



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА N1

$$a, b, c : 2^{20} \cdot 7^{37} \rightarrow a, b, c : 7^{37}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \quad (x_1, y_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ b &= 2^{x_2} \cdot 7^{y_2} \quad (x_2, y_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ c &= 2^{x_3} \cdot 7^{y_3} \quad (x_3, y_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{aligned} \quad (*)$$

Заметим, что **минимальные** показатели в простом разложении **каждого** из a, b, c не меньше 2^{20} и 7^{37} соответственно, не могут т.к. тогда a, b, c делились бы на этот **простой** множитель (т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$), а он не входит в разложение на **простых** множителей 2^{20} и 7^{37} , а значит если **выберем** этот **множитель**, то это никак не повлияет на выполнение условий, а произведение **точно** уменьшится, (а для ответа, это **наименьшее** произведение)

$$\begin{aligned} \text{уч. } & \begin{cases} x_1 + y_1 \geq 14 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ z_1 + x_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \geq 51 \end{cases} \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 \geq \frac{51}{2} \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 \geq 26 \end{aligned}$$

$$\geq \left\lceil \frac{51}{2} \right\rceil = 26$$

т.о. **наименьшее** из **возможных** произведений **точно** делится на 7^{37} и на 2^{26} , а значит **точно** $\geq 7^{37} \cdot 2^{26}$

пример такого:

$$\begin{aligned} a &= 7^{10} \cdot 2^8 & ab &= 2^{17} \cdot 7^{10} : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ b &= 2^6 \cdot 7^6 & bc &= 2^{18} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ c &= 7^{27} \cdot 2^{12} & ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

т.о. **наименьшее** произв. **точно** $2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА №2

$$\frac{a}{b} \text{ несократима } \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$)

Заметим, что $\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$

т.к. дан-во от-в. крест:

$$\left. \begin{array}{l} a : m \quad (m \in \mathbb{N}, m > 1) \\ a+b : m \end{array} \right\} \Rightarrow a+b-a : m \Rightarrow b : m$$

$$\Rightarrow \text{но } \text{НОД}(a, b) = 1, \text{ а } \left\{ \begin{array}{l} a : m \\ b : m \end{array} \right. \quad (m \in \mathbb{N}, m > 1)$$

?!.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b : m \\ (a+b)^2-8ab : m \end{array} \right. \Rightarrow 8ab : m$$

т.о. $\left\{ \begin{array}{l} a+b : m \\ 8ab : m \end{array} \right. \Rightarrow 8 : m \Rightarrow m \leq 8$

пример, где $m=8$

$$\begin{array}{l} a=8^{100} \\ b=3 \end{array} \quad \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8^{100}+3}{(8^{100}-3)^2-6(8^{100}-3) \cdot 3+3^2} = \frac{8^{100}+3}{(8^{100})^2-8 \cdot 8^{100}+3}$$

сокр. т.к. $8^{100}-3 \nmid 3$ ($3:3, 8^{100} \nmid 3$)

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8^{100}+3}{(8^{100}-3)^2-6(8^{100}-3) \cdot 3+3^2} = \frac{8^{100}+3}{(8^{100})^2-8 \cdot 8^{100}+3}$$

можно сокр. на 8

Ответ: при $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА N3

$$AC : CB = 7$$

$$\begin{cases} AC = 7x \\ CB = x \end{cases}$$

$$DF = y$$

по теор. о секущих:

$$7x \cdot x = (OD + y)(OD - y)$$

$$\cdot (ED - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = (1 + y) \cdot$$

$$\Leftrightarrow (10 - (1 + y)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = (1 + y) \cdot (9 - y)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = 9 + 8y - y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2}$$

(из условия $y < 4$ и $OD + y < 5$)

