МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc \vdots 2^{17} 7^{18}$, $ac \vdots 2^{23} 7^{39} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$

т.к. $a^2b^2c^2$ является квадратом, то все его простые делители при разложении на множители имеют четную степень $\Rightarrow$ т.к. $a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{56} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc \vdots 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow$ так как

~~Наименьшее натуральное~~ $a, b, c \in \mathbb{N}$, то

$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow$ наименьшее значение abc – это $2^{28} 7^{34}$.

$2^{28} \cdot 7^{34} \vdots 2^{28} 7^{34} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$ подходит.

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Leftrightarrow (a,b)=1 \Rightarrow (a+b;ab)=1$ (т.к. $a+b$ не делится ни на один из делителей a или b, а ab - это произведение a и b)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$(a+b;ab)=1 \Rightarrow ((a+b)^2;ab)=1 \Rightarrow$ т.к. $(ab;(a+b)^2)=1$, то единственный множитель, который можно вынести за скобку в знаменателе это $9 \Rightarrow$ наибольшее m - это 9

Пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{4}{5}$ - несократима

$$\frac{4+5}{(4+5)^2-9\cdot4\cdot5}=\frac{9}{9(9-20)}=\frac{1}{-11}$$

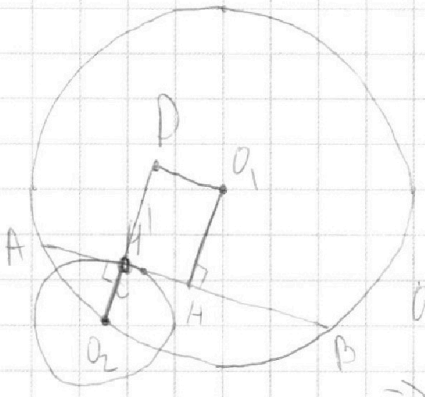
Ответ: $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



1) H. $H \in [AB]$ & $O_1H \perp AD$

O_1 – центр Ω O_2 – центр ω

$O_1A = O_1B = 13 \Rightarrow$ т.к. O_1H – высота, то

O_1H – медиана и бисс (св-во р/б $\triangle$)

$\Rightarrow AH = HB$

2) H': $O_2H' \perp AB$, $H' \in [AB]$ $\Rightarrow AH' = 7x$, $H'B = 17x \Rightarrow AB = 24x$

$\Rightarrow AH = HB = 12x \Rightarrow H'H = 5x$

продолжим O_2H' до D: $H'D = O_1H$. т.к. $O_2H' \parallel O'H$, то

$H'DO'H$ – $\square \Rightarrow DO_1 = H'H = 5x$.

по т. Пиф. $O_1H = \sqrt{13^2 - (12x)^2} = \sqrt{169 - 144x^2}$

по т. Пиф. $O_1O_2 = \sqrt{(DO_2)^2 + (DO_1)^2} = \sqrt{(7 + \sqrt{169 - 144x^2})^2 + (5x)^2} =$

$= \sqrt{49 + 169 - 144x^2 + 14\sqrt{169 - 144x^2} + 25x^2} = 13$ т.к. O_2O_1 – радиус Ω

$49 + \cancel{169} - 119x^2 + 14\sqrt{169 - 144x^2} = \cancel{169} \Leftrightarrow 119x^2 - 49 = 14\sqrt{169 - 144x^2}$

$f(x) = 119x^2 - 49$ ~~$g(x) = \sqrt{169 - 144x^2}$~~ $g(x) = 169 - 144x^2$

$f(x) \downarrow [-\infty; 0]$, $g(x) \uparrow [-\infty; 0]$ (св-ва кв. функции) $\Rightarrow$

на этом промежутке 1 корень. ~~$f(x) \uparrow [0; +\infty)$ & $g(x)$~~

т.к. $\sqrt{x} \circ g(x)$ не может монотонно (св-ва комп.),

и может только область определения $D(\sqrt{x} \circ g(x)) = [-\frac{13}{12}; \frac{13}{12}]$

Аналогично $f(x) \uparrow [0; +\infty)$, $g(x) \downarrow [0; +\infty) \Rightarrow$ 1 корень тоже

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

прямыми.

