



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- 1) Заметим, что т.к.  $ab : 2^{14} 7^{10}$ ,  $bc : 2^{17} 7^{17}$ ,  $ac : 2^{20} 7^{37}$ , то  
 $ab = \text{минимум } 2^{14} 7^{10}$ ,  $bc = \text{минимум } 2^{17} 7^{17}$ ,  $ac = \text{минимум } 2^{20} 7^{37}$ .

Тогда  $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = \text{минимум } 2^{(14+17+20)} 7^{(10+17+37)} = 2^{51} 7^{64}$

Однако заметим, что т.к.  $a^2 b^2 c^2$  - квадрат  $abc$ , степени простых делителей должны быть четными. Значит 2 входит не в 51 степень, а в 52. При этом в  $abc$  минимум должно входить  $7^{37}$ , так как  $ab : ac$ .

Значит,  $abc \text{ минимум} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример:

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{12} 7^{27}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{27}$$

$$ac = 2^{21} \cdot 7^{37}$$

Получаем

Ответ:  $2^{26} 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2)  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$

Если  $a+b : m$ , то и  $8ab : m$ . Нужно найти макс.  $m$

$m$  не имеет общих делителей с  $a$  или  $b$ , иначе  $a+b : m$ , т.е. второе число делится на делитель первого (т.е. если  $m$  и  $a$  делятся на некоторое  $p$ , то  $a+b : m$ , то есть  $: p$ . Значит  $b : p$ , т.к.  $a : p$ , того не может быть по условию)

$8ab : m$ . При этом  $ab$  и  $m$  не имеют общих делителей, а значит  $8 : m$ .

Из это следует, что максимальное  $m = 8$ .

Пример:  $a=1$   $b=7$

$$\frac{1+7}{1^2-6 \cdot 1 \cdot 7+49} = \frac{1+7}{1-42+49} = \frac{1+7}{1+7} = \frac{8}{8} \text{ можно сократить на } 8.$$

Ответ:  $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

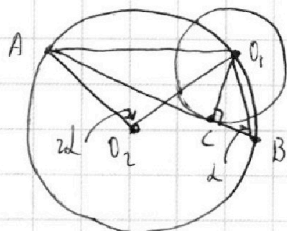
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3)



Обозначим  $CB$  за  $x$ , тогда  $AC = 7x$ .  
 $\angle O_1CB = 90^\circ$ ,  $O_1B^2 = x^2 + 1^2$  (т.к. это касательные)  
 $AO_1^2 = 49x^2 + 1$  (аналогично)  
 Допустим,  $\angle ABO_1 = \alpha$ , тогда  $\angle AO_2O_1 = 2\alpha$ ,  
 т.к. т. центральный

Запишем т. косинусов для  $\triangle AO_1O_2$ .

$$5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 2\alpha = 49x^2 + 1$$

$$\frac{50 - 49x^2 - 1}{50} = \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left( \frac{O_1C}{O_1B} \right)^2 =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{50 - 49x^2 - 1}{50} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$1 - \frac{49x^2 + 1}{50} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\frac{49x^2 + 1}{50} = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \quad \text{Всегда в это уравнение подходят } x = 1 \text{ и } x = -1$$

$$(x+1)(x-1)(49x^2 + 99) = 0 \quad 49x^2 + 99 \text{ всегда } > 0, \text{ нет корней}$$

$$x = -1 \text{ не подх, т.к. } < 0.$$

$$x = 1$$

Ответ:  $AB = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Заметим, что  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$  и  $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ , иначе под корнем отрицательное.  
Давайте поймем, при каких  $x$  это выполняется.

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \quad \frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2} \quad (2x - 3)(x - 1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$  всегда, т.к.  $D < 0$  ( $4 - 8$ ) и коэфф-т при старшем члене  $> 0$ .

