^{64}} = 7^{32} 2^{25} \sqrt{2}$ , ~~состоит~~  
из произведения  
только из 2 и 7, и это будет  $7^{32} 2^{26}$

Ответ:  $abc$  - минимальное  
значение это  $7^{32} 2^{26}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-5x+3-(7x-2)} = 2-7x \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-5x+3-(2-7x)} = 2-7x \quad (\Rightarrow)$$

$$t = 2x^2-5x+3$$

$$m = 2-7x$$

$$(\Rightarrow) \sqrt{t} - \sqrt{t-m} = m \quad (\Rightarrow) \sqrt{t} = m + \sqrt{t-m} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) t = m^2 + 2m\sqrt{t-m} + t - m \quad (\Rightarrow) m^2 - m + 2m\sqrt{t-m} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} m-1 = -2\sqrt{t-m} \\ m=0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m^2-2m+1 = 4t-4m \quad (\Rightarrow) \\ m=0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} m \leq 1 \\ m^2+2m+1 = 4t \\ m=0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} m \leq 1 \\ (m+1)^2 = 4t \quad t = 2x^2-5x+3 \quad (\Rightarrow) \\ m=0 \quad m = 2-7x \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} 2-7x \leq 1 \\ (2-7x+1)^2 = 4(2x^2-5x+3) \quad (\Rightarrow) \\ 2-7x=0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 9-42x+49x^2 = 8x^2-20x+12 \quad (\Rightarrow) \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 41x^2-22x-3=0 \quad (\Rightarrow) \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{22 \pm \sqrt{121 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{2 \cdot 41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

См. упр. 1  
См. упр. 2





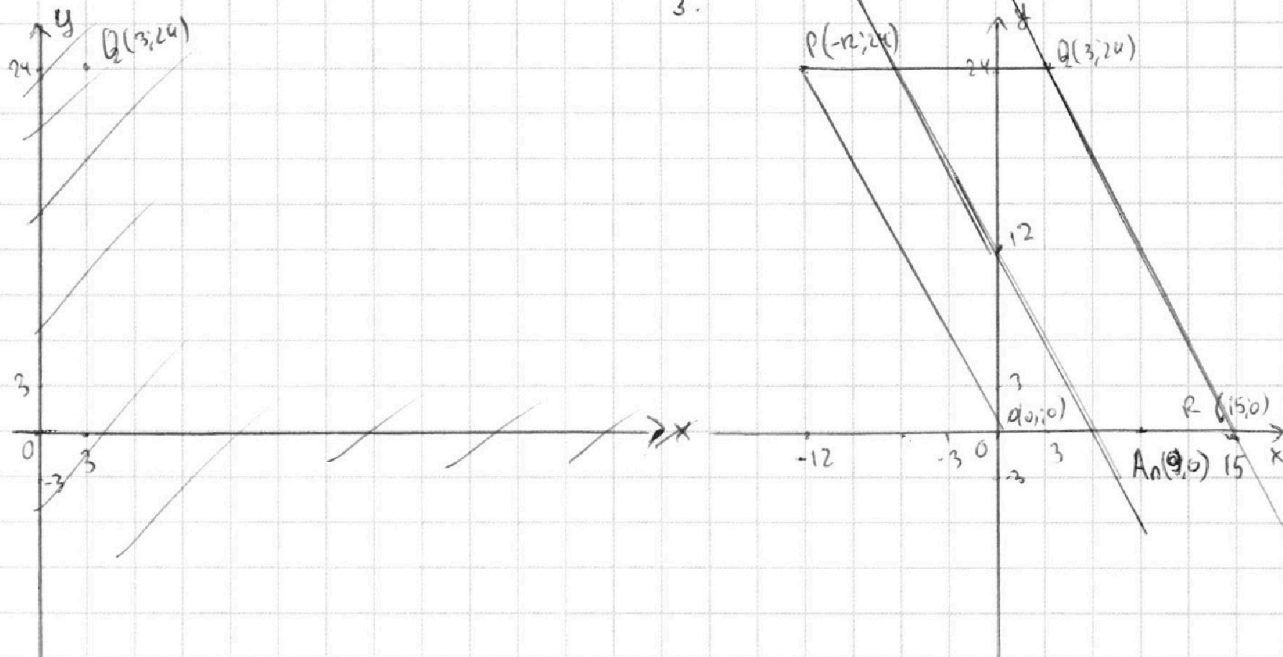
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 12 + (2x_1 + y_1)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 12 - 2(x_2 - x_1)$$

нарисуем прямую:  $y = 12 - 2x$

$A_n \in P \in Q \in R$

тогда нам подходит все такое точки, что  $C(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