т.к. нас не интересует $x \leq 0$, то у уравнения

$119x^2 - 49 = 14\sqrt{169 - 14nx^2}$ только 1 пересечение, поэтому

$x = 1$. $\left.\begin{array}{l} 119 \cdot 1^2 - 49 = 70 \\ 14\sqrt{169 - 14n \cdot 1^2} = 70 \end{array}\right| \Rightarrow x = 1$ - это корень

$\Rightarrow$ т.к. $AB = 2nx$, то $AB = 2n$

Ответ: $2n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

] $t=3x^2+3x+1$, $k=1-9x$. Тогда:

$\sqrt{t+k}-\sqrt{t}=k \Leftrightarrow \begin{cases} t+k=k^2+2\sqrt{t}k+t \\ \cancel{k\geq 0}\ \sqrt{t}+k\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k(1-k)}{2}=\sqrt{t}k \\ \sqrt{t}+k\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{k^2-2k+1}{2} \\ t\geq 0 \\ \cancel{k\geq 0}\ \sqrt{t}+k\geq 0 \\ k=0 \end{cases}$ Подставим x вместо k и t $\begin{cases} 3x^2+3x+1=\frac{81x^2-18x+1-2+18x+1}{2} \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \text{ - верно всегда (для любого x)} \\ \cancel{1-9x\geq 0}\ \cancel{1-9x\geq 0}\ \sqrt{3x^2+3x+1}+1-9x\geq 0 \\ 1=9x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 37{,}5x^2-3x-1=0 \\ \cancel{x<\frac{1}{9}}\ \sqrt{3x^2+3x+1}+1-9x\geq 0 \\ x=\frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{159}}{2} \\ \sqrt{3x^2+3x+1}+1-9x\geq 0 \\ \cancel{x<\frac{1}{9}} \\ x=\frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3-\sqrt{159}}{2};\frac{1}{9}\right\}$

Ответ: $\left\{\frac{3-\sqrt{159}}{2};\frac{1}{9}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

в силу параллельности ГМТ и (OP)$_a$ =>
для каждого ~~как~~ следующего ряда
будет столько же точек как и для
предыдущего.

В ряду с $y=0$ пар было $14+126=140$
=> т.к. всего 14 рядов (только четные у отсо
26) то всего вариантов точек

$140 \cdot 14 = 1960$

Ответ: 1960 пар точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Напишем уравнение прямой (OP) и (RQ)

$\frac{x}{-13} = \frac{y}{26}$ (=) $y = -2x$ — (OP)

$\frac{x-3}{13} = \frac{y-26}{-26}$ (=) $y = -2x + 32$ — (RQ)

Зафиксируем точку с коорд. значами $(x_1; y_1)$

Тогда ГМТ удовлетворяющие уравнению $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1$

=14 будет являться прямой. $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ (=) $y_2 = y_1 + 2x_1 - 2x_2 + 14$

эта прямая || (OP) и (RQ) ~~она удалена от точки~~

~~$x_1; y_1$~~

Просмотрим все точки с целыми коорд. значами в #. ~~сначала~~ будем идти по строкам снизу вверх, ~~и слева~~ слева направо.

1) (0;0). ~~и~~ выберем точку $(x_2; y_2)$ с наименьшим значением по y. ~~тогда~~ (оно равно 0 т.к. если ниже то уже не в #) это точка (7; 0). Заметим что при ~~увеличении~~ уменьшении x на 1 y будет оставаться целым, а если ~~увеличивать~~ на нецелое число, ~~то~~ а это наименьшее целое число

~~т.к. $2x_1, y_1$ и 14 — это целые числа, то y должно быть целым~~ ~~($y = y_1 + 2x_1 - 2x + 14$)~~ то x будет целым (?!)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

