



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Заметим, что числа  $a, b, c$  были взаимно простыми~~ Заметим, что числа  $a, b, c$  были взаимно простыми в  $a, b, c$  не должны быть никакими простыми множителями, кроме 2 и 7

$$a = 2^k 7^m, b = 2^n 7^p, c = 2^q 7^d;$$

$$\text{т.к. } ab \mid 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} k+n=14 \\ m+p=10 \end{cases} \quad (1)$$

т.к. все значения  $a, b, c$  будут в том случае, когда  $ab = 2^{14} 7^{10}$ ;  $bc = 2^{14} 7^{17}$ ;  $ac = 2^{20} 7^{37}$

$$\text{т.к. } bc \mid 2^{17} 7^{17} \Rightarrow \begin{cases} n+q=17 \\ p+d=17 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{т.к. } ac \mid 2^{20} 7^{37} \Rightarrow \begin{cases} q+k=20 \\ m+d=37 \end{cases} \quad (3)$$

из (1), (2), (3):

$$\begin{cases} k+n+m+p+q+d=51 \\ m+p+p+d+m+d=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+n+q=25,5 \\ m+p+d=32 \end{cases}$$

$$\text{т.е. } \min(abc) = 2^{k+n+q} 7^{m+p+d} = 2^{25,5} 7^{32}, \text{ ко}$$

$$\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow k, m, n, p, q, d \in \mathbb{N}_0;$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{26} 7^{32} \text{ так же заметим, что}$$

$$\text{ответ: } 2^{26} 7^{32} \text{ так же заметим, что } m+d+p \geq 37, \text{ т.к. иначе из (3)}$$

получится, что  $p < 0 \Rightarrow \min(abc) = 2^{26} 7^{37}$  (это произведение получается, например, при  $a = 2^8 7^{14}$ ;  $b = 2^6 7^0$ ;  $c = 2^{12} 7^{23}$ )

$$\Rightarrow \text{ответ: } 2^{26} 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

]  $D(x; y)$  — функция, возвращающая  
 $\text{НОД}(x; y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max(m) = D(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$$

по алгоритму Евклида:

$$\begin{aligned} D(a+b; a^2 - 6ab + b^2) &= D(a+b; a^2 - 6ab + b^2 - \\ &- a(a+b)) = D(a+b; -4ab + b^2) = D(a+b; -4ab + b^2 - \\ &- b(a+b)) = D(a+b; -8ab) = D(a+b; 8ab) \quad (1) \end{aligned}$$

Заметим: т.к.  $\frac{a}{b}$  — несократима  $\Rightarrow a$  и  $b$   
взаимно простые  $\Rightarrow a+b$  не кратка ни  
одному делителю  ~~$a$  или  $b$~~   $a$ ,  $b$  (кроме 1)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow a+b$  и  $ab$  — взаимно простые  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \max(b) = 8 \quad (\text{следует из (1)})$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

можно свести к системе;

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + 9y^2 = 25 \\ x_0^2 + 16y^2 = 25 \end{cases} \quad / \cdot \frac{9}{4} \quad (-)$$

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 + 9y^2 - \frac{9}{16}x_0^2 - 9y^2 = 25 - 25 \cdot \frac{9}{16}$$

$$\frac{7}{16}x_0 - 2x_0 + 1 - \frac{7}{16} \cdot 25 = 0 \quad / \cdot 16$$

$$7x_0 - 32x_0 - 159 = 0$$

$$x_0 = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 159 \cdot 7}}{7} = \begin{bmatrix} \frac{53}{7} \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ по рис. замечаем,}$$

что  $x_0 < 0$ , т.к.  $O_1$  и  $O_2$  находятся в разных полуплоскостях относительно  $AB \Rightarrow x_0 = -3$

4)  $O_1K$  — высота в  $\triangle ABO_1$ , опущенная на  $AB$ ;

$$\alpha = \angle KBO_1; \text{ т.к. } x_0 = -3 \Rightarrow O_1K = 3 \Rightarrow \sin \alpha =$$

$$= \frac{O_1K}{O_1B} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BK = O_1B \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$$