лежит на этой прямой

и тогда заметим, что для  $A_1(0,0)$  подходит все  $B$  точки

с учетом уравнения на  $y$  прямой:  $y = 12 - 2x$ , для

для  $A_2(1,0)$  все точки на прямой  $y = 10 - 2x$ , для

т.е. для  $A_n(1,0)$ , для которых подходит  $10 - 2x = y$

и мы используем из этих прямых. Будет в принципе не будет входить в партию, поэтому будет равна кон-во точек  $-4 \cdot 3 = 12$

тогда для 9 точек  $A_n$  все будет  $12 \cdot 9 = 108$

Теперь заметим, что если мы будем рассматривать точки

$B_1(0,0), B_2(-1,2), B_3(-2,4), \dots, B_n(-12,24)$  то для них

всех будет по 108 точек, т.е. всего кон-во  $-108 \cdot 12 = 1296$

Ответ: 1296 пар точек  $A_n B_n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax - 10b \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \quad \text{①} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 \geq 1$  - график всех точек не входящих в круг, с центром в  $(-8; 0)$  и радиусом 1

$x^2 + y^2 \leq 4$  - график всех точек, лежащих в круге с центром в  $(0; 0)$  и радиусом 2  
тогда их пересечение - окружность в  $(0; 0)$  с рад. 2

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$  - график всех точек круга с центром в  $(-8; 0)$  и рад. 1

$x^2 + y^2 \geq 4$  - график всех точек не входящих в круг, с центром в  $(0; 0)$  и рад. 2  
тогда их пересек. это окруж. в  $(-8; 0)$  с рад. 1

Заметим, что прямые 4 и 3 будут симметричны отн. ОХ и прямой 1 и 2

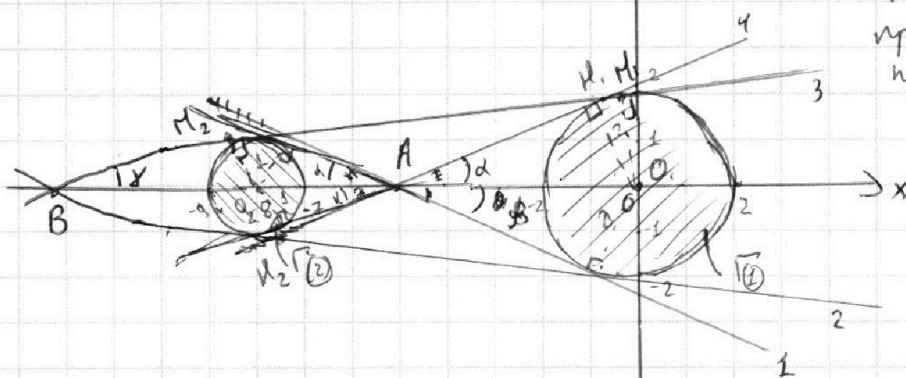
в окружность (станете перпендикулярны).

Построим график, тогда в графике будут прямые  $ax + y + 10b = 0$ , будут прямые 1, 2, 3, 4 (с групп.)

т.е. они все касаются окружности, то будут или будут принадлежать прямой касательной, которая касается окруж.

расстояние до центров окружностей от этой прямой будет равно их радиусу.

или будет принадлежать прямой, которая касается окруж.  $\begin{cases} ax + y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$



1)  $\text{O}_2$  - рад. окр. с центром в  $(-8; 0)$   
2)  $\text{O}_1$  - рад. окр. с центром в  $(0; 0)$

3) А - точка пересечения прямых 4 и 1  
на прямой  $ax + y + 10b = 0$ , т.е. в центре  
прямой  $ax + y + 10b = 0$   
они перпендикулярны вектору того, т.к. симметричны отн. ОХ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(7) 
$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+9)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0 \\ \end{cases}$$

(1) проведем высоты в центры обеих окружностей и из центра  $O_1$  проведем перпендикуляр к прямой  $AK_2$ , они будут равны радиусам соответств. окружностей  $(O_1K_1$  и  $O_2K_2)$

так как  $AK_2$  — хорда окружности  $O_2$ , то  $AK_2 \perp O_2K_2$

из центра  $O_1$ :  $AO_1^2 = AK_1^2$   $\begin{cases} \angle O_1AK_2 = \angle O_1AK_1, \text{ (верт.)} \\ \angle O_2K_2A = \angle O_1K_1A (=90^\circ) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2K_2A \sim O_1K_1A \Rightarrow$

$\Rightarrow AK_2 : AK_1 = O_2K_2 : O_1K_1 = 1 : 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} AK_2 = \frac{8}{3} \\ AK_1 = \frac{16}{3} \end{cases}$

из центра  $O_2$ :  $AO_2^2 = AK_2^2 + O_2K_2^2$ , тогда  $3^2 - 4 = x^2$

$\Rightarrow \frac{16^2 - 3^2 - 4}{3^2} = x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{(16-3)(16+3)}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{22 \cdot 19}}{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{55}}{3}$

тогда  $\tan \alpha = \frac{2}{\frac{2\sqrt{55}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$

из св-ва касательной к окружности:  $ax + 10b = y$ ,  $\tan \alpha = \frac{1}{a}$ , значит

$a = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2) В-точки пересечения прямых 3 и 2 с осью  $Ox$ , они принадлежат одной прямой, т.к. симметричны относительно  $Ox$ .