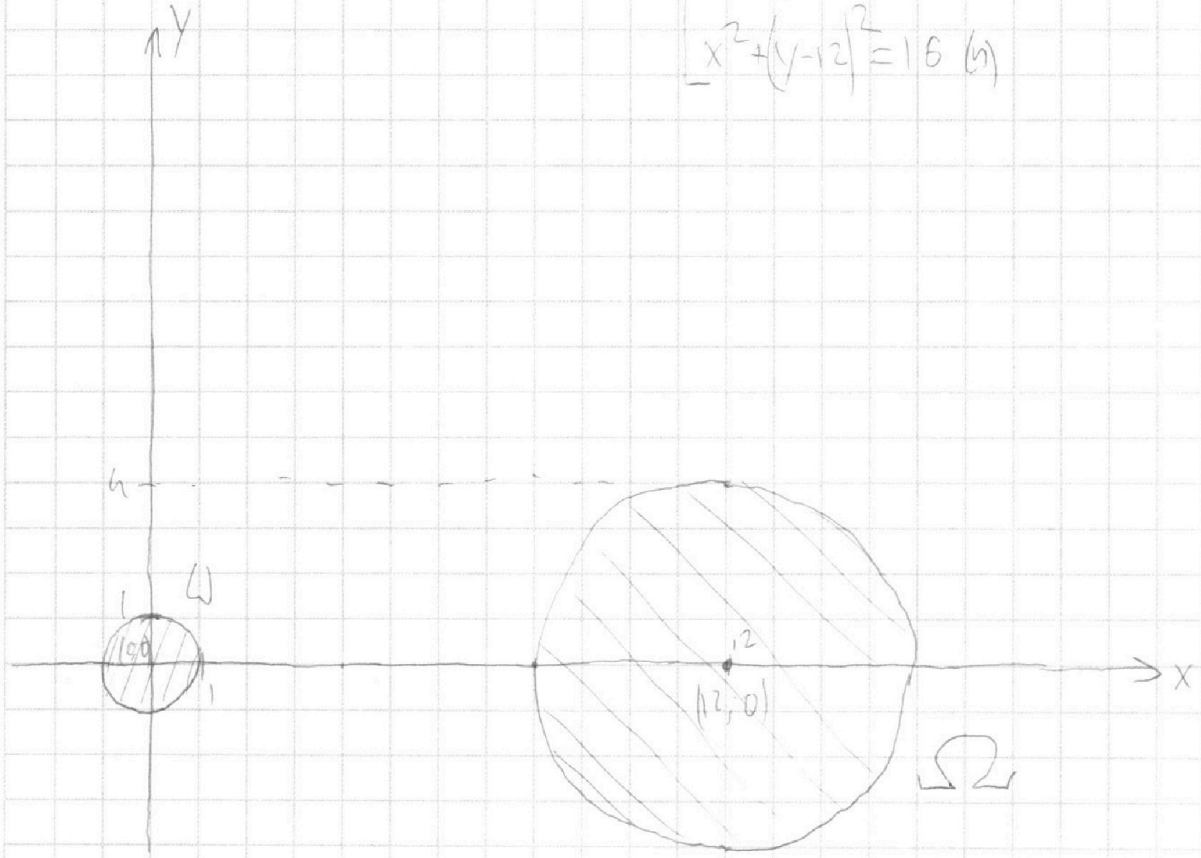
$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x^2+(y-12)^2-16>0 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+(y-12)^2-16<0 \end{cases} (2) \\ x^2+y^2-1=0 \quad (3) \\ x^2+(y-12)^2=16 \quad (4) \end{array}\right.$

Заметим, что $x^2+y^2=1$ – ур-е окр.

$x^2+(y-12)^2=16$ – ур-е окр.

Изобразим в коорд. осях



(1) система ~~[illegible]~~ это пересечение всей плоскости без Ω и ее окружности и окрестности ω без ее окрестности //// – эта область

(2) система аналогично, но Ω и ω поменять местами ((плоскость без ω) $\cap$ Ω) \\\\ – эта область

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} e=1 \\ c=\frac{5}{12} \end{cases} \\ \begin{cases} e=1 \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} e=-1 \\ c=-\frac{5}{12} \end{cases} \\ \begin{cases} e=-1 \\ c=\frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

тогда получаем 4 пр. (т.к. пр. в парн. могут выражать коэф. перед x)

$$\frac{5}{12}x+\frac{\sqrt{119}}{12}y+1=0 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{119}}x+y+\frac{12}{\sqrt{119}}=0$$

$$-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{15}}{16}+1=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{15}}x+y+\frac{16}{\sqrt{15}}=0$$

$$-\frac{5}{12}x+\frac{\sqrt{119}}{12}y-1=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{\sqrt{119}}x+y-\frac{12}{\sqrt{119}}=0$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{15}}{16}-1=0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{15}}x+y-\frac{16}{\sqrt{15}}=0$$

Таким образом множество $a \in \left\{\frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{4\sqrt{15}}{15}\right\}$

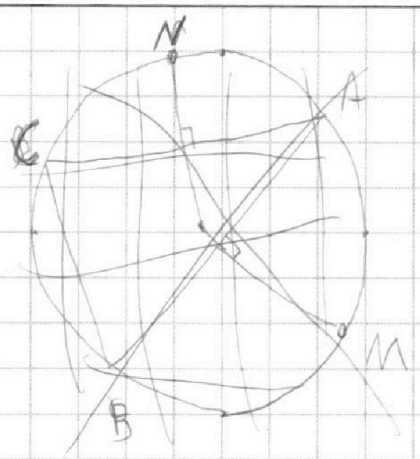
Ответ: $a \in \left\{-\frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{5\sqrt{119}}{119}\right\}$

