



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a_1 = 2^{q_1} \cdot 7^{q_2}$ ;  $b_1 = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$ ;  $c_1 = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2} \Rightarrow$  *вариант 1*

$a_1 b_1 = 2^{q_1+b_1} \cdot 7^{q_2+b_2} : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$a_1 b_1 c_1 = 2^{q_1+b_1+c_1} \cdot 7^{q_2+b_2+c_2} : 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow$

$b_1 c_1 = 2^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} : 2^{17} \cdot 7^{18}$

$$\begin{cases} q_1 + b_1 \geq 15 \\ a_1 + b_1 \geq 11 \\ q_1 + c_1 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 18 \\ q_1 + c_1 \geq 23 \\ a_2 + c_2 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} 2(q_1 + b_1 + c_1) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \\ 2(a_1 + b_2 + c_2) \geq 11 + 18 + 39 = 68 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} q_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{55}{2} = 28 \\ a_1 + b_2 + c_2 \geq \frac{68}{2} = 34 \end{cases}$

Если я смогу привести пример на то, что  $a b c = 2^{28} \cdot 7^{39}$ , то  
(т.к.  $a c ; 7^{39}$ )

я приведу конкретные числа

$a b c = 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{11} \\ b = 2^5 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{18} \end{cases}$  (я поочередно беру на  $a, b, c$  и  $a b c$ )

Такой пример не подходит, так как  $2^{11} \cdot 2^5 \cdot 2^{12} = 2^{28}$  и  $7^{11} \cdot 7^{18} = 7^{29}$  (не хватает  $7^{10}$ )

Итак, следующий шаг

К тому же я приведу пример

Ответ:  $2^{23} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} \cdot \text{Пусть по условию } \begin{cases} a+b \equiv m \\ (a+b)^2-3ab \equiv m \end{cases}$$

$$\text{Если } (a+b) \equiv m, \text{ то } ((a+b)^2-3ab) \equiv m \Rightarrow$$

Если  $a \equiv m$ , то, т.к.  $a$  и  $b$  — взаимно просты,  
то  $b \not\equiv m$ , но  $(a+b) \equiv m$  — противоречие

~~$a \not\equiv m$ ,  $b \not\equiv m \Rightarrow$   $3a$  имеет делителя  $m$~~

~~и только если  $3 \equiv m$ ,  $a \equiv b$~~

$$\begin{cases} 3a \equiv m \\ 3b \equiv m \\ a \equiv m \\ b \equiv m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a \equiv m \\ 3b \equiv m \\ a \equiv m \\ b \equiv m \end{cases} \Rightarrow \text{получаем } m \equiv 3$$

получаем  $m \equiv 3$

Если  $a+b \equiv m$ , то и при этом  $a$  и  $b$  взаимно просты,

то  $3a \not\equiv m$ ,  $3b \not\equiv m$  и  $a \not\equiv m \Rightarrow$  только  $3 \equiv m$ .

Максимальное число, на которое делится 3 — это 3

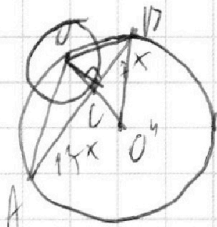
Пример:  $a=2$ ,  $b=4 = \frac{3}{3} = 3 \cdot 2 \cdot 4$

Ответ:  $m=3$

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3



3 Центр окружности  $\Omega - O$

Положим  $OC = r = 7 \Rightarrow OB^2 = 49 + 4x^2 \quad (AB = 24x)$

$AO^2 = 14^2 x^2 + 49$

3 Центр окружности  $\Omega' - O'$

Положим  $\cos \angle OAB = \frac{1}{2} \angle O'O'B$ ;  $\cos \angle OAB = \frac{14x}{\sqrt{14^2 x^2 + 49}} \Rightarrow$

$\cos \angle O'O'B = 2 \cdot \cos^2 \angle OAB - 1 = \frac{2 \cdot 14^2 x^2}{14^2 x^2 + 49} - 1 = \frac{14^2 x^2 - 49}{14^2 x^2 + 49}$

$OB^2 = 49x^2 + 49$

По т. косинусов  $OB^2 = 49x^2 + 49 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{14^2 x^2 - 49}{14^2 x^2 + 49} \Rightarrow$

$14^2 x^2 + 14^2 x^2 + 49x^2 + 49 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{14^2 x^2 - 49}{14^2 x^2 + 49} \Rightarrow$