(DF выг-ен мик. чем $AB \perp EO_1$,
но $AD = AB$) $D = C$ и $AE = AB$)

$$FC \text{ по теор. мик.} = \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \sqrt{25 - 7x^2} \right)^2 - 1} = FC = \sqrt{\left(1 + 4 - \sqrt{25 - 7x^2} \right)^2 - 92}$$

$$= \sqrt{5 - 25 + 7x^2 - 10\sqrt{25 - 7x^2} + 1} - 1$$

$$\angle EAO_1 = \angle EBO_1 \text{ (опр. к дуге, впис.)}$$

$$\angle O_1EB = \angle O_1AB \text{ (опр. к дуге, впис.)}$$

$$\triangle ACO_1C \sim \triangle O_1BE \text{ (по двум углам и радиусам)}$$

$$\text{но } \frac{AC}{OC} = \frac{OE}{BE} \Rightarrow AC = CB = 1$$

$$FC \text{ мик. по теор. мик. } \triangle O_1CF$$

$$(7x + FC) \cdot (x - FC) = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC + FC^2 - FC^2 = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2-5x+3 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \quad \text{ОПЗ}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7x+2 = -2\sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49x^2+4-28x = 4 \cdot (2x^2+2x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41x^2-36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{36}{41} \end{cases}$$

$$\text{ОПЗ: } \begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (2x-3) \geq 0 \\ 2 \cdot (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (1; \frac{3}{2})$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 0; \frac{2}{7}; \frac{36}{41} \right\} \quad \text{проверим корни!}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{1} = 2 - 0 = 2 \text{ - не подходит}$$

$$\sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{36}{41} + 3} + \sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 + 2 \cdot \frac{36}{41} + 1} = 1 \text{ - не подходит}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА N 4

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\leq a \\ 2x^2 + 2x + 1 &\leq b \end{aligned} \quad (*)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad (2) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (2)$$

Заметим, что $0 \leq x \leq 1$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{array} \right.$

ОДЗ:

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

ОДЗ:

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

(2)

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} = 1 \quad (2)$$

$$4x^2 - 3x + 4 = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} \quad (2)$$

$$(4x^2 - 3x + 4)^2 = 4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$16x^4 + 9x^2 + 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$33x^3 + 25x^2 - 22x - 3 = 0 \quad (2)$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{82} \quad (2) \quad x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} \quad (2)$$

Умножим $2x^2 - 5x + 3$ - квадрат с верш. вверх, укажем мин. значение в вершине.

если $x \geq \frac{3}{2}$, то $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq$

$$\sqrt{2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 + 1} > 1$$

если $x \leq 1$, то соч. след. имп.

$$(2) \text{ если } \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} - \text{корень ур-ния (он в ОДЗ)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА N5

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

① ~~$y_2 - y_1$~~ $(x_2 - x_1) = (15 - (-12)) = 27$

т.е. $(x_2 - x_1) \in [-27; 27] \Rightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) \in [-54; 54]$ ← *минимум*

$$(y_2 - y_1) \in [-24; 24]$$

	$2 \cdot (x_2 - x_1)$	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$
вариант:	-12	24	-6
	-10	22	-5
	-8	20	-4
			...
	36	-24	18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

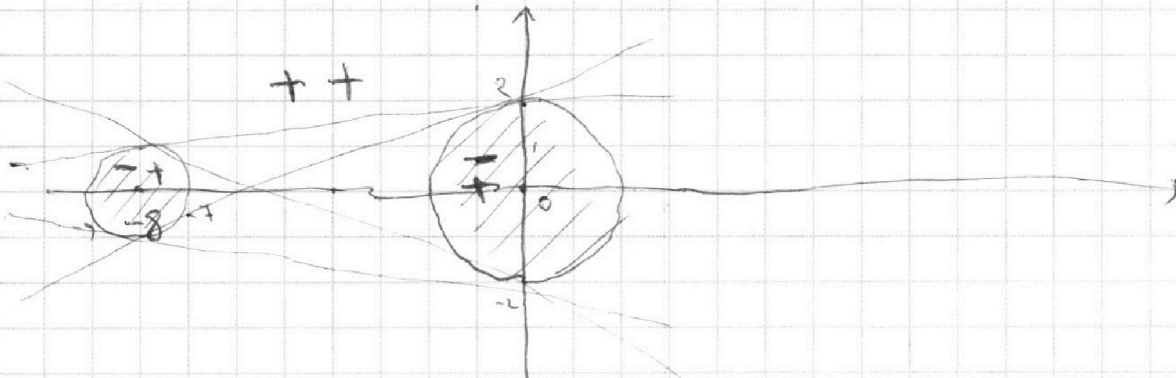
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА 6



$((x+8)^2 + y^2 - 1) - \text{окр-ть}$ центр: $(-8; 0)$ $R = 1$

$(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 - \text{окр-ть}$ центр: $(0; 0)$ $R = 2$

пер-во $((x+8)^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ Вероятно

во окр-ть кругах на границе окр-тов

мы так скажем от одной будет круг.

