



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac: 2^{17} \cdot 2^{15} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$$

Тогда  $a \cdot b \cdot c$  должно делиться на  $7^{34}$ .

Иначе  $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \not\equiv 7^{68}$ .

Так же  $a \cdot b \cdot c$  должно делиться на  $2^{28}$ .

Иначе, если  $a \cdot b \cdot c$  делится на  $2^{28}$ ,  
разложением на простые множители  $\leq 27$ , то

степень 2 в разложении на простые множители

$$\text{числа } a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \leq 27 \cdot 2$$

$54 < 55$   $\square$

Таким образом,  $a \cdot b \cdot c: 2^{28} \cdot 7^{34}$  т.к.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{34}$

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2

$\frac{a}{b}$  - несократимые дроби  $\Leftrightarrow a$  и  $b$  взаимнопросты.

$\text{НОД}(a, b) = 1$

~~(и не имеет общих делителей)~~

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Заметим, что  $\text{НОД}(a+b, a \cdot b) = 1$ .

Иначе, если существует  $p \in \mathbb{N}$ :  $\begin{cases} a+b : p \\ a \cdot b : p \end{cases}$

~~то~~  $a \cdot b : p$  значит  $\begin{cases} a : p \\ b : p \\ a : p \end{cases}$  т.к.  $\text{НОД}(a, b) = 1$

Н.у.о  $\begin{cases} a : p \\ b \not: p \end{cases}$  но тогда  $a+b \not: p$  ~~также~~ !!!

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

можно сократить на  $m \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2-9ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 9ab : m \end{cases}$$

$\Rightarrow$  т.к.  $\text{НОД}(ab, a+b) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 9 : m \end{cases}$$

Наибольший делитель  $9$  это  $9$ .  $\Rightarrow m = 9$   
наибольшее

Ответ: 9.

Пример  $a = 4$   $b = 5$   $\frac{4}{5}$  - несокр.

$$\frac{4+5}{16+25-7 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{-59} = -\frac{1}{11}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

т.к.

$$\left( \begin{array}{l} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \neq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } \Delta < 0, 3 > 0 \\ \Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 < 0 \end{array} \right)$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$\Leftrightarrow (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = (1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 \Leftrightarrow \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \text{ определен} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 3 \cdot x(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81x^2 = 12x^2 + 12 + 4 \\ x \geq 0 \\ x \in [-1; 0] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} *x=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ - не бывает такого} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ - единственный корень ур-а}$$

Ответ:  $\left\{ \frac{1}{9} \right\}$



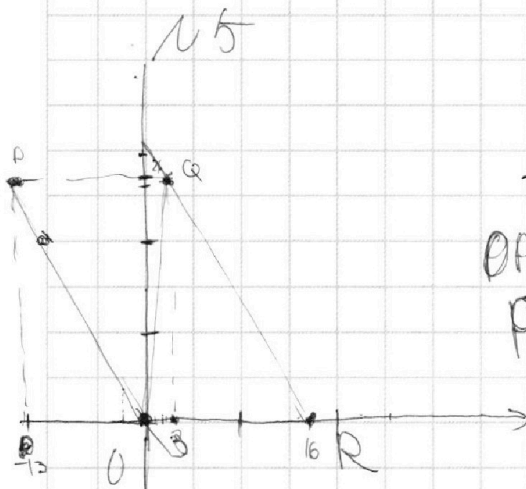
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

уравнения прямых.

OP  $y = -2x$

PQ:  $y = 26$

OR  $y = 0$

QR:  $y = -2x + 32$

$(x_0, y_0) \in OPR \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$y \geq -2x$

