



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{12} 7^{13}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11} \cdot X$$

$$bc = 2^{12} 7^{13} \cdot Y$$

$$ac = 2^{23} 7^{39} \cdot Z$$

где X, Y и Z
целые
числа

$$abc: ab, abc: ac, abc: bc$$

$$\text{тогда } abc: 2^{23} \cdot 7^{39} \rightarrow (abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{78}$$

предположим ab, bc и ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} 7^{11} \cdot X \cdot 2^{12} 7^{13} \cdot Y \cdot 2^{23} 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$$

$$\text{но } (abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{78}$$

$$\text{тогда } XYZ = K \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot K \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{78} \cdot K$$

abc минимально при $K=1$

$$\text{тогда } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

проверим предположение
целые числа:

$$a = 2^{10} \cdot 7^8$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

тогда

$$ab = 2^{15} 7^{11} : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{12} 7^{23} : 2^{12} 7^{13}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39} : 2^{23} 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$\frac{a}{b}$ несократима

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(-(a^2+2ab+b^2)+9ab)} = \frac{a+b}{(-(a+b)^2+9ab)}$$

дробь максимально сокращается
на НОД числителя и знаменателя

$$\text{НОД}((a+b), \underbrace{-(a+b)^2+9ab}_{:(a+b)}) = \text{НОД}(a+b, 9ab)$$

$$\text{НО } \text{НОД}(ab, (a+b)) = 1$$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots$$

где p_i и q_i — простые и различные
или $(\text{НОД}(a, b) = 1)$

тогда

$$ab = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots$$

$$a+b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots + p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots$$

у ab и $a+b$ нет общих делителей
т.е. $\text{НОД}(ab, (a+b)) = 1$

тогда $\text{НОД}(a+b, 9ab)$ будет наибольшим,
если $a+b : 9$

$$\text{НОД}(a+b, 9ab) = 9 \text{ при } a+b : 9$$

привести пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-7 \cdot 20+25} = \frac{9}{41-141} = \frac{9}{-99} = \frac{-1}{11}$$

$m=9$

Ответ: при $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

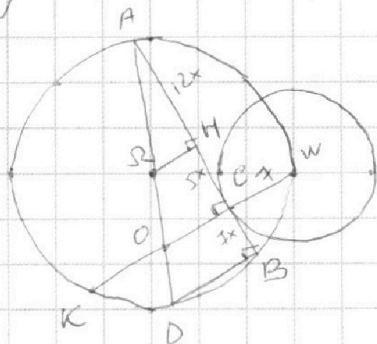
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 3



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad AC = 17x \quad CB = 7x \quad AB = 24x$$

$\angle CWD = 90^\circ$ в к
по теореме о диаметре AD

$\angle ABD = 90^\circ$ т.к. впис, оп. на d
 $\angle ACD = 90^\circ$ т.к. AB - кас., CW - R
(сск. CW границей)

$$AC \cdot CB = CW \cdot CE \quad CW = r = 7$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot CE$$

$$CE = 17x^2 \quad \angle OC = a$$

$$CW = 17x^2 - a$$

опустим $\angle H$ - перпендикуляр

$$\angle H \perp AC$$

т.к. $\angle H$ - у. оп. AB - хорда, $\angle H \perp AB$
то $AH = HB = 12x$

$$\triangle AOH \sim \triangle AOC \quad AO = R = 13$$

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AO}{AC} \quad AO = \frac{17x}{12} \cdot 13 = \frac{17 \cdot 13}{12}$$

$$OD = AD - AO = 26 - \frac{17 \cdot 13}{12} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 12 - 17 \cdot 13}{12} = \frac{13 \cdot 7}{12}$$

$$AO \cdot OD = KO \cdot OW$$

$$\frac{17 \cdot 13}{12} \cdot \frac{13 \cdot 7}{12} = (17x^2 - a)(7 + a)$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7x^2 + 17x^2 \cdot a - 7a - a^2$$

$\triangle AOC$ - впис

$$\text{по теореме Пифагора} \quad OC^2 = AO^2 - AC^2$$

$$a^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12}\right)^2 - (17x)^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12} - 17x\right) \left(\frac{17 \cdot 13}{12} + 17x\right)$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} - 17 \cdot 7x^2 - 17x^2 \cdot a + 7a + a^2 = \frac{17(13-12x) \cdot 17(13+12x)}{12 \cdot 12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 оформлена

$$a = \frac{17}{12} \sqrt{(13-12x)(13+12x)}$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7x^2 + 17x^2 \cdot \frac{17}{12} \sqrt{(13-12x)(13+12x)} - \frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} - \frac{17^2}{12^2} (13^2 - 144x^2)$$