5) т.к.  $\triangle ABO_1$  — р/с  $\Rightarrow O_1K$  — медиана  $\Rightarrow AB = 2BK = 8$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

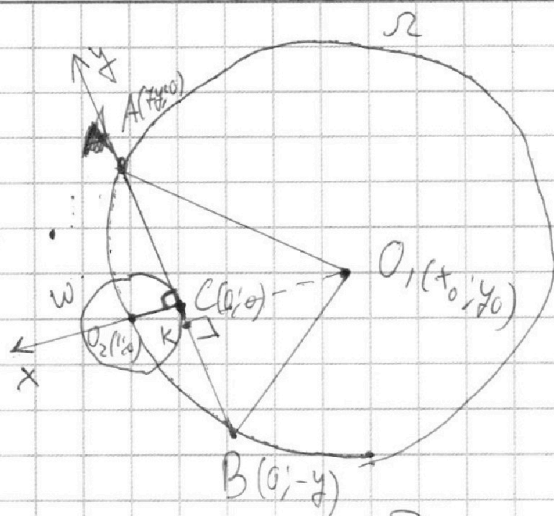
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**



Zero

$$R_{\omega} \approx 1$$

$$R_s = 5$$

AB - касательная к

$$AC : CB = 7 : 1$$

Наименование: АВ

Темные:

1)  $\} AC = zy \Rightarrow BC = y$

1)  $\int AC = xy \Rightarrow BC = y$   
2) Введём координатные оси, как показано на рис.  $\Rightarrow C(0;0); A(0;xy); B(0;-y)$

3)  $\} O_2$  — центр  $\omega$ ,  $O_1$  — центр  $\alpha \Rightarrow O_1(1; 0), O_2(x_0; y_0)$

4) T.K.  $O_1 B = R_{\text{д}}$ ;  $O_1 O_2 = R_{\text{д}}$ ;  $O_1 A = R_{\text{д}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x_0^2 + (y_0 + y)^2 = 25 \quad (1)$$

$$\{ x_0, y_0 \mid (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 25 \} \quad (2)$$

$$(x_0^2 + (y_0 - 7y)^2 = 25 \quad (3)$$

$$(1) - (3):$$

$$\cancel{x_0^2} + (y_0 + y)^2 - \cancel{x_0^2} - (y_0 - y)^2 = 0$$

$$(\cancel{y_0} + y - \cancel{y_0} + zy) (y_0 + y + y_0 - zy) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2y = 0} \Rightarrow -6y + 2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3y$$

таким образом, систему из (1), (2), (3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

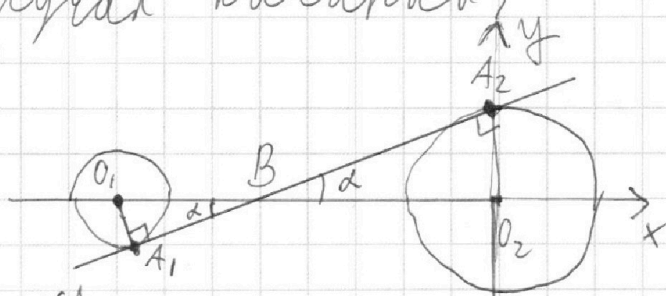
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



некро и кро точек, в которых прямая пересекает круг).

Из этих 4 случаев рассмотрим 2 случая касания:

①



$O_1$  — центр малой  
спр;  $O_2$  — центр  
большой спр;