напом. и окруж, а от обеих напом. и напом.

если предположим имеем линейное уравнение имеем
напом. 2 решения $\Rightarrow ax - y + 10b - \text{линейное}$
уравнение для обеих окр-тов

$$ax - y + 10b = 0 \Leftrightarrow y = ax + 10b$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 16x = -68 \Leftrightarrow x = -\frac{68}{16} = -\frac{17}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 16x = -67 \Leftrightarrow x = -\frac{67}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

найти очевидно всего точка а и у-ем
4, как и 4 касательных

касательных для левой стороны

$$\begin{cases} y = cx + d \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

или-то для точек:

$$\begin{cases} y = Ex + F \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

и имеет пересечение, когда $c=E, F=d$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9 - 7x^2} =$$

$$= 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

$$\textcircled{!} \sqrt{a^2} = |a|$$

$$y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2} \quad \text{из рисунка}$$

$$4 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$5x = 2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

5

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad \text{с } \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2}$

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} + \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-1) \cdot (x-\frac{3}{2}) \geq 0 \quad \frac{3}{2} - \frac{15}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 1$$

$$a - b + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$-2 \pm \sqrt{4 - 8}$$

$$2 \cdot \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 \cdot (2 - 7x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 - (2 - 7x)^2 - 2x^2 - 2x - 1 = (4 - 14x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(x-1) \cdot (2x-3) = 2x^2 - 2x - 3x + 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

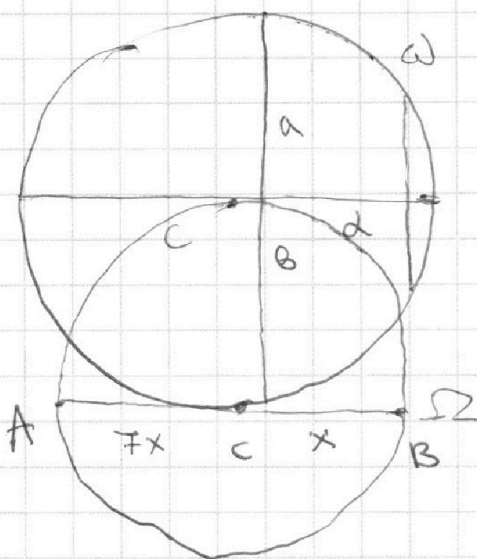
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

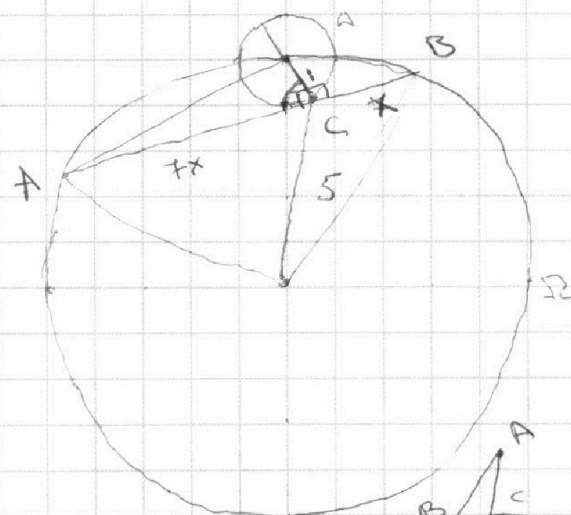
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