$$x^2 = t$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7t + 17t \cdot \frac{17}{12} \sqrt{169 - 144t} - \frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} - \frac{17^2}{12^2} (169 - 144t)$$



$$7 \cdot 13^2 - 12^2 \cdot 7t + 17 \cdot 12t \sqrt{169 - 144t} - 7 \cdot 12^2 - 17(169 - 144t)$$

$$7(169 - 144t) = 17 \cdot 12t \sqrt{169 - 144t} - 7 \cdot 12^2 - 17(169 - 144t)$$

$$34(169 - 144t) = 12(17t \sqrt{169 - 144t} - 7^2)$$

$$17(169 - 144t) = 6(17t \sqrt{169 - 144t} - 7^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$a^2 - b^2 = -9x + 1$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$1) a = b \quad 2) a + b - 1 = 0$$

$$1) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = 1/9$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

$$\text{нфн } x$$

$$\text{нфн } x = 1/9 \quad 3x^2 + 3x + 1 > 0 //$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$x \in [-1; 0] \quad 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

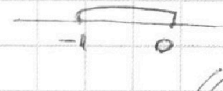
$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \quad |^2$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

$$3x^2 + 3x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 69 = 4^2 \cdot 78 =$$

$$= (4\sqrt{78})^2$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$H0 \quad \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0$$

$$12 < 4\sqrt{78}$$

$$6 < 2\sqrt{78}$$

$$36 < 4 \cdot 78$$

$$x > 0$$

не подходит

$$(или же \quad 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 0$$

$$\text{и } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 40 \text{ не имеет})$$

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0$$

$$\text{не подходит} //$$

Ответ: $1/9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



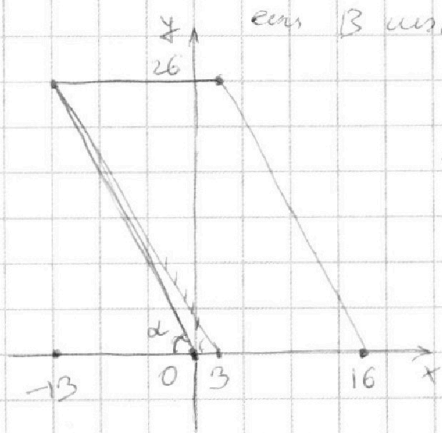
Задача 5

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$x_2 - x_1$ расст. по x между A и B
если B правее, то $x_2 - x_1 > 0$
если B левее, то $x_2 - x_1 < 0$

$y_2 - y_1$ расст. по y от A до B
если B выше, то $y_2 - y_1 > 0$
если B ниже, то $y_2 - y_1 < 0$



~~или~~

но они $\neq$ равны на 13
значит в 14 строках $\neq$ равны
(минимальное значение)

В каждой строке по 16 точек
в остальных строках - 15 точек

значит ~~равны~~, когда $y_2 - y_1 = 0$
и $2(x_2 - x_1) = 14$

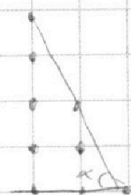
$$x_2 - x_1 = 7 \quad x_2 \text{ правее } x_1 \text{ на } 7 \quad 14$$

в 17 строках с равными значениями: 9 всего: $17 \cdot 9$

в ост. строках: 8 всего: $13 \cdot 8$

y может отличаться на любое число (иначе $x_2 - x_1$ не равно)

угол π -мат:



$$x_1 \text{ } f(x) = 2 \quad (f(x) = \frac{26}{13} = 2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5 оформление

Вс. 9.2 В точке А на 2

$$y_2 - y_1 = 2$$

$$\text{то } x(t_2 - t_1) = 12$$

$$(t_2 - t_1) = 6$$

В пункт А

такой же ток (но) 10 но у правых правых
точки у букв все n-м

тоже 9 минут

а минут 2 строки вершины (иначе В все
н-м)

итого: 9.13

В пункт: 8.12 (также минут 2 строки вершины
н-м)

Вс. В точке А на 4

$$(t_2 - t_1) = 5$$

В пункт так ток 11 но у букв правых В а
и минут 4 строки н-м

итого: 9.12

у пункт: 8.11

В точке А на 6

$$t_2 - t_1 = 4$$

срок: 9.11

срок: 8.10

...