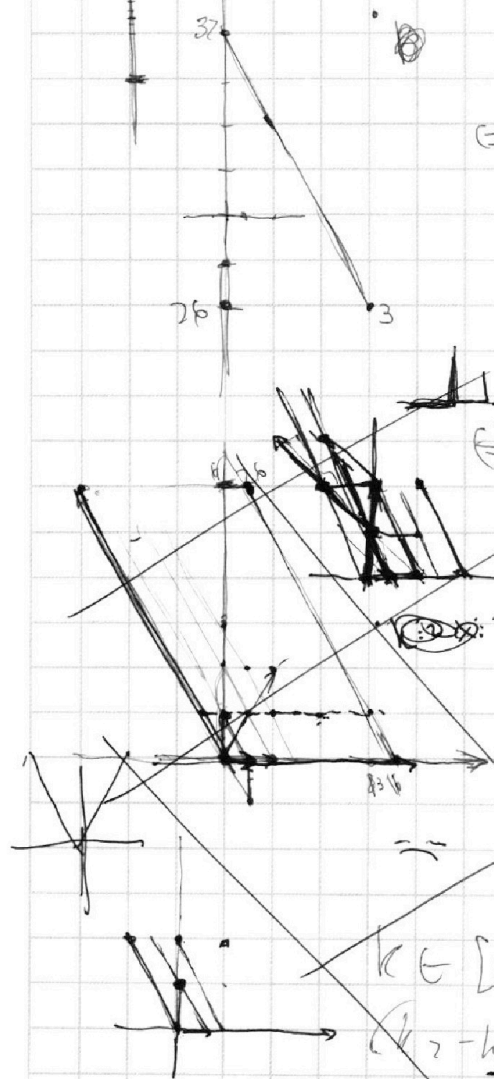
$x \geq -\frac{y}{2}$

$y \leq -2x + 32$

$x \leq \frac{32 - y}{2}$

$x, y \in \text{параметризация}$

$\Rightarrow x, y$  - решение системы уравн.



$x_0, y_0$  общее. конст. произв.  
 $y_0 = x_0 + 2k_0, 2ge$

$3(x_2 - x_1) + 4(k_2 - k_1) = 14$

$k \in [0; 6] \pmod{3}$

$(x_2 - x_1) + (k_2 - k_1) = 28$

$(k_2 - k_1) \equiv 1 \pmod{3}$

- 1 4 7 10 13 16



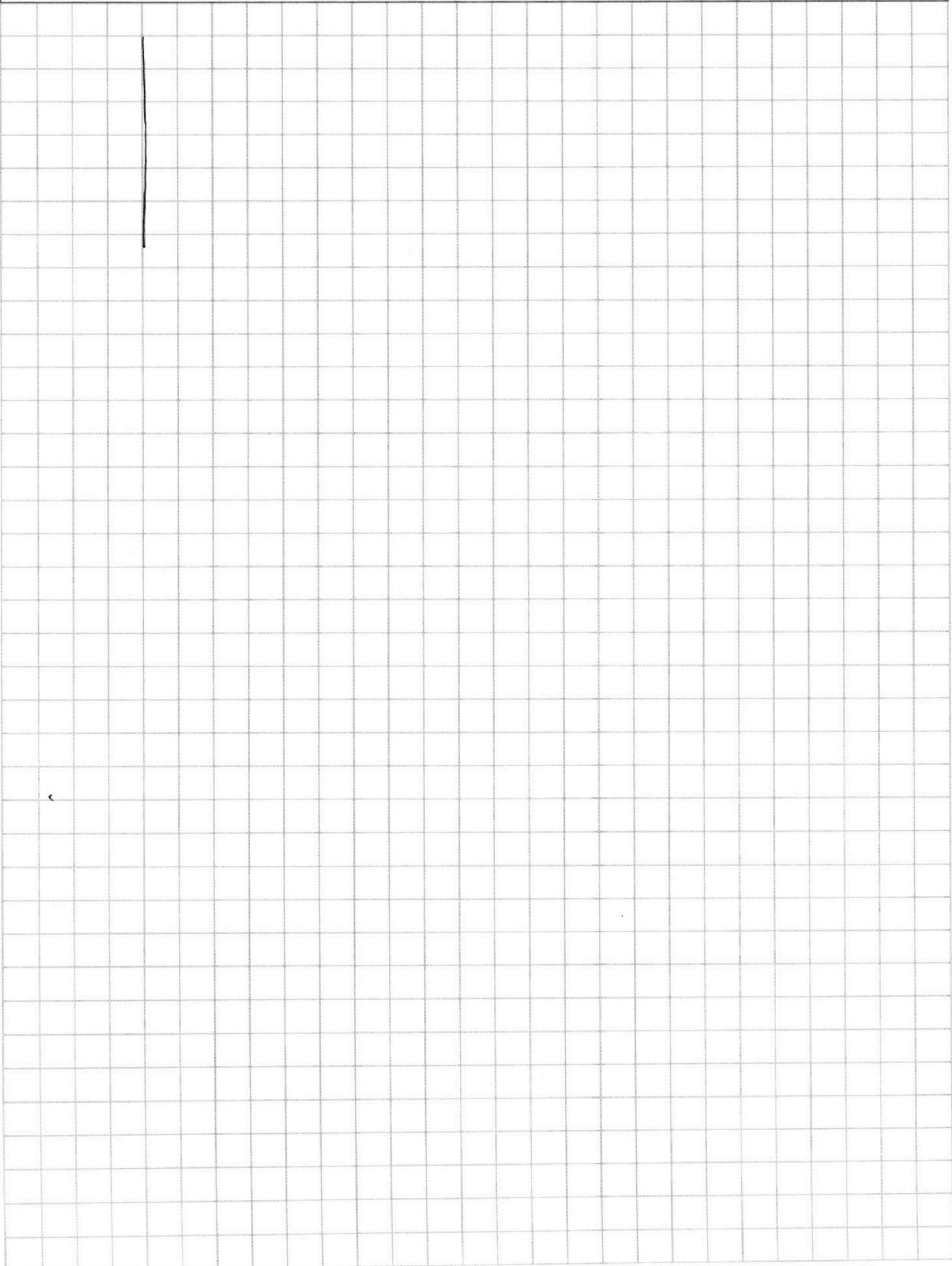
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