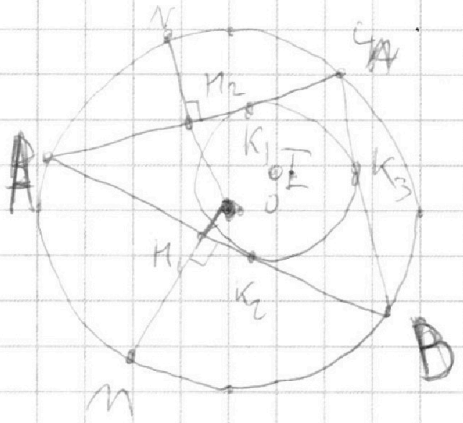
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





По условию $NM_2=2,5$; $NM_1=5$.

$\cup AM=\cup MB \Rightarrow AM=MB \Rightarrow \triangle AMB$ - р/б $\Rightarrow NM_1$ - мед, бисс.

Аналогично NM_2 - медиана и бис. для $\triangle ANC$

тогда $AM_2=M_2C$. У $\triangle AOC$. $AO=OC=r \Rightarrow AOC$ - р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. OM_2 - медиана, то OM_2 - бис., высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow OM_2 \perp AC \Rightarrow (\cdot) M_2 \in [NO]$. Аналогично $(\cdot) M_1 \in [MO]$

$]OA=r$. тогда $OM_1=r-5 \Rightarrow \cos\angle M_1OB=\frac{r-5}{r}=1-\frac{5}{r}$

$\cos\angle AOB=\cos 2\angle M_1OB=1-1+\frac{10}{r}-\frac{25}{r^2}=\frac{10r-25}{r^2}$

~~Аналогично~~ тогда: AB по т. кос. $AB=\sqrt{2r^2-2r^2\cdot\frac{10r-25}{r^2}}=$

$=r\sqrt{\frac{r^2-10r+25}{r^2}}=r\frac{r+5}{r}=r+5$

Аналогично $AC=r+2,5$. ~~$\cos\angle$~~ ~~$\cos\angle$~~

$]I$ - центр описанной окружности, а точки касания - это K_1, K_2, K_3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\exists AK_1 = x$. тогда $CK_1 = r+2,5-x \Rightarrow CK_3 = r+2,5-x$,

~~$\Rightarrow BK_3 =$~~ $AK_2 = x \Rightarrow BK_2 = r+5-x \Rightarrow BK_3 = r+5-x$.

тогда $CB = 2r+7,5-2x$.

~~cos~~ мы знаем $\cos\angle AOM$, $\cos\angle AON$.

$\angle AOM = \frac{1}{2} \cup AB$, $\angle AON = \frac{1}{2} \cup AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup CB$, то $\angle CAB = \angle AON + \angle AOM$.

~~из косинусов~~ мы можем также найти

синусы из прям $\triangle OH_1B$ и $\triangle OH_2C$.

тогда можно найти $\cos\angle CAB$ и выразить

~~CAB без~~ CB без x. из этого можно найти x

также зная x и $\angle IAB$ ($\angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB$) можно

из тригонометрии найти IA.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{159}$