$14^2 x^2 + 14^2 x^2 + 49x^2 + 49 - 4 \cdot 165 = 0 \Rightarrow$

$14^2 x^2 + x^2(14^2 + 49) + 49 - 4 \cdot 165 = 0$

Зна  $x^2 = t \Rightarrow 14^2 t^2 + (14^2 + 49)t + 49 - 4 \cdot 165 = 0$

$D = 14^4 + 49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 14^2 - 4 \cdot 14^2 \cdot 49 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 = (14^2 - 49)^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 =$

$= 10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 =$

$t = \frac{-14^2 - 49 \pm \sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165}}{2 \cdot 14^2} = t \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165} - 14^2 - 49}{2 \cdot 14^2}} \Rightarrow$

$t = \frac{-14^2 - 49 - \sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165}}{2 \cdot 14^2}$  — не подходит  $AB = 24x$

Ответ:  $AB = \frac{24}{14} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165} - 14^2 - 49}{2}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-5x$$

$$f(x) = 3x^2-6x+2; g(x) = 3x^2+3x+1$$

$$x_0 = 2$$

$$x'_0 = -\frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = 12 - 12 + 2 = 2 > 0; g(x'_0) = 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} > 0$$

$$3 \sqrt{3x^2-6x+2} = a; \sqrt{3x^2+3x+1} = b. \text{ Тогда}$$

$$a-b = a^2-b^2 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} \end{cases}$$

Задача №4

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-5x$$

$$3 \sqrt{3x^2-6x+2} = a; \sqrt{3x^2+3x+1} = b \Rightarrow a-b = a^2-b^2 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$3x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} \\ x = 1 - \frac{1}{3} \end{cases} \text{ Тогда } 3x^2+3x+1 =$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$\begin{cases} 3(1+\frac{1}{3})^2 + 3(1+\frac{1}{3}) + 1 > 1 \\ 3(1-\frac{1}{3})^2 + 3(1-\frac{1}{3}) + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3(1-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}) + 3 - \sqrt{3} + 1 =$$

$$= 8 - 3\sqrt{3} > 1$$

$$\text{при } x \in (-\infty; 1-\frac{1}{3}] \cup [1+\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$\begin{cases} 3x = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Ответ:  $\{\frac{1}{3}\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

6  
☐

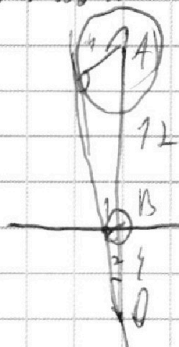
7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 - программисты

Анализ



$$\frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}, AB = 12 \Rightarrow AB \Rightarrow OB \Rightarrow OB = 4$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = -\operatorname{tg}(\beta) = a = \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} = \sqrt{15} \Rightarrow \text{Вывод}$$

Умножим на  $- \sqrt{15}$  мы получим:

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Можно и 18 б

$$\begin{cases} x+y-86=0 \\ (x^2+y^2-1) \cdot (x^2+y^2-16)=0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1) \cdot (x^2+y^2-16)=0$$

Если рассмотреть график второго

уравнения, то получим такую картинку,

где либо не виден первый круг, либо второй

Соответственно, если предположить, что будет касаться один из

окружностей, а другая имеет свой 2 общие точки, то тогда

будет бесконечно много пересечений  $\Rightarrow$  решений. Тогда, получим <sup>из</sup>

нам покажем только 4 случая с касательными.

1 случай:

$$\frac{AB}{BO} = \frac{4}{1} = 4$$

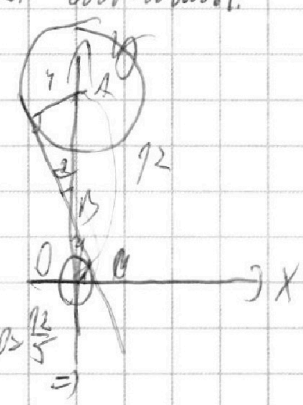
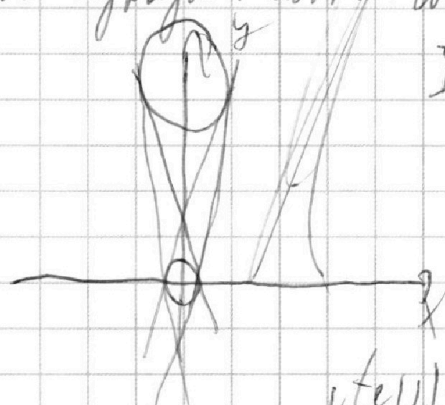
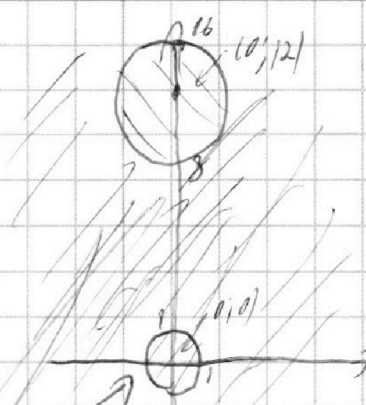
$$AB = \frac{1}{5} \cdot 4; BO = \frac{12}{5}$$

$$\text{ctg}(12) = \text{ctg}(4) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{12^2-4^2}}{4} = \frac{\sqrt{100}}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$-01 = \frac{\sqrt{4-12}}{5} \text{ тоже не подходит.}$$