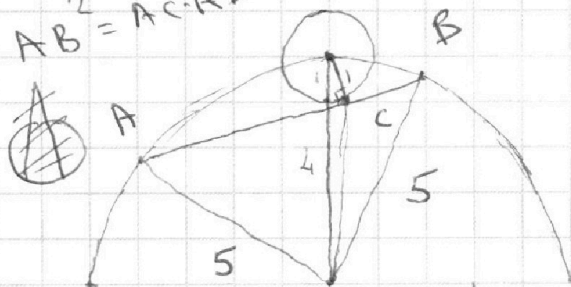
3.



$$\begin{array}{r} 4-3 \quad 12 \\ 5-5 \quad 15 \\ 6 \quad 6 \end{array} \Bigg) 33$$

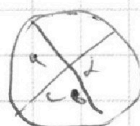


$$AB^2 = AC \cdot AD$$



$$ab = cd$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$



$$7x \cdot x = (9 - y) \cdot (1 + y)$$

а)

$$7x^2 = 9 + 8y - y^2$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(-9 + 7x^2)}}{2}$$

$$y =$$

$$(5 - \sqrt{25 - 7x^2}) \cdot (-\sqrt{25 - 7x^2}) = 7x^2$$

$$-5\sqrt{25 - 7x^2} + 25 - 7x^2 = 7x^2$$

$$14x^2 = 25 - 5\sqrt{25 - 7x^2}$$

$$-\sqrt{25 - 7x^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}, bc: 2^{17} \cdot 7^{17}, ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \quad kl: m \Rightarrow kl \geq m$$

$$\min(a \cdot b) = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$\min(b \cdot c) = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\min(ac) = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow \min((a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c)) = 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} =$$

$$= 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow \min(a$$

$$x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1}, b = 2^{y_1} \cdot 7^{z_1}, c = 2^{z_1} \cdot 7^{x_1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 14 \\ x_1 - y_1 = 20 - 17 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ x_2 - y_2 = 37 - 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 14 + 3 \\ 2x_2 = 10 + 20 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + z_2 = 37 \\ x_2 + y_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8,5 \\ x_2 = 15 \\ z_1 = 11,5 \\ y_1 = 5,5 \\ z_2 = 22 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 26$$

$$x_1 + y_2 + z_2 = 32$$

$$\min((abc)^2) > 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 15 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 21 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - z_1 = -2 \\ x_1 + z_1 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 17 \\ a+c \geq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = d_1 \\ x_2 + y_2 = d_2 \\ y_1 + z_1 = d_3 \\ y_2 + z_2 = d_4 \\ x_1 + z_1 = d_5 \\ x_2 + z_2 = d_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2^{14} \cdot 7^{10} \\ b = 1 \\ c = 2^{17} \cdot 7^{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{14} \cdot 7^{10} \\ b = 1 \\ c = 2^{17} \cdot 7^{17} \end{cases}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c) &\geq \frac{51}{2} \\ a, b, c &\in \mathbb{N}_0 \\ a+b+c &\geq 26 \end{aligned}$$

$$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$b = 1$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{aligned} a &= 7^{10} \cdot 2^{14} \\ c &= 7^{17} \cdot 2^{17} \\ b &= 2^3 \cdot 3^8 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $\frac{a}{b}$ - несократ. ($a, b \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

max m: $\begin{cases} a+b \leq m \\ a^2-6ab+b^2 \leq m \end{cases}$

$$2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$

$\frac{a}{b}$ - не сократ. $\Rightarrow$ НОД(a, b) = 1 $2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,25 - 0,625)$

$$\frac{(a+b)}{(a^2-6ab+b^2)} = \frac{(a+b)}{(a-b)^2-4ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab} \Rightarrow 8ab \leq m$$

$$\frac{3}{7}$$

$$\frac{3+7}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 7+7^2} = \frac{10}{9-49} = -\frac{10}{40}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{2+3}{2^2-6 \cdot 2 \cdot 3+3^2} = \frac{5}{4-36} = -\frac{5}{32}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\begin{cases} a \leq m \\ b \leq m \end{cases} \text{ - не верно}$$

$$\frac{3}{5} = 50 \cdot 9 - 9$$

$$\frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5+5^2} = \frac{8}{9-45} = -\frac{8}{36}$$