т.  $A_1, A_2$  — точки касания;  $O_1 O_2 = 8$

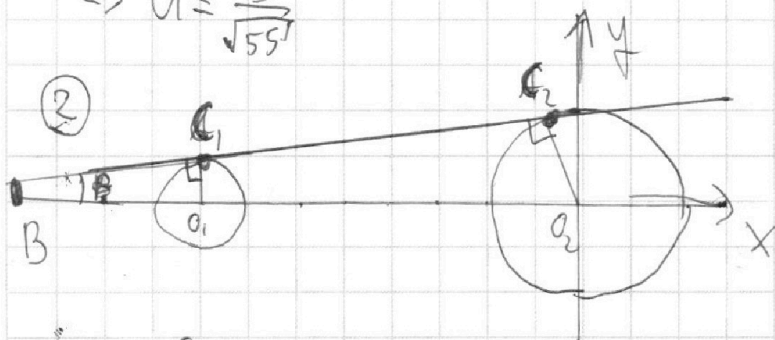
Заметим:  $\triangle O_1 A_1 B \sim \triangle O_2 A_2 B \Rightarrow \frac{O_1 B}{O_2 B} = \frac{O_1 A_1}{O_2 A_2} =$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow O_1 B = \frac{8}{3}; BO_2 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3};$$

$$\angle \alpha = \angle A_2 B O_2 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{A_2 O_2}{B A_2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{16^2}{3^2} - 4}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{220}} = \frac{6}{8 \cdot \sqrt{55}} =$$

$= \frac{3}{\sqrt{55}}$ ; Заметим, что (1)  $\Leftrightarrow y = \alpha x + 10b \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  т.к. углами касания касательной равны  
тангенсу угла между прямой и  $Ox \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$$



Заметим;

$$\triangle B O_1 C_1 \sim \triangle B O_2 C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B O_1}{B O_2} = \frac{O_1 C_1}{O_2 C_2} = \frac{1}{2};$$

т.к.  $O_1 B = 8$

$$B O_1 = 8; B O_2 = 16, \text{ тогда } \beta = \angle C_1 B O_2 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

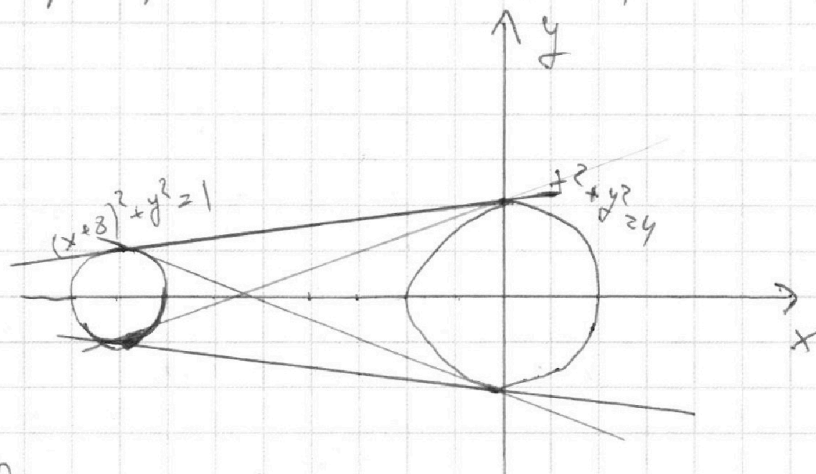
$$\begin{cases} ax - y + 0.8z = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Заметим: (1) — уравнение прямой;

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow y \text{ кас. полукруга } 2 \text{ окружности}$$
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Нарисуем (2) на графике  $y(x)$ :



Заметим, что ровно 2 решения могут только  
в 4 случаях (эти 4 прямые изображены  
на рисунке); когда прямые являются кас-  
ательными к ~~обеим~~ <sup>одной</sup> окружностям. В других  
случаях быть не может, т.к. если прямая пересекает  
окружность в ~~хотя~~ 2 точках, то ~~y(x)~~ <sup>будет</sup>  
будет бесконечно много решений (т.к. будет беско-





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \operatorname{tg} B = \frac{O, C_1}{B C_1} = \frac{1}{\sqrt{64-1}} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