Важно отметить, что



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

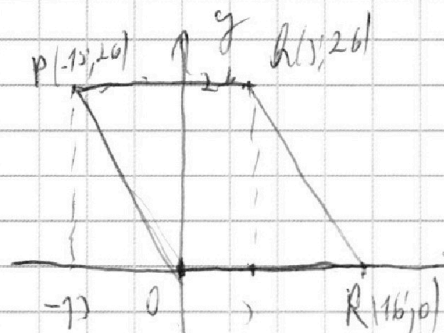
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

+ прямую, перпендикулярную  $|OP|$ :

$$R = \frac{16}{13} - \frac{26}{13} = -2; b = 0$$

$$y = -2x + b$$

Всего на  $|OP|$  13 точек с целочисленными координатами.  
Если внимательно посмотреть на выражение из условия и сказать,  
что все точки с целыми координатами внутри параллелограмма  
лежат на прямой,  $\parallel$   $OR$   $y = -2x + b$  (или  $OR$ ), то

$$2x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = b_2 - b_1 = 14$$

прямая,  $\perp |OP|$  имеет уравнение  $y = -2x + 0$ ,  $|QR|: y = 2x$

$$0 = -2x + b \Rightarrow b = 32 \Rightarrow b \in [0; 32]$$

Если  $b_1 = 0$ , то  $b_2$  должно равняться 14

$$b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = 15, \dots, b_1 = 18 \Rightarrow b_2 = 32$$

Всего на каждой  $b_1$  прямой по 13 целочисленных точек, т.е.  
всего пар  $18 \cdot 13 = 13^2$  (пар)

$$\text{Ответ: } 13 \cdot 13^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

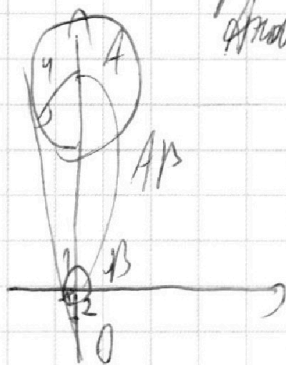
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 - преобразование



Анализ:  $\frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}$ ;  $AB = 12 \Rightarrow AB = 3 \cdot OB = 12 \Rightarrow OB = 4$

$$\tan(\angle A) = -\tan(\angle B) = -4 = \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} = \sqrt{15} \Rightarrow$$

В силу симметричности -  $\sqrt{15}$  также

возможно

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

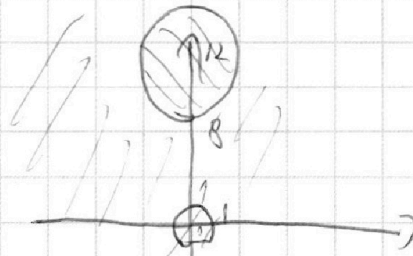
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6

$$5 \quad 4x + y - 86 = 0$$

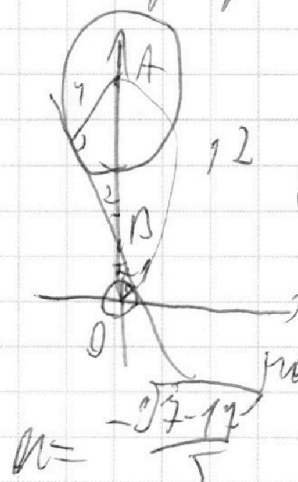
$$(x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 12) - 16 \leq 0$$



Если нарисовать график второго неравенства,  
то получим две точки касания,  $4x + y - 86 = 0$   
либо не является решением первого уравнения, или является  
решением, либо второй.

Соответственно, если прямая будет пересекать одну из  
окружностей в 2 точки (касательная), то будет бесконечно  
много пересечений  $\Rightarrow$  не будет выполняться неравенство.