Теперь возведем обе стороны равенства в квадрат.

$$\underbrace{2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1}_{4x^2 - 3x + 4} - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \underbrace{(2 - 7x)^2}_{49x^2 - 28x + 4}$$

$$\underbrace{-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}_{\substack{\uparrow \\ 0}} = 45x^2 - 25x$$

$$45x^2 - 25x \leq 0 \quad x(45x - 25) \leq 0$$

$$x \in [0; \frac{5}{9}]$$

$x$  одновременно  $\in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$  и  $x \in [0; \frac{5}{9}]$

Значит,  $x \in [0; \frac{5}{9}]$

Теперь давайте посмотрим, когда и кто больше из  $2x^2 - 5x + 3$  и  $2x^2 + 2x + 1$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 2x^2 - 5x + 3 \quad 7x \geq 2 \quad x \geq \frac{2}{7}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \leq 2x^2 - 5x + 3 \quad 7x \leq 2 \quad x \leq \frac{2}{7}$$

Итак при  $x \in [0; \frac{2}{7}]$  слева. Заметим, что при  $\frac{2}{7}$  слева и справа 0.  
Мы нашли один ответ.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$

$$(I) x^2 + a^2 x^2 + 20axb + 100b^2 - 4 \leftarrow x^2 + y^2 - 4$$

$$(II) x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 20axb + 100b^2 - 1 \leftarrow (x+8)^2 + y^2 - 1$$

Допустим,  $y = x^2 + y^2 - 4$  корни  $x_1, x_2$ . Допустим,  $y$  (I) корни  $x_1, x_2$ .  $y$  (II) корни  $x_3, x_4$ .  
( $x_1 \leq x_2$ ) ( $x_3 \leq x_4$ )

Тогда решением неравенства является

$$((-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)) \cap [x_3; x_4] \quad (III)$$

$$((-\infty; x_3] \cup [x_4; +\infty)) \cap [x_1; x_2] \quad (IV)$$

При этом по условию должно быть ровно два решения. Если  $x_1 = x_2$  или  $x_3 = x_4$ , то решений максимум одно, значит  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_3 \neq x_4$ . Если  $x_1 < x_3$ , то из IV следует, что решений больше 2, если  $x_1 > x_3$ , то из III следует, что решений больше 2. Значит  $x_1 = x_3$ , аналогично  $x_2 = x_4$ .

Таким образом, необходимо, чтобы  $y$  I и II были одинаковые пары корней. Однако напишем теорему Виета:

$$\frac{100b^2 - 4}{a^2 + 1} = \frac{100b^2 + 64 - 1}{a^2 + 1} \quad 100b^2 - 4 = 100b^2 + 63 \quad -4 = 63 \quad \text{Противоречие}$$

$-4 \neq 63$ , а значит произведение корней I и II не равно, а значит и сами корни не совпадают.

Таким образом, ответ: таких  $a$  не существует



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

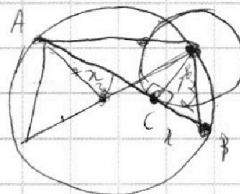
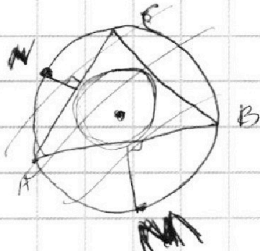
0 1 2 3 4 5 6 7 8  
0 1 4 1 0 1 4 1

10

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
0 1 4 9 6 5 6 9 4 1

$$\frac{2+6}{4-6+2+6+36}$$

$$40-72=-32$$

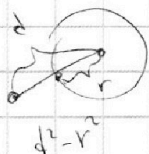


$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a^2+6ab+b^2} &= \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \\ &= \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \end{aligned}$$