из случаев ① и ②  $a \in \left\{ \frac{3}{\sqrt{55}}; \frac{1}{\sqrt{63}} \right\}$ , однако  
есть ещё 2 случая, в которые аналогичны  
случаям ① и ②, но в них также будут  
иметь противоположный знак  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Итого ответ: } a \in \left\{ \frac{3}{\sqrt{55}}; \frac{1}{\sqrt{63}}; -\frac{1}{\sqrt{63}}; -\frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 $bc: 2^{12} \cdot 7^{11}$   
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{34}$

$6 \cdot 7 = 42$   
 $+20$   
 $+14$   
 $\frac{12}{51} = 20,5$

$a = 2^k \cdot 7^m$   
 $b = 2^n \cdot 7^p$   
 $c = 2^q \cdot 7^d$

$119 - 6 \cdot 7 + 1 =$   
 $= 50 - 6 \cdot 7 =$   
 $2^{k+n+q} \cdot 7^{m+p+d}$

$\begin{cases} m+p=10 \\ k+n=14 \\ p+d=14 \\ n+q=14 \\ q+k=20 \\ m+d=34 \end{cases}$

$\Rightarrow k+n+n+q+q+n = 30 \quad / : 2$   
 $k+n+q = 15 = \frac{51}{2}$

$m+p+p+d+m+d = 64 \quad / : 2$   
 $m+p+d = 32 \Rightarrow \min: 2^{20,5} \cdot 7^{13,5}$

$\textcircled{2} \quad \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-3b-\sqrt{8}b)(a-3b+\sqrt{8}b)}$   
 $a = \frac{6b \pm \sqrt{36b^2 - 4b^2}}{2} = \frac{6b \pm 2\sqrt{8}b}{2} = b(3 \pm \sqrt{8})$

$D(a+b, a^2-6ab+b^2) = D(a+b, a^2-6ab+b^2 - a(a+b)) =$   
 $= D(a+b, -7ab+b^2) = D(a+b, -7ab+b^2 - b(a+b)) =$   
 $= D(a+b, -8ab) = D(a+b, 8ab) = 8?$

~~$a = \frac{q}{b}$~~  т.к.  $\frac{q}{b}$  - не целое.  $\Rightarrow$  в  $a+b$  нет ни одного  
 делителя, который есть только у  $a$  или только у  $b$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

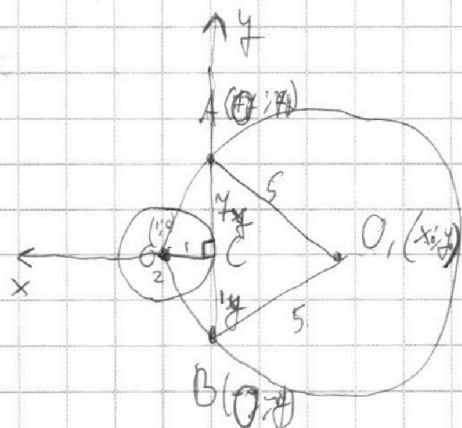
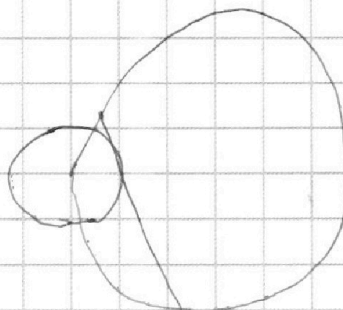
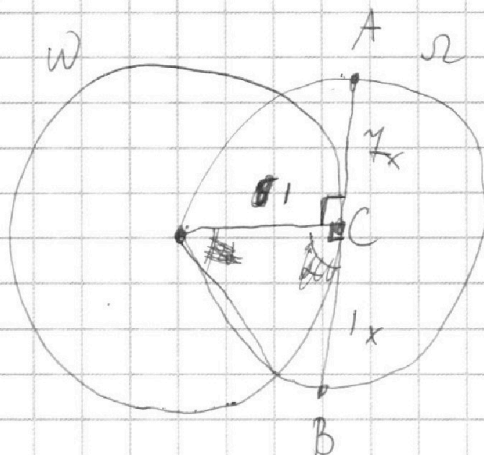
|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