Потому получаем, как находим только 4 случая и  
выполним.



$$\frac{AB}{BO} = \frac{4}{1} \Rightarrow AB = \frac{12}{5} \cdot 4; BO = \frac{12}{5}$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta) = -\alpha = \frac{\sqrt{12^2 - 4^2}}{4} = \frac{\sqrt{7-12}}{5}$$

Ввиду симметрии  
получим также

$$\alpha = \frac{-\sqrt{7-12}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

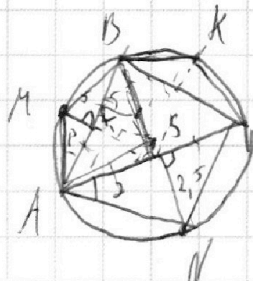
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 15



$$1) \angle ADB = \angle ANK = \angle MLC; \angle AKB = \angle NPB \Rightarrow \triangle AKB \sim \triangle NPB;$$

$$\triangle ANC \sim \triangle NPB \Rightarrow \triangle ANS \sim \triangle NLC - \text{двухугольники}$$

$$\text{и диагонали} \Rightarrow \triangle NSL \sim \triangle NLC - \text{равные радиусы, угол}$$

$$\angle ALC = \angle ANK.$$

$$AB = 2 \sqrt{R^2 - (R - 2.5)^2} = 2 \sqrt{10R - 25}$$

$$AL = 2 \sqrt{R^2 - (R - 2.5)^2} = 2 \sqrt{R^2 - R^2 + 5R - 6.25} = 2 \sqrt{5R - 6.25}$$

$$2) \angle LAM = 2; \angle MAP = \beta.$$

Проекции точек на угл. A. K - проекция точки C на окр.

$$\angle BKC = \angle KLC \Rightarrow \triangle BKC \sim \triangle KLC - \text{п.д.} \Rightarrow 2\angle AKB + 2\angle ANK + 2\angle BKC = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\angle BKC = 180^\circ - \angle AKB - \angle ANK \Rightarrow \angle KLC = 2\angle KBC = 90^\circ - 2 - \beta \Rightarrow$$

$$\cos(2\angle KLC) = \cos(2\angle KBC) = \cos 2 \cdot \cos \beta - \sin 2 \cdot \sin \beta.$$

$$\angle B = \angle A = \sqrt{10R - 25} \Rightarrow \angle B = \angle A = \sqrt{25 + 10R - 25} = \sqrt{10R}$$

$$\angle B = \angle A = \sqrt{10R - 25} \Rightarrow \angle B = \angle A = \sqrt{25 + 10R - 25} = \sqrt{10R}$$

$$\text{аналогично, } AN = NL = \sqrt{5R} \Rightarrow \cos 2 = \frac{\sqrt{10R - 25}}{\sqrt{10R}} = \frac{\sqrt{2R - 5}}{\sqrt{2R}} \Rightarrow$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \frac{2R - 5}{2R}} = \sqrt{\frac{2R - 2R + 5}{2R}} = \sqrt{\frac{5}{2R}}; \cos \beta = \frac{\sqrt{5R - 6.25}}{\sqrt{5R}}; \sin \beta = \frac{5}{\sqrt{5R - 6.25}}$$

$$\cos(\angle KLC) = \frac{\sqrt{2R - 5} - \sqrt{5R - 6.25}}{\sqrt{10R}} = \frac{12.5}{\sqrt{10R}}$$

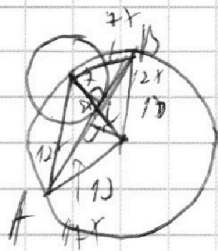
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$h = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$AP = 13$$

$$AB = 7$$

$$\frac{13}{a} - 1 = \frac{13 - a}{a} = \frac{\sqrt{13^2 - 12^2} + 1}{a}$$

$$\cos L = \frac{\sqrt{13^2 - 12^2} + 1}{13 - a}$$

$$\sin L = \frac{\sqrt{13^2 - 12^2} + 1}{13 - a}$$

$$15 \sin L = \sqrt{13^2 - 12^2} + 1$$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, cl: 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}, bc = 2^{17} \cdot 7^{18}, cl = 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$\frac{m}{R} \cdot a = \frac{1}{R} \cdot b \Rightarrow a = b$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$2^{15} \cdot 7^{11}, 2^{17} \cdot 7^{18}, 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$11 + 35 + 18 = 58$$

$$ab \geq 2^m, a \geq 15, m \geq 11$$

$$a_1 + b_1 \geq 15, a_2 + b_2 \geq 11, a_3 + b_3 \geq 23$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15 \\ a_2 + b_2 \geq 11 \\ a_3 + b_3 \geq 23 \\ b_1 + b_2 \geq 17 \\ b_2 + b_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$2a_1 + 2b_1 + 2a_2 + 2b_2 + 2a_3 + 2b_3 \geq 15 + 11 + 23 = 49$$

$$abc_{\min} = 2^{28} \cdot 7^{23}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \leq b$