проведем высоты из центров на прямую 4 -  $O_1M_1$  и  $O_2M_2$ ,

они равны радиусам соотв. окр.

1)  $M_1O_1B$  и  $M_2O_2B$

$$\left. \begin{array}{l} \angle M_2BO_2 = 90^\circ \\ \angle BM_2O_2 = \angle BM_1O_1 (=90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BM_2O_2 \sim \triangle BM_1O_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO_1 : BO_2 = OM_1 : OM_2 = 2 : 1 \Rightarrow BO_1 = 2BO_2 (=8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BO_1 = BO_2 + O_2O_1 \\ BO_1 = 2BO_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BO_2 = 8 \\ BO_1 = 16 \end{cases}$$

из г. Пифагора:  $BO_2^2 = M_2O_2^2 + BM_2^2 \Rightarrow 8^2 = 1^2 + BM_2^2 \Rightarrow BM_2 = \sqrt{63}$

Тогда  $\tan \gamma = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{63}}{63}$

из свойств графика  $y = ax + b$ ,  $\tan \gamma = \frac{\sqrt{63}}{63}$ , а значит

в силу симметрии  $a$  может принимать значения  $\pm \frac{\sqrt{63}}{63}$

итого  $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$

Ответ:  $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \left( \frac{3\sqrt{4R-9}}{2} \right)^2 &= 9x + 20,25 \quad (\Rightarrow) 9(4R-9) = 18x + 40,5 \quad (\Rightarrow) \\ x &= R - 4,5 \\ (\Rightarrow) 36R - 81 &= 18R - 18 \cdot 4,5 + 40,5 \quad 36R - 40,5 = 18R - 81 - \\ R & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \left( 2\sqrt{R-2} \right)^2 &= 2(R-2) \quad (\Rightarrow) 4(R-2) = 4(R-2) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\tilde{AM} = \tilde{MB}$ , т.к.  $M$  - сеп.  $AB$   
 $\tilde{AN} = \tilde{NC}$ , т.к.  $N$  - сеп.  $AC$

$AO_2$  - ?

$MK_1 = 4,5$ , т.к.  $MK_1$  - ради.

$NK_2 = 2$ , т.к.  $NK_2$  - ради.

$O_1$  - центр опис. окруж.

1) Тогда по теореме о границе равн. члв.:

$$\begin{cases} AK_1 = K_1B \\ \text{т.к. } A, B, K_1 \in MO_1 \end{cases}$$

$$\text{аналог. } \begin{cases} AK_2 = K_2C \\ K_2 \in AC \end{cases}$$

2) проведем  $AO_2$  до пересеч. с  $BC$

$$(M = BC \cap AO_2)$$

тогда, т.к.  $O_2$  лежит на медиане  $ABC$  т.к.  $SO_2$  - впис. окруж.

$$BM = MC$$

$$\text{т.к. } O_2 \text{ - центр пересеч. мед., то } AO_2 : O_2M = 2 : 1 \Rightarrow AO_2 = \frac{2}{3}AM$$

обозначим  $K_1O_1$  за  $x$ , тогда  $x + 4,5 = R$

( $R$  - ради. опис. окруж.)

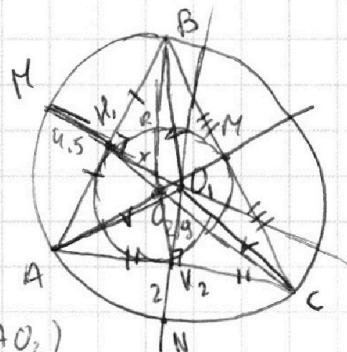
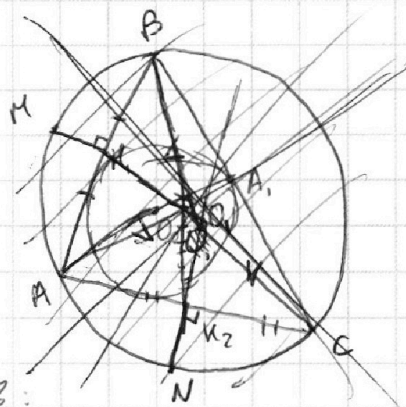
обозначим  $O_1K_2$  за  $y$ , тогда  $y + 2 = R$