В точке А на 14

срок: 9.7

срок: 8.6

итого: 9.14 + 8.13 + ... + 8.6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 16

$$\begin{cases} a + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

окр. $y(0;0)$ $R=1$

$$x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$$

окр. $y(0;12)$ $R=4$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 & \text{внутри окр.} \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 & \text{вне окр.} \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 & \text{вне окр.} \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 & \text{внутри окр.} \end{cases}$$

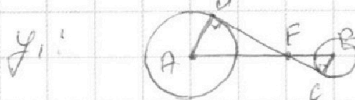
$$\text{т.е. } (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

или точка находится внутри одного
окружности и вне другого окр.
двух/обеих (противоположно окр. тоже
подходит)

значит ровно два решения, если
прямая $y = -ax + 3b$ касается
двух окружностей

всего 4 касательных
из них 2 по оси симметрии
относительно Oy

используем y_1 и y_2



$$AD = 4, BC = 1$$

$$AB = 12$$

$$|FB| = x$$

$$\triangle ADF \sim \triangle FBE$$

$$\frac{AD}{BE} = \frac{AF}{FB} \quad \frac{4}{1} = \frac{12-x}{x}$$

$$4x = 12 - x$$

$$x = \frac{12}{5} \quad FB = \frac{12}{5}$$

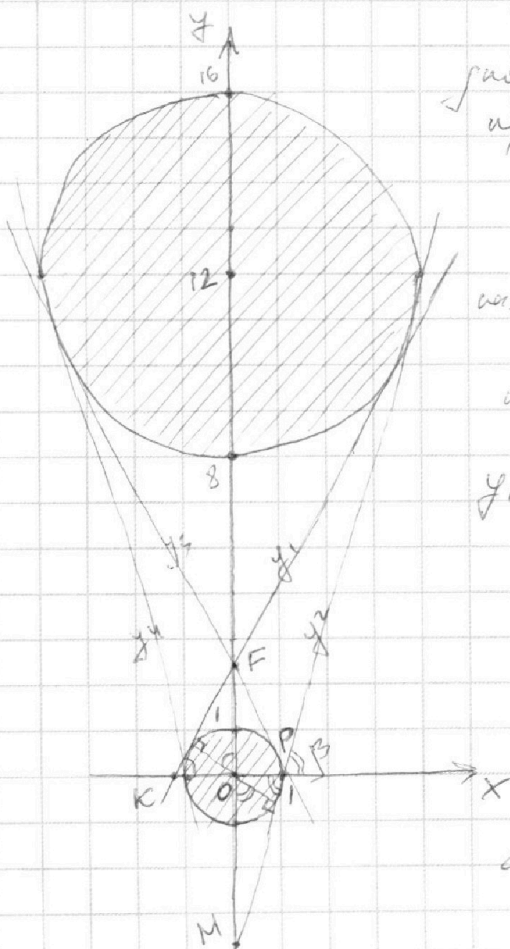
$$\triangle FBC - \text{прямоугольный}$$

$$BC = 1, FB = \frac{12}{5}$$

$$\cos \angle BFC = \frac{FC}{FB} = \frac{13}{5}$$

$$\angle FBC = \angle FCB = \frac{FC}{BC} = \frac{13}{5}$$

$$\angle FBC = \angle FCB = \frac{13}{5} \quad \text{(на графике)} \quad \angle FCB = \frac{13}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

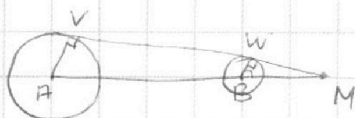
задача 6 продолжение
тогда $y_1 = k_1 x + b_1$

$$k_1 = \frac{13}{5} \quad b_1 = \frac{12}{5}$$

$$k_1 = -a \quad b_1 = 8b$$

$$a = -\frac{13}{5} \quad b = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

y_2 :



$$AV = 4, BW = 1, AB = 12$$

$$BM = x$$

$$\triangle MWB \sim \triangle MVA$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{WB}{VA}$$