$$a^2 = 49b + b^2$$

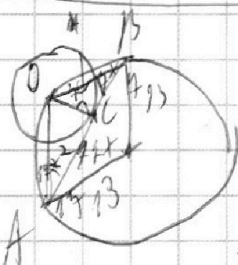
$$a + b : m$$

$$(a+b)^2 = 30b : m$$

$$m = 5$$

$$30b : m \Rightarrow \begin{cases} 5 : 4 \\ a : b \Rightarrow 16 : m \\ b : m \Rightarrow a : m \\ a + b : m \end{cases}$$

$$45 + 45x^2 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{14x^2 - 45}{14x^2 + 45} \Rightarrow$$



$$\sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{4x^2 + 9x^2} = \sqrt{13x^2} = \sqrt{13}x$$

$$AO^2 - BO^2 = 10 \cdot 24x^2 = \frac{16x^2}{24x^2} \cdot AO = \frac{5}{12} AB^2$$

$$AO^2 = 24x^2, BO^2 = 9x^2, AB^2 = 33x^2$$

$$\frac{AO^2 + AB^2 - BO^2}{2 \cdot AO \cdot AB} = \frac{\sqrt{13x^2 + 45}}{2 \cdot \sqrt{14x^2 + 45}} = \frac{14x}{\sqrt{14x^2 + 45}}$$

$$\sqrt{14}$$

$$20 \cdot 24x^2$$

$$\frac{14x}{\sqrt{14x^2 + 45}}$$

$$AO = \frac{1}{24x^2}$$

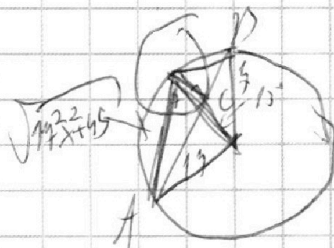
$$AO = \frac{1}{14x^2 + 45}$$

$$BO^2 = 45 + 9x^2$$

$$\frac{14x^2 + 45 + 45 + 9x^2}{2} = \frac{24x^2}{2}$$

$$\frac{14x^2 + 45 + 45 + 9x^2}{2} = \frac{24x^2}{2}$$

$$\cos 2 = \frac{1}{2}$$



$$45x^2 + 45 =$$

$$\cos 2 = \frac{14x^2 + 45 + 45 + 9x^2}{2 \cdot 24x^2} = \frac{24x^2}{2 \cdot 24x^2} = 1$$

$$\cos 2 = \frac{14x^2 + 45 + 45 + 9x^2}{2 \cdot 24x^2} = \frac{24x^2}{2 \cdot 24x^2} = 1$$

$$\cos 2 = \frac{14x^2 + 45 + 45 + 9x^2}{2 \cdot 24x^2} = \frac{24x^2}{2 \cdot 24x^2} = 1$$

$$\cos(2L) = 2 \cdot \frac{14x^2}{14x^2 + 45} - 1 = \frac{2 \cdot 14x^2 - 14x^2 - 45}{14x^2 + 45} = \frac{14x^2 - 45}{14x^2 + 45}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}, b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}, c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

$$2^{a_1+b_1} \cdot 7^{a_2+b_2} = 2^{15} \cdot 7^{11}, 2^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} = 2^{17} \cdot 7^{18}, 2^{a_1+c_1} \cdot 7^{a_2+c_2} = 2^{21} \cdot 7^{33}$$

$$\begin{cases} a_1+b_1 \geq 15 \\ a_2+b_2 \geq 11 \\ a_1+c_1 \geq 17 \\ a_2+c_2 \geq 18 \end{cases}$$

$$2(a_1+b_1+c_1) \geq 15+23+17 \quad (A)$$

$$2(a_2+b_2+c_2) \geq 18+11+33 = 33$$

$$33+11 = 52+18 = 68 : 2 = 34$$

$$a+b+c = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$24+5=29$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

$$\begin{cases} a+b \in m \\ a \cdot b \in m \end{cases}$$

$$\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{a+b}{m}, \frac{a \cdot b}{m}$$