$$m = (a+b)$$

$$\frac{20}{41} = \frac{20^2-6 \cdot 20 \cdot 41+41^2}{400-4920+1681} = \frac{41}{1221}$$

$$\frac{100}{101} = \frac{100^2-6 \cdot 100 \cdot 101+101^2}{10000-12120+10201} = \frac{101}{101}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$$

$$2x^2-5x+3 = 2 \cdot (x^2-2,5x+1,5) = 2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625) = 2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{3}{2} : \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3+1} + \sqrt{\dots}$$
$$3x^2-5x+3 = 2x^2-5x+3 = -0,125$$

$$x \in (-\infty; 1]$$

$$(x-1) \cdot (x-\frac{3}{2})$$

но не

$$\frac{2}{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Верш: } (1,25; -0,125)$$

$$\text{Верш: } (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

$$\frac{10}{7} = \frac{2}{7} + \frac{8}{7}$$
$$\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7}$$

$$go \quad 1,25$$



$$7x = 2$$

$$x = 3,5$$

$$\frac{2}{7} \cdot 2 + 1 = \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7}$$

$$on \quad 1,25 \quad go$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} 2x^2-5x+3 &= 2x^2+2x+1 \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} &= 1 \end{aligned} \right]$$

$$2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{35}{2} + 3 = \frac{49}{2} - \frac{35}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$$

$$2 \sqrt{\frac{49}{2} + \frac{19}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(4x^2 - 3x + 3) \cdot (4x^2 - 3x + 3) =$$

$$= 16x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x^3 + 9x^2 - 9x + 12x^2 - 9x + 9 =$$

$$= 16x^4 + 9x^2 + 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3$$

$$(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3$$

$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$22 + 12 \cdot 41$$

$$2 \cdot (x^2 - 2,5x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\downarrow 1,25$$

$$\uparrow 1,25$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ \times 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$976 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 244} \\ \underline{-8} \\ 17 \\ \underline{-16} \\ 10 \end{array}$$

$$4 \cdot 244 = 122$$

$$12$$

$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 4 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 61,2$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 96 \\ \hline 366 \\ 549 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$960 - 96 \cdot 60 + 96$$

121

$$976$$

$$244 = 2 \cdot 122$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$-\frac{D}{4a}$$

$$-\frac{1}{p}$$



$$4 \cdot 2 \cdot 122 = 4 \cdot 4 \cdot 61$$

$$\sqrt{1,25} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$-1,25$$

$$\frac{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{8}$$

$$-0,125$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2+2x+1 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \cdot (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$x \in [0, 1]$$

$$(1, 25, -0, 125)$$

$$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\uparrow (-\infty, \frac{1}{2})$$

$$\uparrow (-\infty, 1, 25)$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2-5x+3 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(x+8)^2 - y^2 - 1 \cdot (x^2 + y^2 - 4)$$

$$\begin{matrix} \text{пути 1} \\ -4, 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{пути 2} \\ 0, 0 \end{matrix}$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2-5x+3 = (1 - \sqrt{2x^2+2x+1})^2$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 + 2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$-7x+2 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{1} = 2$$

$$x \cdot (41x - 36) = 0$$

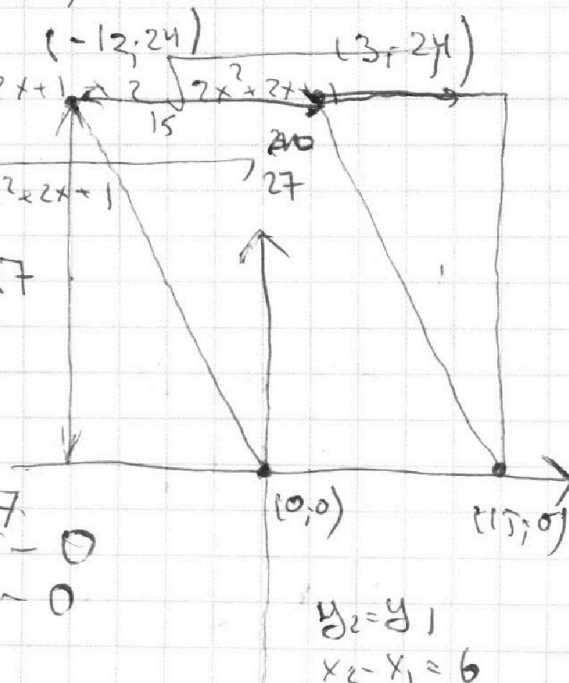
$$x = \frac{36}{41}$$

$$\begin{matrix} 27 \\ 24 \\ 24 \sim 0 \end{matrix}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$\begin{matrix} y_2 = y_1 \\ x_2 - x_1 = 6 \end{matrix}$$