29

3



$$(x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 25$$

$$x_0^2 + (y_0 - y)^2 = 25$$

$$x_0^2 + (y_0 + y)^2 = 25$$

$$(y_0 - y)^2 = (y_0 + y)^2$$

$$(y_0 - y - y_0 - y)(y_0 - y + y_0 + y) = 0$$

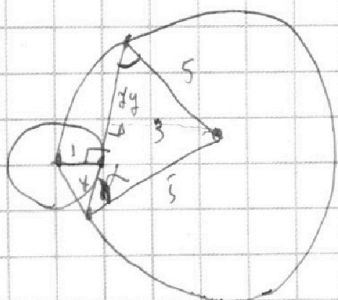
$$\Leftrightarrow -2y(2y_0 - 6y) = 0$$

$$y_0 = 3y$$

$$(x_0 - 1)^2 + 9y^2 = 25$$

$$2x_0^2 = 50$$

$$(x_0 - 1)^2 = 25$$



$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + 9y^2 = 25 \\ x_0^2 + 16y^2 = 25 \end{cases} \quad / \cdot \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} x_0^2 - 2x_0 + 1 + 9y^2 - \frac{9}{4}x_0^2 - 9y^2 &= 25 - 25 \cdot \frac{9}{4} \\ -\frac{5}{4}x_0^2 - 2x_0 + 1 + \frac{9}{4} \cdot 25 &= 0 \quad / \cdot (-4) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

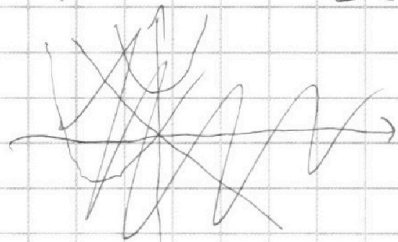


$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$x_B = \frac{5}{4} = 1,25 \quad x_B = \frac{-2}{4} = -0,5$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

$$-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 1}$$



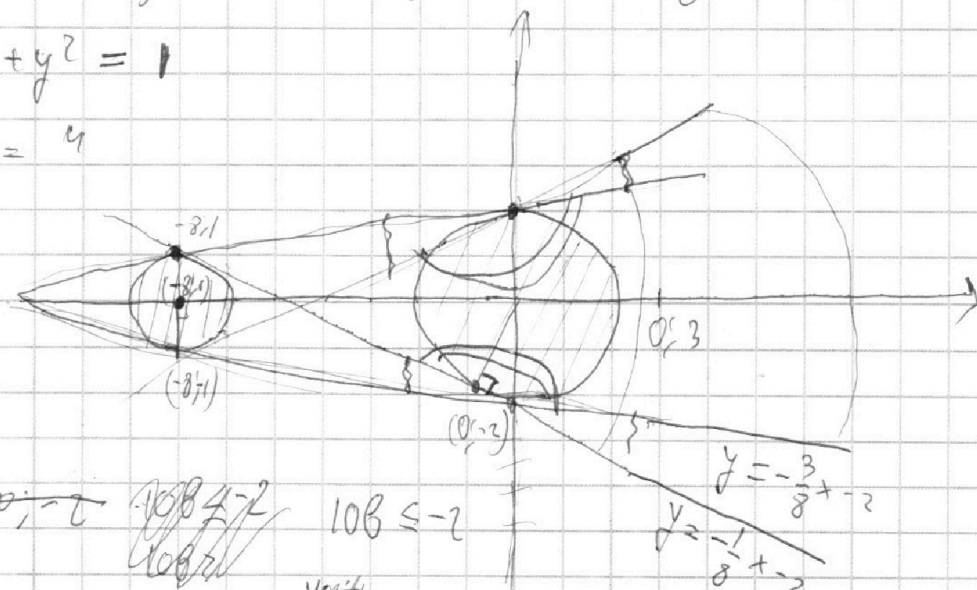
$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 - 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$6) (x + 8)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4$$



$$y = ax + 10b$$

$$10b \in (-\infty; -2] \quad 10b \leq -2$$

$$1 = -8x + 10b$$

$$1x$$

$$-1 = -8 \cdot a - 2$$

$$1 = -8a$$

$$a = -\frac{1}{8}$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{8}x - 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