$$a \in m, a+b \in m, a/m, b/m$$

$$a=3, b=4$$



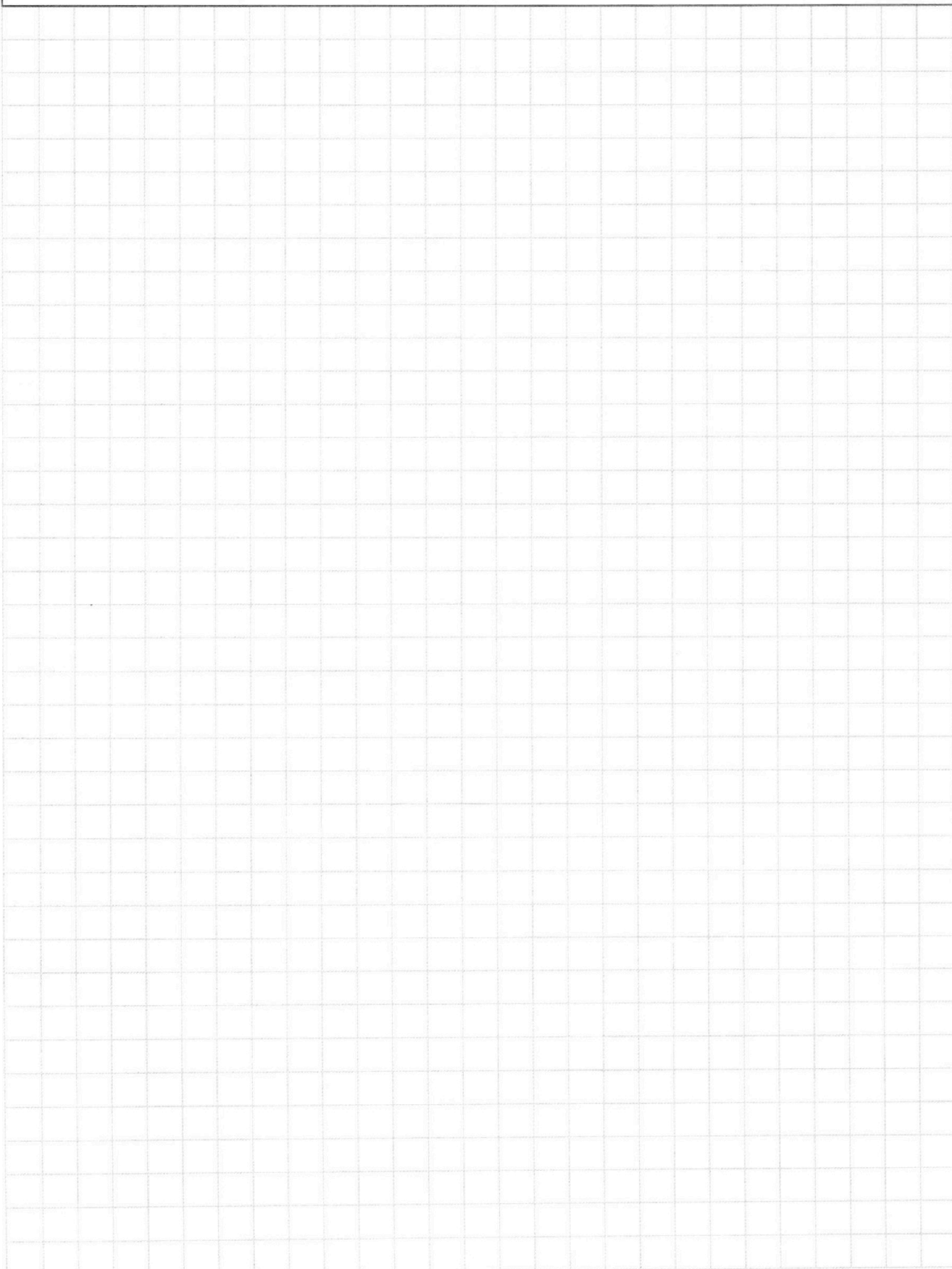
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49 \cdot 49^2 x^2 + 49^2 + 49^2 \cdot 19^2 x^2 + 49^2 x^2 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot 19^2 x^2 - 2 \cdot 165 \cdot 49$$

$$t = x^2$$

$$49 \cdot 19^2 t + 49^2 + 49 \cdot 19^2 t^2 + 49^2 t = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot 19^2 t - 2 \cdot 165 \cdot 49$$

$$49 \cdot 19^2 t^2 + (49 \cdot 19^2 + 49 + 19^2 + 2 \cdot 165 \cdot 19^2) t + 49^2 + 2 \cdot 165 \cdot 49 = 0$$

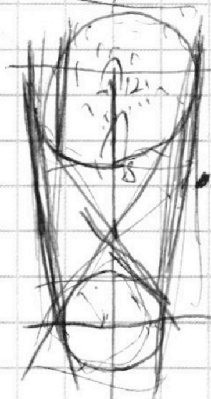
$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 18 - 12 \cdot 2 = -6$$