$\frac{9+3\sqrt{159}}{2}$

$+\ 427$

504

$126+4{,}5\sqrt{159}$

$ax+y+b=x^2+y^2+1$

$3\cdot 64$

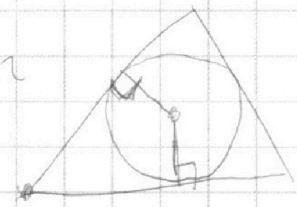
$2x^2(1-\cos\beta)=5x-6{,}25$

$192+2n+1$

$1{,}5^2=2{,}25$

$\cos\beta=\frac{6{,}25-5x-2x^2}{2x^2}$

217



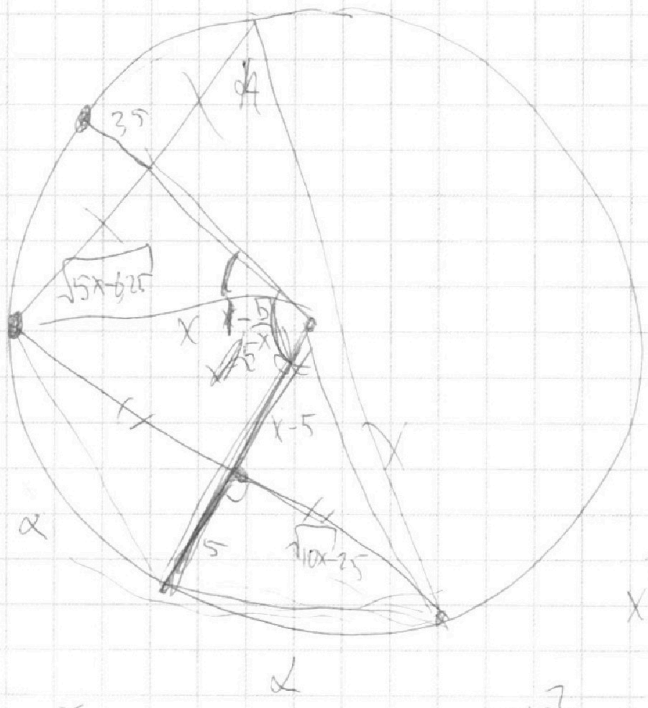
$r-5$

$r-2{,}5$

$\cos$

$\frac{r-5}{r}$ $\frac{r-2{,}5}{r}$

$1-\frac{5}{r}$ $1-\frac{2{,}5}{r}$

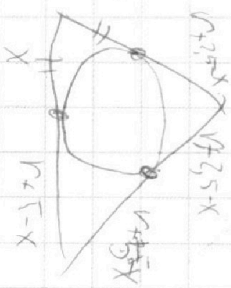


$1-2\cos^2\alpha$

$x^2-x^2+\sqrt{10x-25}$

$2x^2-2\cos\alpha\, x^2=10x-2{,}5$

$2x^2(1-\cos\alpha)=10x-2{,}5$



$\cos\alpha=\frac{2{,}5-10x-2x^2}{2x^2}$ $1-\cos\alpha=\frac{5}{x}-\frac{2{,}5}{2x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ab $\quad b\ 7$ $\quad 12$

$2\ 3$ $\quad 2\ 3$

$\{a; b\}$ $\{b; a\}$

$ax+by+c=0$

$(x_0; y_0)$

$|ax_0+by_0+c|=1$

$-bx_0+ay_0=0$

$ay_0=bx_0$ $\quad x_0=\frac{a}{b}y_0$

$ax_0+by_0+c=0$

$\frac{a^2}{b}y_0+by_0+c=0$

$\frac{a^2}{b}y_0+by_0=-c$

$y_0=-c$

$y=1$ $\quad y=-1$

$c=-\frac{1}{5}$

$\frac{rp}{2}$

$rp=5$

$\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$

$(-1;1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{55}\cdot 7^{68}$

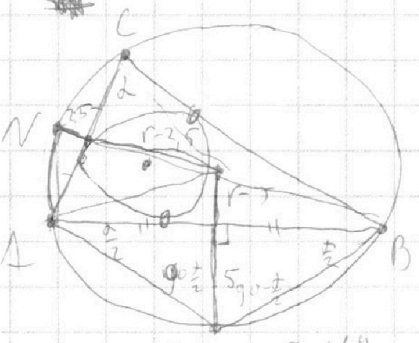
40,5

32
23
55

$\frac{81}{2}$

$abc \vdots 2^{28}\cdot 7^{34}$

$a+b$



$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} =$

$(x-1)^2$

$a+b=km$

$(a+b)^2-9ab=nm$

$109=144x^2$

$x^2=\frac{169}{144}$

x

$y\geq\sqrt{1-x^2}$

$90,5$

$k^2m^2-9ab=nm$

≥ 0

$32,5$

$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2\leq 1$

$9ab=m(k^2m-n)$

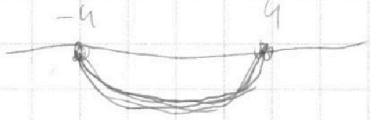
$(ab;a+b)=0$ (9)

$(x-n)(x+n)$

$x\in[-n;n]$

$x=0$

$\sqrt{3x^2-6x+2}$



$36-2n=12 \Rightarrow 2\sqrt{3}$

$\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6} = 1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