$$\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 12$$

$$x = 4 \quad BM = 4$$

$$\triangle BWM - \text{прям} \quad WB = 1, BM = 4$$

$$\text{используем теорему Пифагора}$$

$$WM = \sqrt{15}$$

$$\angle MBW = \angle MOW = \angle OPM = \angle \beta$$

используем график

$$\angle MOW = \angle OPM = \angle \beta$$

$$\angle \beta = \sqrt{15}$$

тогда $y_2 = k_2 x + b_2$

$$k_2 = \sqrt{15}$$

$$b_2 = -4$$

$$k_2 = -a$$

$$b_2 = 8b$$

$$a = -\sqrt{15}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

и соответственно y_3 и y_4

симметричные им

$$(k_3 = -k_1, k_4 = -k_2)$$

$$y_3 = \frac{13}{5}x + \frac{3}{10} \quad a = \frac{13}{5}$$

$$y_4 = \sqrt{15}x - \frac{1}{2} \quad a = \sqrt{15}$$

Ответ: при $a = \frac{13}{5}, a = -\frac{13}{5}, a = \sqrt{15}, a = -\sqrt{15}$



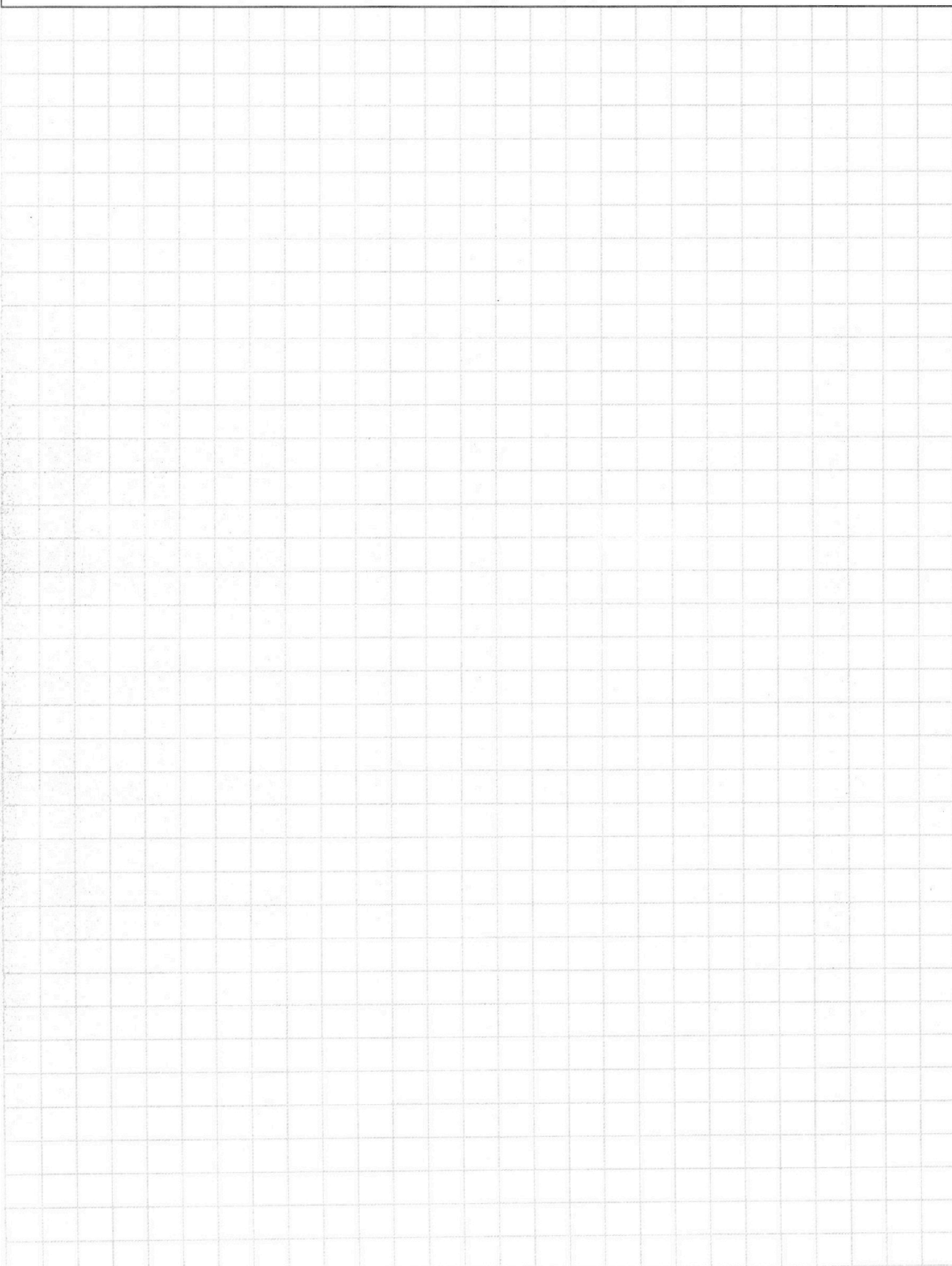
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{13}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

где X, Y, Z
целые
числа

перемножим ab, bc, ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X \cdot 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$$

полный
квадрат

тогда $2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$ тоже
должно быть полным
квадратом

до минимального полного квадрата
не хватает 2 тогда X или Y или Z
равно 2 ($X+Y+Z=2$)

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot 2$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