(a+b)^2 - 8ab = a^2 + 2ab + b^2 - 8ab = a^2 - 6ab + b^2

8ab = 8ab

8



$$\frac{4+12}{4+4-4+6+2+6+36}$$

$$\frac{1+7}{1-6+7+49} = \frac{8}{8-42} = \frac{8}{-34}$$

$$\frac{3 \times 5}{3 \times 5}$$

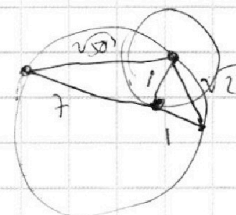
$$x^2 = (x^2 + 1)^2 - 1$$

$$x^2 + 1 = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = x^2 + 1$$

$$x^4 + x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 1) = 0$$



$$\frac{1+7}{1-6+7+49} = \frac{8}{8-42} = \frac{8}{-34}$$

$$25+25-2 \cdot 25 \cdot \cos 2\alpha = 49x^2 + 1$$

$$50 - 50 \cos 2\alpha = 49x^2 + 1$$

$$\cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$\cos 60^\circ = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$400 - 4 = 396$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49$$

15

$$\begin{array}{r|l} 49x^4 + 50x^2 - 99 & x^2 - 1 \\ -49x^4 - 49x^2 & \\ \hline 99x^2 - 99 & \end{array}$$

$$\frac{50 - 49x^2 - 1}{50} = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{50 - 49x^2 - 1}{50} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$50 \cdot 1 - \frac{49x^2 + 1}{50} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\frac{49x^2 + 1}{50} = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 = 99$$

$$x^2(49x^2 + 50) = 99$$

x=1

$$(x+1)(x-1)(49x^2+99)=0$$

$$49x^2 + 99 = 0$$

$$x^2 = -\frac{99}{49}$$

x=2

x=2





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

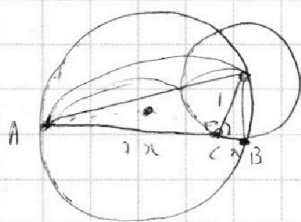
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$\sqrt{49x^2+1} \cdot (\sqrt{49x^2+1}-1)$$

$$49x^2+1 - \sqrt{49x^2+1} = 49x^2$$

$$1 = 49x^2+1$$

$$x=0$$

$$x^2+1 - \sqrt{x^2+1} = x^2$$

$$1 = x^2+1$$

$$\sqrt{x^2-5x+3} - \sqrt{x^2+2x+1} = 2-7x$$

(4x)

$$x^2-5x+3 \geq 0$$

$$x^2+2x+1 \geq 0$$

$$(x-3)(x-1)$$

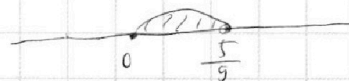
$$x^2+2x+1$$

$$x^2-5x+3$$

$$45x^2-25x \leq 0$$

$$x(45x-25) \leq 0$$

$$x \leq 0 \quad \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$



$$\frac{5}{9} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{7} < \frac{5}{9}$$

$$18 < 45$$

Есть

[0; 1]

$$x^2+2x+1 \geq x^2-5x+3$$

$$7x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{7}$$

$$x \leq \frac{2}{7}$$

$$[0; \frac{2}{7}]$$

$$[\frac{2}{7}; 1]$$

Есть

$$2-7x > 0$$

$$2-7x < 0$$

Нет решения? Есть  $(\frac{2}{7})$

$$[0; \frac{5}{9}]$$

I ↓

$$2-7x \downarrow$$

$$[0; \frac{5}{9}]$$

II ↑

$$1 = \sqrt{49x^2 + 1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab : 2^{14} 7^{10}$$

$$ab = 2^{14} 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} 7^{17}$$

$$bc = 2^{17} 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} 7^{37}$$

$$\frac{a}{b} : ac = 2^{20} 7^{37}$$

$$\frac{a}{b} = 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$a^2 = 2^{14} 7^{30}$$

$$a^2 = 2^{18} 7^{30}$$

$$a = 2^9 7^{15}$$

$$b = 2^5 7$$

$$abc = 2^{28} 7^{32}$$

2)