-5 8

$y=12$

$(x-n)(x+n)+(y-12)^2\leq 0$

$\frac{3\pm13}{2}$

$y-$

$x=$

$37,5$

1300

75
150
25
159

$\sqrt{t}+\sqrt{t-}$

$\sqrt{t}+\sqrt{t-9x+1}=9x+1$

k

$\sqrt{t+k}-\sqrt{t}=k \Leftrightarrow t+k=k^2+2k\sqrt{t}+t$

$-4k=2k\sqrt{t} \Leftrightarrow t=\frac{-k}{4}$

$9+150$

$\left(\frac{3+\sqrt{159}}{2}\right)^2=\frac{27+18\sqrt{159}+159}{4}$ $\frac{3\pm\sqrt{159}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

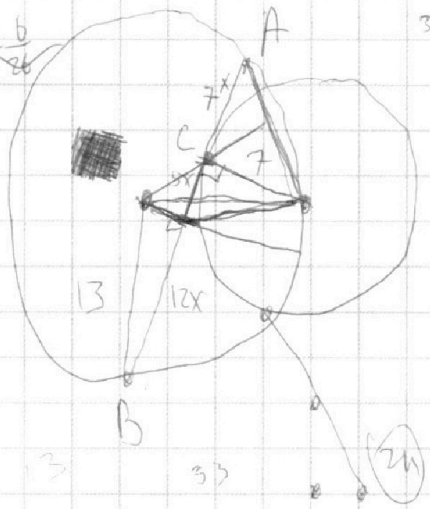
МФТИ

0-32

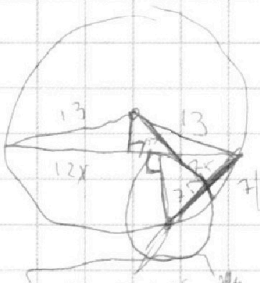
$-26x+26 \geq 73y-26\cdot 13$

$-2x+6=y-26$

$-2x+36$



$24x$



16

$\frac{\sqrt{169-144x}}{7} = \frac{n}{m}$

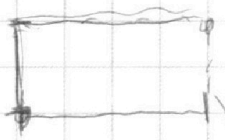
$7n = m\sqrt{169-144x}$

$(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

$9x+y$

$(7+\sqrt{169-144x})^2+25x^2=169$

$49+169-144x+14\sqrt{169-144x}+25x^2=169$



$70+49+25=$

$(144x-49-25x^2)^2=196(169-144x)$

$(-13;26)$ $(3;26)$

$0\leq y\leq 26$

$\leq x$

$(0;0)$ $(16;0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Таким образом у принимает целые значения от 0 до 26.
~~[illegible]~~ (при этом точки точно не выйдут за пределы # в силу параллельности $y=2x_1+y_1-2x+14$ и (OP)) => при $(x_1,y_1)=(0;0)$ 14 точек.

2) (1;0), (2;0)... (9;0). В этих точках все аналогично (0;0)
=> ~~9·27=243 варианта~~ 9·14=126 вариантов

3) (10;0), (11;0)... (16;0). В этих точках самая первая точка уже выходит за пределы #
(для (10;0) первая точка это (7;0), а эта уже лежит вне #; (11;0) — (18;0)...), а значит и все прямая образованная точками будет вне # => 0 вариантов.

4) все остальные. Заметим, что остальные точки выбираются увеличением y на 2 и соответственно уменьшением x на 1 (как прямые на которых лежат данные точки). Тогда (0;0) будет соответствовать следующая точка (-1;2). Заметим, что ГМТ подходящих точек не изменится ($y=-1\cdot2+2-2x+14 \Leftrightarrow y=-2x+14$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Тогда~~ ур-я 3 и 4 описывают окружности ω и Ω (ω и Ω - это круги, а не окружности)

Значит вся совокупность - это множество точек ~~ω и Ω~~ $\omega \cup \Omega$

и $x+y-z=0$ - это прямая => будет только 2 решения только тогда, когда эта ~~окружность~~ прямая будет касаться сразу двух окружностей. таких прямых существует 4.

$cx+dy-e=0$ - нормальное уравнение $x+y-z=0$

тогда получаем систему (формулы расст. от (1) до прям)

$$\begin{cases} 1=|e| \\ 4=|c\cdot 12+e| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=\pm 1 \\ 12c=e\pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=1 \\ c=\frac{5}{12} \\ d=\frac{\sqrt{119}}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} e=-1 \\ c=\frac{1}{4} \\ d=\frac{\sqrt{15}}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e=1 \\ c=-\frac{1}{4} \\ d=\frac{\sqrt{15}}{16} \end{cases} \quad \begin{cases} e=-1 \\ c=-\frac{5}{12} \\ d=\frac{\sqrt{119}}{12} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