проверим ответ

таким a, b и c:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^{13}$$

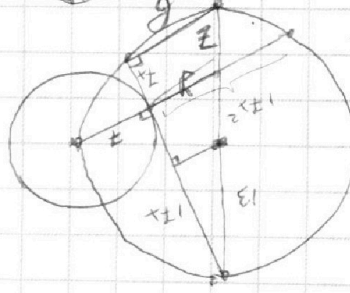
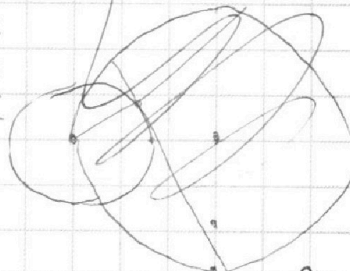
$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$тогда ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{29}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

~~167-174-181-188-195-202-209-216-223-230-237-244-251-258-265-272-279-286-293-300-307-314-321-328-335-342-349-356-363-370-377-384-391-398-405-412-419-426-433-440-447-454-461-468-475-482-489-496-503-510-517-524-531-538-545-552-559-566-573-580-587-594-601-608-615-622-629-636-643-650-657-664-671-678-685-692-700-707-714-721-728-735-742-749-756-763-770-777-784-791-798-805-812-819-826-833-840-847-854-861-868-875-882-889-896-903-910-917-924-931-938-945-952-959-966-973-980-987-994-1001-1008-1015-1022-1029-1036-1043-1050-1057-1064-1071-1078-1085-1092-1099-1106-1113-1120-1127-1134-1141-1148-1155-1162-1169-1176-1183-1190-1197-1204-1211-1218-1225-1232-1239-1246-1253-1260-1267-1274-1281-1288-1295-1302-1309-1316-1323-1330-1337-1344-1351-1358-1365-1372-1379-1386-1393-1400-1407-1414-1421-1428-1435-1442-1449-1456-1463-1470-1477-1484-1491-1498-1505-1512-1519-1526-1533-1540-1547-1554-1561-1568-1575-1582-1589-1596-1603-1610-1617-1624-1631-1638-1645-1652-1659-1666-1673-1680-1687-1694-1701-1708-1715-1722-1729-1736-1743-1750-1757-1764-1771-1778-1785-1792-1799-1806-1813-1820-1827-1834-1841-1848-1855-1862-1869-1876-1883-1890-1897-1904-1911-1918-1925-1932-1939-1946-1953-1960-1967-1974-1981-1988-1995-2002-2009-2016-2023-2030-2037-2044-2051-2058-2065-2072-2079-2086-2093-2100-2107-2114-2121-2128-2135-2142-2149-2156-2163-2170-2177-2184-2191-2198-2205-2212-2219-2226-2233-2240-2247-2254-2261-2268-2275-2282-2289-2296-2303-2310-2317-2324-2331-2338-2345-2352-2359-2366-2373-2380-2387-2394-2401-2408-2415-2422-2429-2436-2443-2450-2457-2464-2471-2478-2485-2492-2500-2507-2514-2521-2528-2535-2542-2549-2556-2563-2570-2577-2584-2591-2598-2605-2612-2619-2626-2633-2640-2647-2654-2661-2668-2675-2682-2689-2696-2703-2710-2717-2724-2731-2738-2745-2752-2759-2766-2773-2780-2787-2794-2801-2808-2815-2822-2829-2836-2843-2850-2857-2864-2871-2878-2885-2892-2900-2907-2914-2921-2928-2935-2942-2949-2956-2963-2970-2977-2984-2991-2998-3005-3012-3019-3026-3033-3040-3047-3054-3061-3068-3075-3082-3089-3096-3103-3110-3117-3124-3131-3138-3145-3152-3159-3166-3173-3180-3187-3194-3201-3208-3215-3222-3229-3236-3243-3250-3257-3264-3271-3278-3285-3292-3300-3307-3314-3321-3328-3335-3342-3349-3356-3363-3370-3377-3384-3391-3398-3405-3412-3419-3426-3433-3440-3447-3454-3461-3468-3475-3482-3489-3496-3503-3510-3517-3524-3531-3538-3545-3552-3559-3566-3573-3580-3587-3594-3601-3608-3615-3622-3629-3636-3643-3650-3657-3664-3671-3678-3685-3692-3700-3707-3714-3721-3728-3735-3742-3749-3756-3763-3770-3777-3784-3791-3798-3805-3812-3819-3826-3833-3840-3847-3854-3861-3868-3875-3882-3889-3896-3903-3910-3917-3924-3931-3938-3945-3952-3959-3966-3973-3980-3987-3994-4001-4008-4015-4022-4029-4036-4043-4050-4057-4064-4071-4078-4085-4092-4099-4106-4113-4120-4127-4134-4141-4148-4155-4162-4169-4176-4183-4190-4197-4204-4211-4218-4225-4232-4239-4246-4253-4260-4267-4274-4281-4288-4295-4302-4309-4316-4323-4330-4337-4344-4351-4358-4365-4372-4379-4386-4393-4400-4407-4414-4421-4428-4435-4442-4449-4456-4463-4470-4477-4484-4491-4498-4505-4512-4519-4526-4533-4540-4547-4554-4561-4568-4575-4582-4589-4596-4603-4610-4617-4624-4631-4638-4645-4652-4659-4666-4673-4680-4687-4694-4701-4708-4715-4722-4729-4736-4743-4750-4757-4764-4771-4778-4785-4792-4800-4807-4814-4821-4828-4835-4842-4849-4856-4863-4870-4877-4884-4891-4898-4905-4912-4919-