$$2) \begin{cases} x^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 \quad (K_1 \in AK_1O_1) \\ y^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = R^2 \quad (K_2 \in AK_2O_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - 9R + 20,25 = R^2 - \frac{AB^2}{4} \\ R^2 - 4R + 16 = R^2 - \frac{AC^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36R - AB^2 = 81 \\ 416R - AC^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 36R - 81 \\ AC^2 = 416R - 16 \end{cases} \begin{matrix} AC > 0 \\ AB > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3\sqrt{4R-9} \\ AC = 4\sqrt{R-1} \end{cases}$$

$$AK_2 : K_2C = 2(2R-2) : 2$$

$$AK_1 : K_1B = 4,5 : (2x + 4,5) \quad (\text{т.к. } O_1 \text{ - центр опис. окруж.}) \Leftrightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2(x+0,5)^2 + 0,5} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-3) + 2(x+0,5)^2 + 0,5 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = (2-7x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = 4 - 28x + 49x^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = 4 - 28x + 49x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5x(9x-5))^2 = 4(x-1)(2x-3)(2x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$25x^2(81x^2 - 90x + 25) = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$25 \cdot 81 \cdot x^4 - 90 \cdot 25 \cdot x^3 + 25^2 \cdot x^2 = m^2(m^2 + 2m + 1) + 4m^2 - 4m^2 - 4m^2 =$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 + 3x - 2 = (x-1)(2x-3) + (3x-2) =$$

$$2x^2 + 2x + 1 = (2x^2 - 5x + 3) + (7x - 2) =$$

$$(x-1)(2x-3) = (2x-7x)$$

$$(x-1)(2x-3) + (x-1)(2x-3)(24-7x) = t^2 - tm$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t-m} = m \Leftrightarrow t = m^2 + t - m + 2mt - m \Leftrightarrow m^2 - m = -2mt + m \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 4 + 4m$$

$$\Leftrightarrow t + t - m - \sqrt{t(t-m)} = m^2 \Leftrightarrow m^2 - 2t + m = 2\sqrt{t(t-m)} \Leftrightarrow$$

$$m^2 + 2m + 1 = 4 + 4m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad a, b, c : 2^{14} 7^{10}, \quad b, c : 2^{12} 7^{17}, \quad a, c : 2^{20} 7^{37}$$

т.к. ~~не~~ ~~нужно~~ ~~минимальное~~ ~~значение~~ ~~приведения~~ ~~abc~~, ~~или~~  
нужно, чтобы:  $ab = 2^{14} 7^{10}$ ,  $bc = 2^{12} 7^{17}$ ,  $ac = 2^{20} 7^{37}$ ; т.к. если

они будут больше, то

$$\begin{cases} ab : 2^{14} 7^{10} \\ bc : 2^{12} 7^{17} \\ ac : 2^{20} 7^{37} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{54} 7^{151}$$

$$\frac{a}{b} + 1 : \frac{2^{16}}{7} = k$$

$$\frac{2+7}{4-6-2-7+49} = \frac{9}{53-84} =$$

$$a = bk \quad b^2 k = k+1$$

$$\begin{cases} ab : 2^{14} 7^{10} \\ bc : 2^{12} 7^{17} \\ ac : 2^{20} 7^{37} \end{cases}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^3 7^7} \Rightarrow a = c \cdot 2^3 7^7 = \frac{9}{-31}$$

$$\frac{ab}{b^2 k} = \frac{a+b}{b^2 k} = \frac{a+b}{b^2 k}$$

$$ab = m \cdot 2^{14} 7^{10} \quad ab : k$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \\ m : m \end{cases}$$

$$a = m+b$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{m+b}{ab} = \frac{m+b}{ab}$$

$$\frac{2^{14} 7^{10} c}{b m} = 2^{20} 7^{37} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ 8ab : m \end{cases}$$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 8ab}{a^2 + b^2 + 2ab - 8ab}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} =$$

$$\frac{8}{b^2 k}$$

$$a = kb$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} =$$

$$\frac{b(k+1)}{b^2(k+1)^2 - 8b^2 k} = \frac{b(k+1)}{b^2(k+1)^2 - 8b^2 k}$$

$$\frac{k+1}{b((k+1)^2 - 8k)} = \frac{k+1}{b(k^2 + 2k + 1 - 8k)}$$

$$= \frac{k+1}{b(k^2 + 2k + 1 - 8k)} = \frac{k+1}{b(k^2 - 6k + 1)}$$

$$\begin{cases} a+b = mt \\ 8ab = km \end{cases}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b} = k$$