**МФТИ**

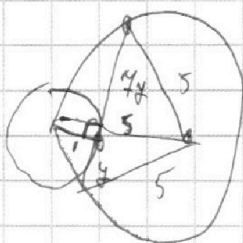
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_0^2 + 8x_0 - 16 - 5 \cdot 25 = 0$$

$$5x_0^2 + 8x_0 - 141 = 0$$

$$x_0 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 5 \cdot 4 \cdot 141}}{10}$$



$$(x_0 - 1)^2 + y^2 = 25$$

$$x_0^2 + 16y^2 = 25 \quad | \cdot \frac{9}{16}$$

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 + 9y^2 - \frac{9}{16}x_0^2 - 9y^2 = 25 - 25 \cdot \frac{9}{16}$$

$$\frac{7}{16}x_0^2 - 2x_0 + 1 - \frac{7}{16} \cdot 25 = 0 \quad | \cdot 16$$

$$7x_0^2 - 32x_0 + 16 - 7 \cdot 25 = 0$$

$$7x_0^2 - 32x_0 - 159 = 0$$

$$x_0 = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 159 \cdot 7}}{7} = \frac{16 \pm 37}{7}$$

$$= \left[ \frac{53}{7}, -3 \right]$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{25 - 9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$5 \cdot \cos \alpha = 4 \Rightarrow \text{Сторона } 8$$

$$5 \cdot 25 = 125$$

$$+125$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ +125 \\ \hline 266 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ \times 2 \\ \hline 282 \end{array}$$

$$2820$$

$$\downarrow$$

$$2884$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 52 \\ \hline 104 \\ 260 \\ \hline 2704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 52 \\ \hline 104 \\ 260 \\ \hline 2704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ +16 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 175 \\ +16 \\ \hline 159 \\ \times 7 \\ \hline 1113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ +6 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 \cdot 5 = 20 \\ 7 \cdot 6 = 42 \\ 7 \cdot 7 = 49 \\ 7 \cdot 8 = 56 \\ 7 \cdot 9 = 63 \end{array}$$

$$29 \cdot 24 = 288$$

$$1113 + 288 = 1401$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 33 \\ \hline 99 \\ +99 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 111 \\ +111 \\ \hline 1369 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + 2x^2 + 2x + 1 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-4 - 49x^2 + 28x - 5x + 3 - 2x - 1 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-49x^2 + 21x - 2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$7x = -7x + 2$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

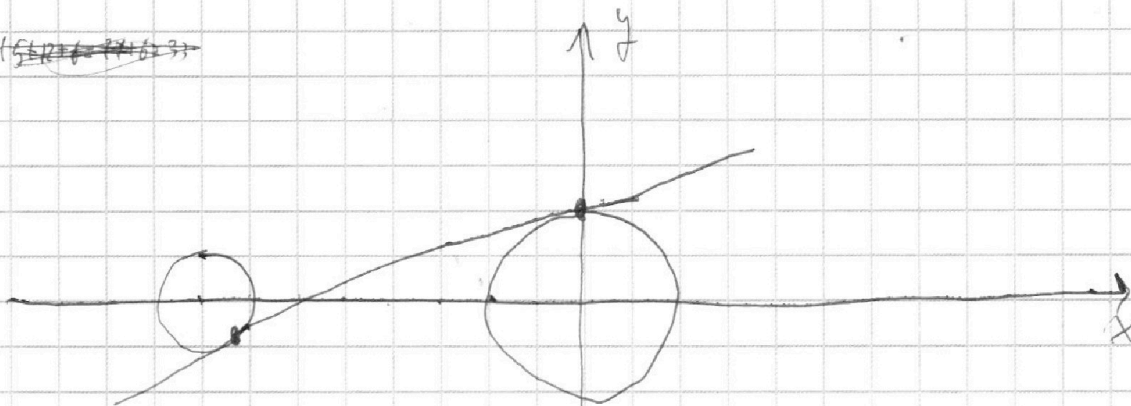
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~15.12.16 = 22.12.16~~



$$\sqrt{\frac{64-9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\begin{cases} (x_1+8)^2 + (kx_1+b)^2 = 1 \\ x_2^2 + (kx_2+b)^2 = 4 \end{cases}$$