4926-4933-4940-4947-4954-4961-4968-4975-4982-4989-4996-5003-5010-5017-5024-5031-5038-5045-5052-5059-5066-5073-5080-5087-5094-5101-5108-5115-5122-5129-5136-5143-5150-5157-5164-5171-5178-5185-5192-5200-5207-5214-5221-5228-5235-5242-5249-5256-5263-5270-5277-5284-5291-5298-5305-5312-5319-5326-5333-5340-5347-5354-5361-5368-5375-5382-5389-5396-5403-5410-5417-5424-5431-5438-5445-5452-5459-5466-5473-5480-5487-5494-5501-5508-5515-5522-5529-5536-5543-5550-5557-5564-5571-5578-5585-5592-5600-5607-5614-5621-5628-5635-5642-5649-5656-5663-5670-5677-5684-5691-5698-5705-5712-5719-5726-5733-5740-5747-5754-5761-5768-5775-5782-5789-5796-5803-5810-5817-5824-5831-5838-5845-5852-5859-5866-5873-5880-5887-5894-5901-5908-5915-5922-5929-5936-5943-5950-5957-5964-5971-5978-5985-5992-6000-6007-6014-6021-6028-6035-6042-6049-6056-6063-6070-6077-6084-6091-6098-6105-6112-6119-6126-6133-6140-6147-6154-6161-6168-6175-6182-6189-6196-6203-6210-6217-6224-6231-6238-6245-6252-6259-6266-6273-6280-6287-6294-6301-6308-6315-6322-6329-6336-6343-6350-6357-6364-6371-6378-6385-6392-6400-6407-6414-6421-6428-6435-6442-6449-6456-6463-6470-6477-6484-6491-6498-6505-6512-6519-6526-6533-6540-6547-6554-6561-6568-6575-6582-6589-6596-6603-6610-6617-6624-6631-6638-6645-6652-6659-6666-6673-6680-6687-6694-6701-6708-6715-6722-6729-6736-6743-6750-6757-6764-6771-6778-6785-6792-6800-6807-6814-6821-6828-6835-6842-6849-6856-6863-6870-6877-6884-6891-6898-6905-6912-6919-6926-6933-6940-6947-6954-6961-6968-6975-6982-6989-6996-7003-7010-7017-7024-7031-7038-7045-7052-7059-7066-7073-7080-7087-7094-7101-7108-7115-7122-7129-7136-7143-7150-7157-7164-7171-7178-7185-7192-7200-7207-7214-7221-7228-7235-7242-7249-7256-7263-7270-7277-7284-7291-7298-7305-7312-7319-7326-7333-7340-7347-7354-7361-7368-7375-7382-7389-7396-7403-7410-7417-7424-7431-7438-7445-7452-7459-7466-7473-7480-7487-7494-7501-7508-7515-7522-7529-7536-7543-7550-7557-7564-7571-7578-7585-7592-7600-7607-7614-7621-7628-7635-7642-7649-7656-7663-7670-7677-7684-7691-7698-7705-7712-7719-7726-7733-7740-7747-7754-7761-7768-7775-7782-7789-7796-7803-7810-7817-7824-7831-7838-7845-7852-7859-7866-7873-7880-7887-7894-7901-7908-7915-7922-7929-7936-7943-7950-7957-7964-7971-7978-7985-7992-8000-8007-8014-8021-8028-8035-8042-8049-8056-8063-8070-8077-8084-8091-8098-8105-8112-8119-8126-8133-8140-8147-8154-8161-8168-8175-8182-8189-8196-8203-8210-8217-8224-8231-8238-8245-8252-8259-8266-8273-8280-8287-8294-8301-8308-8315-8322-8329-8336-8343-8350-8357-8364-8371-8378-8385-8392-8400-8407-8414-8421-8428-8435-8442-8449-8456-8463-8470-8477-8484-8491-8498-8505-8512-8519-8526-8533-8540-8547-8554-8561-8568-8575-8582-8589-8596-8603-8610-8617-8624-8631-8638-8645-8652-8659-8666-8673-8680-8687-8694-8701-8708-8715-8722-8729-8736-8743-8750-8757-8764-8771-8778-8785-8792-8800-8807-8814-8821-8828-8835-8842-8849-8856-8863-8870-8877-8884-8891-8898-8905-8912-8919-8926-8933-8940-8947-8954-8961-8968-8975-8982-8989-8996-9003-9010-9017-9024-9031-9038-9045-9052-9059-9066-9073-9080-9087-9094-9101-9108-9115-9122-9129-9136-9143-9150-9157-9164-9171-9178-9185-9192-9200-9207-9214-9221-9228-9235-9242-9249-9256-9263-9270-9277-9284-9291-9298-9305-9312-9319-9326-9333-9340-9347-9354-9361-9368-9375-9382-9389-9396-9403-9410-9417-9424-9431-9438-9445-9452-9459-9466-9473-9480-9487-9494-9501-9508-9515-9522-9529-9536-9543-9550-9557-9564-9571-9578-9585-9592-9600-9607-9614-9621-9628-9635-9642-9649-9656-9663-9670-9677-9684-9691-9698-9705-9712-9719-9726-9733-9740-9747-9754-9761-9768-9775-9782-9789-9796-9803-9810-9817-9824-9831-9838-9845-9852-9859-9866-9873-9880-9887-9894-9901-9908-9915-9922-9929-9936-9943-9950-9957-9964-9971-9978-9985-9992-10000~~