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$$

$$a^2-6ab+b^2$$

$$D = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

$$\frac{6b \pm \sqrt{32}b}{2} = \frac{6b \pm 4\sqrt{2}b}{2} = 3b \pm 2\sqrt{2}b$$

$$\frac{1}{a-6b+6\sqrt{2}b} + \frac{1}{a^2/b-6a+b}$$

$$\frac{1}{1-6b/a+b^2/a^2} + \frac{1}{a^2/b^2-6a/b+1}$$

$$\frac{1}{a} +$$

$$\frac{1+b/a}{a-6b+b^2/a}$$

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}{1-6b/a + \frac{b^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a}(\frac{b}{a} + 1)}{(\frac{b}{a} - 3 - 2\sqrt{2})(\frac{b}{a} - 3 + 2\sqrt{2})}$$

$$36 - 4 \cdot 32$$

$$x^2 - 6x + 1$$

$$D = 36 - 4 \cdot 1 = 32$$

$$\frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$k_1 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{17}$$

$$k_2 2^{17} 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

$$k_3 2^{20} 7^{37}$$

$$k_1 k_2 k_3 2^{51} 7^{64} = a^2 b^2 c^2$$

$$2^{52} 7^{64} = a^2 b^2 c^2$$

$$abc = 2^{26} 7^{32}$$

$$2^{26} 7^{38} = abc$$

$$ac: b = 7 \cdot 2^6$$

$$c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

$$a = 7^{11} \cdot 2^9$$

$$abc = 2^x 7^y$$

$$c =$$

$$a^1 b^1 c^2 \min 2^{51} 7^{64}$$

$$2^{52} 7^{74}$$

$$37 \cdot 2 = 74$$

$$2^{25} 7^{37}$$

$$c = 2^{12} 7^{27}$$

$$b = 2^6 7^{25}$$

$$a = 2^9 7^{10}$$

$$18 + 9 = 27$$

$$b = 2^5$$

$$a = 2^9 7^{10}$$

$$c = 2^{12} 7^{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 & 7x - 11 \\ - 2009x^4 - 3444x^3 & \\ \hline 1218x^3 + 633x^2 - 4x - 12 & \\ - 1218x^3 - 1988x^2 & \\ \hline 2621x^2 - 4x - 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 217 \\ \hline 12 \\ + 574 \\ \hline 287 \\ 34440 \\ - 2226 \\ \hline 1218 \\ 12 \times 174 \\ \hline + 248 \\ 174 \\ \hline 1588 \\ + 633 \\ \hline 2621 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1) (0;0)

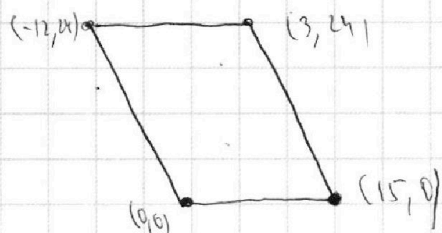
P (-12; 24)

Q (3; 24)

R (15; 0)

A (x<sub>1</sub>; y<sub>1</sub>) B (x<sub>2</sub>; y<sub>2</sub>)

x<sub>1</sub>



$$0 < x < 15 \quad \text{и} \quad 0 < y < 24$$

$$2 \cdot 15 - 0 + 24 - 0 = 12$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$(12 - 2x_2 + 2x_1)$$

$$12x - 2xx_2 + 2xx_1 - 12x_1 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 = yx_2 - yx_1 - yx_2 + yx_1$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$

$$x^2 + a^2x^2 = 20axb + 100b^2 - 4$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 - 1$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(20ab) + 100b^2 - 4$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(16 + 20ab) + 100b^2 + 63$$

$$D = 20^2 a^2 b^2 - 4(100b^2 - 4)(a^2 + 1)$$

$$D = (16 + 20ab)^2 - 4(100b^2 + 63)(a^2 + 1)$$

$$-20ab \pm \sqrt{20^2 a^2 b^2 - 4(100b^2 - 4)(a^2 + 1)}$$

$$\frac{100b^2 - 4}{a^2 + 1} = \frac{(100b^2 + 63)(a^2 + 1)}{a^2 + 1}$$

$$100b^2 - 4 = 100b^2 + 63$$

$$\begin{aligned} & x_1 \quad x_2 \\ & (-\infty, x_1] \cup [x_1, \infty) \\ & [x_1, x_2] \\ & [x_1, x_2] \cup [x_2, \infty) \end{aligned}$$