$k = ?$

$$x^2 - (x+8)^2 = 3$$

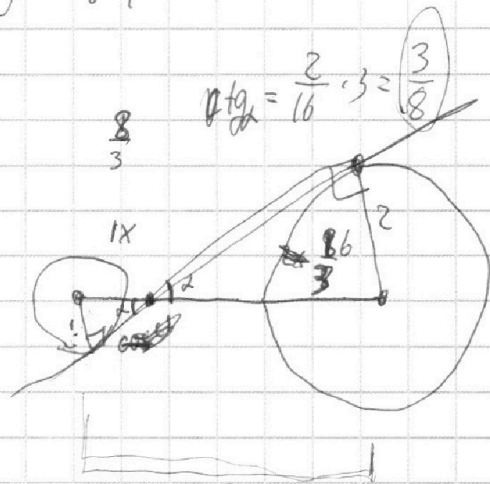
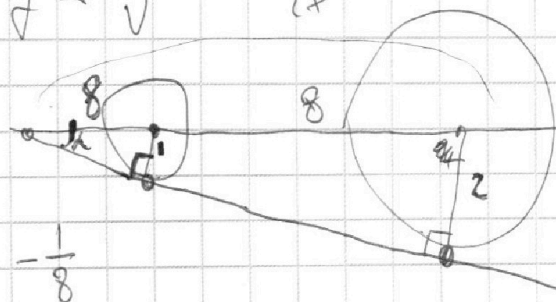
$$(x-x-8)(2x+8) = 3 \quad / : (-8)$$

$$2x+8 = -\frac{3}{8}$$

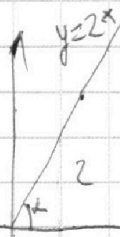
$$x = \frac{-3-64}{2 \cdot 8} = \frac{-67}{16}$$

$$y^2 + \frac{67^2}{16^2} = 4$$

$$y = \sqrt{\dots}$$



$$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$



$$y = tg \alpha \cdot x$$

$$\frac{16^2}{3^2} - 4^2 = \frac{4^4 - 4 \cdot 3^2}{3^2}$$

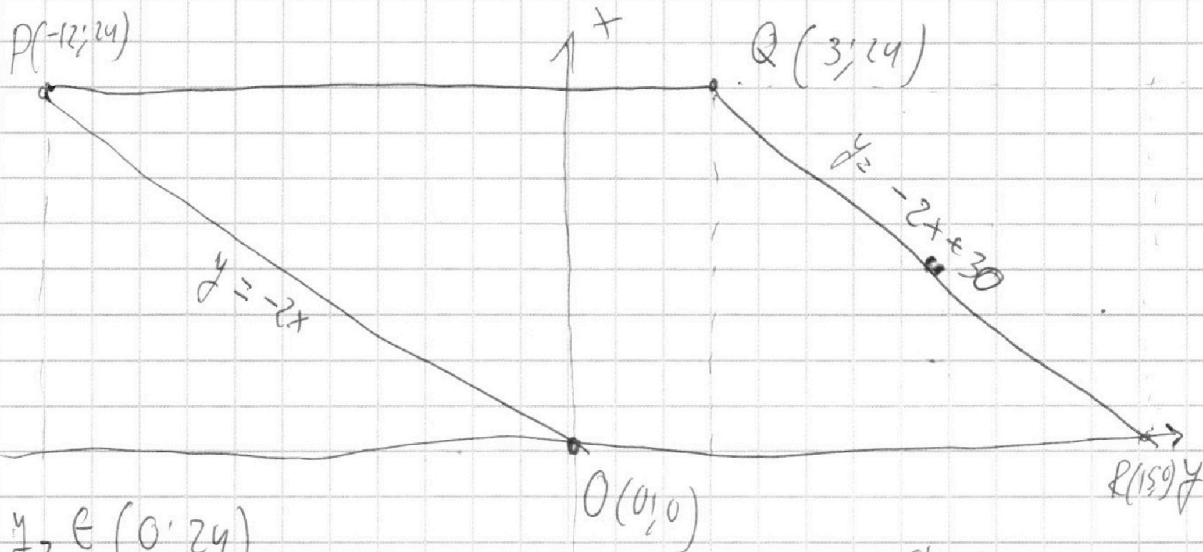
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_2 \in (0; 24)$$