~~167-174-181-188-195-202-209-216-223-230-237-244-251-258-265-272-279-286-293-300-307-314-321-328-335-342-349-356-363-370-377-384-391-398-405-412-419-426-433-440-447-454-461-468-475-482-489-496-503-510-517-524-531-538-545-552-559-566-573-580-587-594-601-608-615-622-629-636-643-650-657-664-671-678-685-692-700-707-714-721-728-735-742-749-756-763-770-777-784-791-798-805-812-819-826-833-840-847-854-861-868-875-882-889-896-903-910-917-924-931-938-945-952-959-966-973-980-987-994-1001-1008-1015-1022-1029-1036-1043-1050-1057-1064-1071-1078-1085-1092-1099-1106-1113-1120-1127-1134-1141-1148-1155-1162-1169-1176-1183-1190-1197-1204-1211-1218-1225-1232-1239-1246-1253-1260-1267-1274-1281-1288-1295-1302-1309-1316-1323-1330-1337-1344-1351-1358-1365-1372-1379-1386-1393-1400-1407-1414-1421-1428-1435-1442-1449-1456-1463-1470-1477-1484-1491-1498-1505-1512-1519-1526-1533-1540-1547-1554-1561-1568-1575-1582-1589-1596-1603-1610-1617-1624-1631-1638-1645-1652-1659-1666-1673-1680-1687-1694-1691-1701-1708-1715-1722-1729-1736-1743-1750-1757-1764-1771-1778-1785-1792-1800-1807-1814-1821-1828-1835-1842-1849-1856-1863-1870-1877-1884-1891-1898-1905-1912-1919-1926-1933-1940-1947-1954-1961-1968-1975-1982-1989-1996-2003-2010-2017-2024-2031-2038-2045-2052-2059-2066-2073-2080-2087-2094-2101-2108-2115-2122-2129-2136-2143-2150-2157-2164-2171-2178-2185-2192-2200-2207-2214-2221-2228-2235-2242-2249-2256-2263-2270-2277-2284-2291-2298-2305-2312-2319-2326-2333-2340-2347-2354-2361-2368-2375-2382-2389-2396-2403-2410-2417-2424-2431-2438-2445-2452-2459-2466-2473-2480-2487-2494-2501-2508-2515-2522-2529-2536-2543-2550-2557-2564-2571-2578-2585-2592-2600-2607-2614-2621-2628-2635-2642-2649-2656-2663-2670-2677-2684-2691-2698-2705-2712-2719-2726-2733-2740-2747-2754-2761-2768-2775-2782-2789-2796-2803-2810-2817-2824-2831-2838-2845-2852-2859-2866-2873-2880-2887-2894-2901-2908-2915-2922-2929-2936-2943-2950-2957-2964-2971-2978-2985-2992-3000-3007-3014-3021-3028-3035-3042-3049-3056-3063-3070-3077-3084-3091-3098-3105-3112-3119-3126-3133-3140-3147-3154-3161-3168-3175-3182-3189-3196-3203-3210-3217-3224-3231-3238-3245-3252-3259-3266-3273-3280-3287-3294-3301-3308-3315-3322-3329-3336-3343-3350-3357-3364-3371-3378-3385-3392-3400-3407-3414-3421-3428-3435-3442-3449-3456-3463-3470-3477-3484-3491-3498-3505-3512-3519-3526-3533-3540-3547-3554-3561-3568-3575-3582-3589-3596-3603-3610-3617-3624-3631-3638-3645-3652-3659-3666-3673-3680-3687-3694-3701-3708-3715-3722-3729-3736-3743-3750-3757-3764-3771-3778-3785-3792-3800-3807-3814-3821-3828-3835-3842-3849-3856-3863-3870-3877-3884-3891-3898-3905-3912-3919-3926-3933-3940-3947-3954-3961-3968-3975-3982-3989-3996-4003-4010-4017-4024-4031-4038-4045-4052-4059-4066-4073-4080-4087-4094-4101-4108-4115-4122-4129-4136-4143-4150-4157-4164-4171-4178-4185-4192-4200-4207-4214-4221-4228-4235-4242-4249-4256-4263-4270-4277-4284-4291-4298-4305-4312-4319-4326-4333-4340-4347-4354-4361-4368-4375-4382-4389-4396-4403-4410-4417-4424-4431-4438-4445-4452-4459-4466-4473-4480-4487-4494-4501-4508-4515-4522-4529-4536-4543-4550-4557-4564-4571-4578-4585-4592-4600-4607-4614-4621-4628-4635-4642-4649-4656-4663-4670-4677-4684-4691-4698-4705-4712-4719-4726-4733-4740-4747-4754-4761-4768-4775-4782-4789-4796-4803-4810-4817-4824-4831-4838-4845-4852-4859-4866-4873-4880-4887-4894-4901-4908-4915-4922-~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