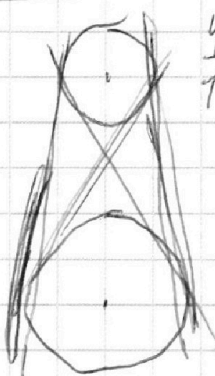
$$3x^2 - 6x + 2 = x^2 + 5x + 1 \Rightarrow$$

$$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \quad 3 \cdot \frac{1}{25} - \frac{6}{5} + 2 = \frac{3}{25} - \frac{6}{5} + 2 = \frac{3}{25} - \frac{30}{25} + \frac{50}{25} = \frac{23}{25}$$



$$y = -ax + 8.6$$

$$b = 8.6 \quad a = 0$$



$$\frac{y}{x} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}x$$

$$5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$\sqrt{\frac{144}{25}} - \sqrt{\frac{144 - 25}{5}} = \frac{\sqrt{144}}{5} - \frac{\sqrt{119}}{5} = \frac{\sqrt{144} - \sqrt{119}}{5}$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$x^2 + (-ax + 8.6 - 12)^2 = 16$$



$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$





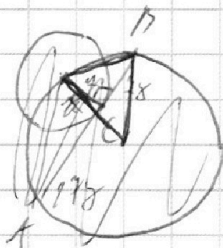
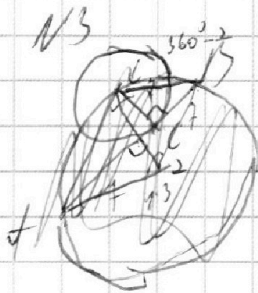
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{93+45y^2} = \sqrt{1+9y^2}$$

$$\cos(2) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{\cos(2)}$$

$$a, b, c; ab, 2 \cdot 7^{15}, bc, 2 \cdot 7^{18}, ac, 2 \cdot 7^{23}$$

$$abc = ?; ab = R \cdot 2 \cdot 7^{15}; bc = m \cdot 2 \cdot 7^{18}; ac = S \cdot 2 \cdot 7^{23}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{2 \cdot 7^{15}}{R} \cdot \frac{m}{R} \Rightarrow c = 2 \cdot 7^{15} \cdot \frac{m}{R} \cdot a$$

$$2 \cdot 7^{15} \cdot \frac{m}{R} \cdot a = S \cdot 2 \cdot 7^{23} \Rightarrow a = S \cdot 2 \cdot 7^{23} \cdot \frac{R}{m} \Rightarrow a = \sqrt{S \cdot 2 \cdot 7^{23} \cdot \frac{R}{m}}$$

$$c = 2 \cdot 7^{15} \cdot \frac{m}{R} \cdot \sqrt{S \cdot 2 \cdot 7^{23} \cdot \frac{R}{m}} = 2 \cdot 7^{20} \cdot \sqrt{S \cdot 2 \cdot \frac{m}{R}}$$

$$b = \frac{R \cdot 2 \cdot 7^{15}}{a} = \frac{R \cdot 2 \cdot 7^{15}}{\sqrt{S \cdot 2 \cdot \frac{m}{R}}} = \sqrt{\frac{R \cdot m}{S \cdot 2^{21}}} = 1 \Rightarrow \frac{R \cdot m}{S} = 2$$

$$abc = \sqrt{S \cdot 2^{21} \cdot \frac{R}{m}} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot m}{S \cdot 2^{21}}} \cdot \frac{2 \cdot 7^{20}}{\sqrt{S \cdot 2 \cdot \frac{m}{R}}} = 2 \cdot 7^{20} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot m}{S \cdot 2 \cdot \frac{m}{R}}} = 2 \cdot 7^{20} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{S \cdot 2}}$$

$$= \sqrt{S \cdot m \cdot R \cdot 2^{21}} \cdot 2 \cdot 7^{18} \Rightarrow a$$

$$S \cdot m \cdot R = 2 \cdot 7^{18} \Rightarrow$$

$$ab = 2 \cdot 7^{17}$$

$$bc = 2 \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2 \cdot 7^{23}$$

$$\frac{c}{a} = 2 \cdot 7 \Rightarrow c = 2 \cdot 7 \cdot a$$

$$a^2 = 2 \cdot 7^{12} \Rightarrow a = 2 \cdot 7^{11}$$

$$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} = \frac{a+b}{m(a+b)^2-3ab} \Rightarrow$$

$$\frac{10+10}{40000-30000} = \frac{20}{10000+10000} = \frac{20}{20000}$$

$$\frac{10+10}{40000-30000} = \frac{20}{10000+10000} = \frac{20}{20000}$$

$$\frac{10+10}{40000-30000} = \frac{20}{10000+10000} = \frac{20}{20000}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