$$y_1 \in (0; 24)$$

$$x_2 \in (-12; 15)$$

$$x_1 \in (-12; 15)$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$0$$

$$12$$

$$0 = 15k + b$$

$$24 = 3k + b$$

$$24 = 12k$$

$$k = 2$$

$$b = -30$$

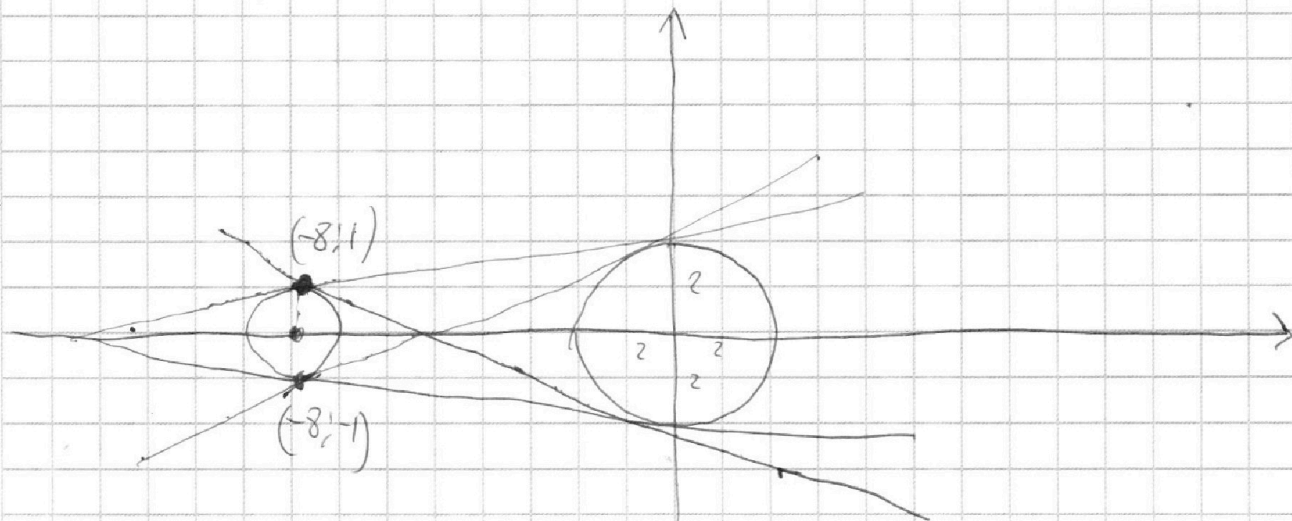
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~1/4~~

~~1/4~~

$$-8 = -k \Rightarrow -1 = -8k + b \Rightarrow b = 8k - 1$$

$$x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 - 2kx + b^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 - 2k(8k-1)x + 64k^2 - 16k + 1 - 4 = 0$$

$$(1+k^2)x^2 - x(2k(8k-1)) + (64k^2 - 16k - 3) = 0$$

$$x = \frac{2k(8k-1) \pm \sqrt{4k^2(8k-1)^2 - (1+k^2)(64k^2 - 16k - 3)}}{1+k^2}$$

$$64k^4 - 16k^3 + k^2 - 64k^2 + 16k + 3 - 64k^4 - 16k^3 + 3k^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