опр. 9 (00)

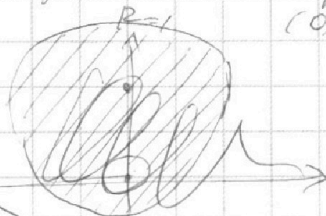
опр. 9

(0,12) R=4

$$\begin{aligned} (x^2+y^2-1) &\geq 0 \\ (x^2+(y-12)^2-16) &\leq 0 \end{aligned}$$

или
наоборот

вне круга
внутри другого



2 точки в пересечении

4 касательных

2 симметричные

$$y = kx + b$$

~~опр. 9~~

$$y_1 = kx_1 + b$$

~~опр. 9~~

$$y_1^2 + x_1^2 - 1 = 0$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$x_2^2 + (y_2 - 12)^2 - 16 = 0$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{12-x}$$

$$4x = 12 - x$$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5} = 2,4$$



$$\tan \alpha = \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

$$y = -\frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

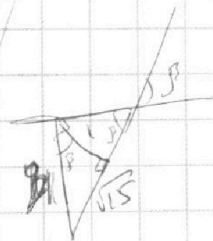
$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+12}$$

$$4x = x + 12$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$b = -4$$



33
18

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{0.15} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.22} \cdot 7^{0.39}$
 $b = 2^{0.15} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.17} \cdot 7^{0.18}$
 $c = 2^{0.17} \cdot 7^{0.18} / 2^{0.23} \cdot 7^{0.39}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot y$
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$

$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+13+39} \cdot xyz$
 $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot xyz$

$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{10}$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{13}$

по условию две стороны

$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot K$
 $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

$K = \frac{xyz}{2}$ $K=1$
 $xyz=2$
 $x=2$ или $y=2$ или $z=2$

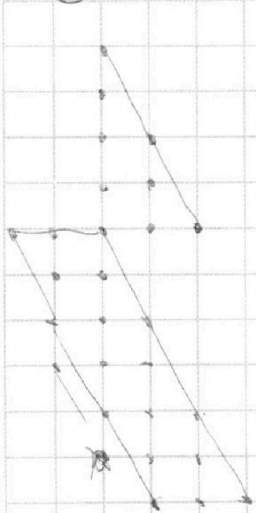
примеч:

$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

② $\text{НОД}(a, b) = 1$



$a^2 - 7ab + b^2$

$a+b$
 $-(a+b)^2 + 9ab$

$a = a \% b$

$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{a+b}$

$\text{НОД}(a+b, -(a+b)^2 + 9ab) = \text{НОД}(a+b, 9ab)$

$3^2 - 7$

$\text{НОД}(a+b, 9ab)$

$a = n_1 x + n_2 y$

$b = k_1 x + k_2 y$

$n_1 x + n_2 y, k_1 x + k_2 y \neq n_1 x + n_2 y + k_1 x + k_2 y$

пре и к
уравне

$ab > a+b$

(a+b) (a+b)

а) $\frac{5+4}{25-7 \cdot 20+16} = \frac{5+4}{41-140} = \frac{9}{-99}$

б) 9