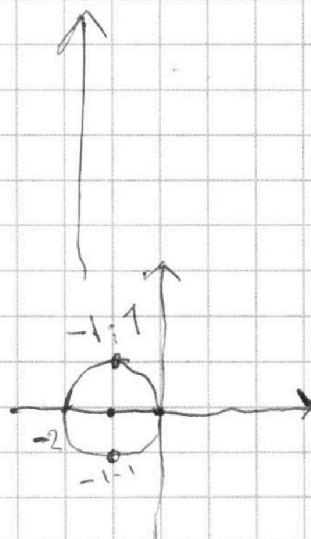
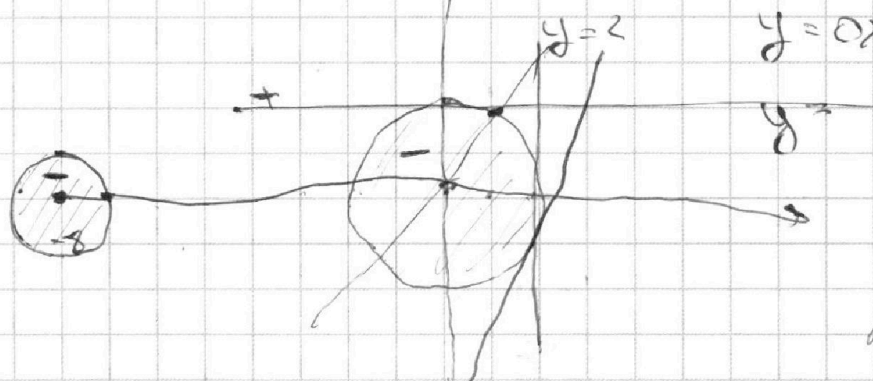
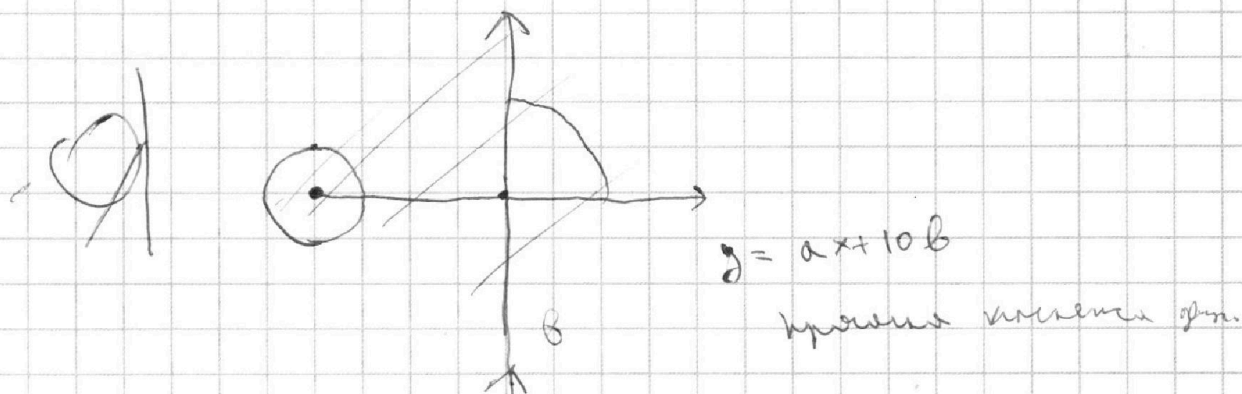
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



итд. для 1

$$\left. \begin{aligned} & \text{---} \\ & y = cx + d \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \quad (E)$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$