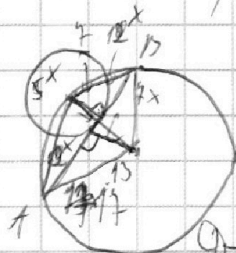
$$2^{15} \cdot 7^{11}, 16; 2^{17} \cdot 7^{18}, 16; 2^{25} \cdot 7^{55}$$

$$ab > k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, b = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}, 16 = l \cdot 2^{25} \cdot 7^{55}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{R} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow c = \frac{m}{R} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot a = 1 \cdot \frac{m}{R} \cdot a^2 = 2^{27} \cdot 7^{39} \Rightarrow 4x, 13x$$

$$a = \sqrt{\frac{2^{17} \cdot 7^{18} \cdot R}{R \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}} = 1, c = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot \sqrt{\frac{m}{R} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}}$$

$$b = \frac{R \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{a} = \frac{R \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{2^{17} \cdot 7^{18} \cdot \sqrt{\frac{m}{R} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}}}$$



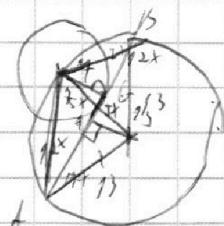
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



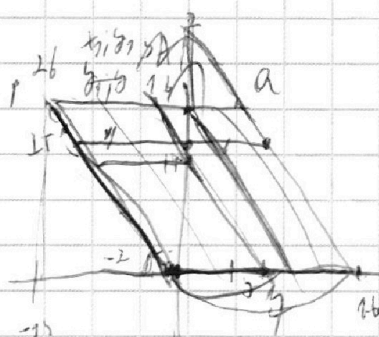
$$\sqrt{168-114t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2-4}}$$

$$3x^2 - 6x + 2; 3x^2 + 5x + 1$$

$$3x^2 - 18x + 1,5 = t$$

$$\sqrt{t - 9,5x + \frac{1}{2}} - \sqrt{t + 9,5x - \frac{1}{2}} = 1 - 9x$$

$$\frac{15 \cdot 26}{13 \cdot 14} = \frac{30}{14}$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$4(t+1) = 2x+y$$

$$f(x_1) + f(x_2) = 14 \quad b=14$$

$$x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \quad y=0 \Rightarrow -2x=1$$

$$y = -2x + b$$

$$16 \cdot \frac{26}{2} + 14 \cdot \frac{16}{2} = 30 \cdot \frac{26}{2} = 15 \cdot 26 \quad 16 \cdot 13$$

$$y = -2x + b$$

$$0 = -2 \cdot 16 + b \Rightarrow b = 32$$

$$b_1 + b_2 = 14$$

$$b \in [0; 32]$$

$$Lb$$

$$b=0 \Rightarrow b=14; b=1, b=3 \quad b=14 \Rightarrow b=0$$

$$15, 15 \cdot 26 \cdot 23, 13; 13 \cdot 13 \cdot 24 = 13 \cdot 19$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

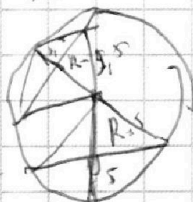
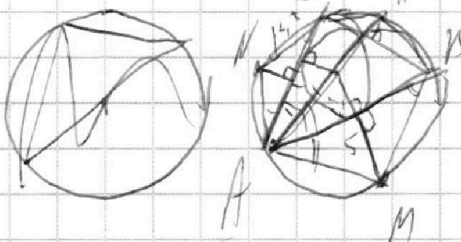
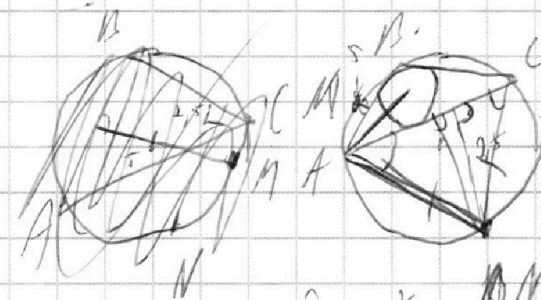
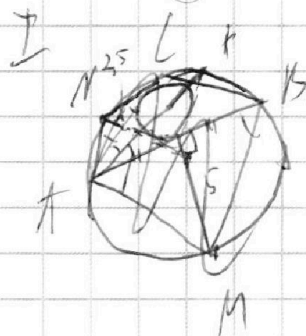
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 11x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$y = -11x + 86$$



$$\frac{360^\circ - 22^\circ - 22^\circ}{2} = 150^\circ - 22^\circ = 128^\circ$$

$$AC = \sqrt{R^2 - R^2 + (R - 6,25)}$$

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{5R - 6,25}{10R - 25}} = \sqrt{\frac{R - 1,25}{2R - 5}}$$

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{R - 1,25}{2R - 5}} = \frac{BA}{BL} \frac{CL}{BL}$$