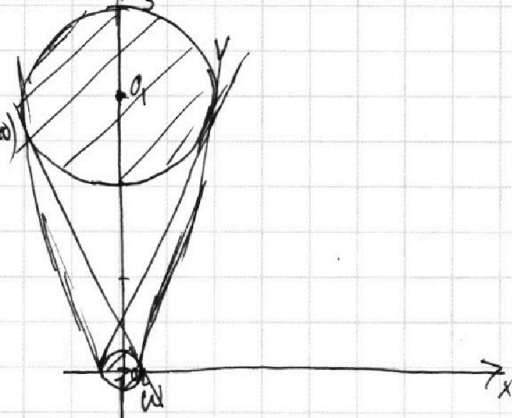


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2 + y^2 - 1)$   $(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$   
 ур-е окр-ти ω      ур-е окр-ти ω

$A(x_0, y_0) \in$  Заштрихованной области (график выносительно)

$\Rightarrow x_0, y_0$  является решением неравенства.



$ax + y - 8b = 0$  - ур-е прямой  
 $y = 8b - ax$

$(x_0, y_0) \in$  Прямой

$(x_0, y_0) \in$  Заштрихованной области

$\Rightarrow (x_0, y_0)$  - решение неравенства

$O_1, O_2 = 12$

$r_1 = 4$      $r_2 = 1$

$\{O(x_0, y_0)\}$  - искомая точка, касаясь прямой и кругов.

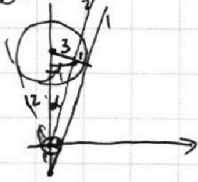
В этом множестве 2 элемента

$\Rightarrow$  Прямая касается обеих окружностей.  
 (если пересекает какую-то окр-ть то пересечется бесконечно много т.к. на отрезке бесконечно много точек.)

Если касается только одной - одно решение.

Это есть наша прямая - общая касат. 2х окр-тей.

I Внешнее



Прямая 1:  $y = 8b - ax$     (1||2)

2:  $y = -ax$

$a = -\frac{8b}{x} = -ctg \alpha = -\frac{\sqrt{3^2 + 3^2}}{3} =$

$= -\frac{3\sqrt{15}}{3} = -\sqrt{15}$

Аналогично подходит  $a = \sqrt{15}$  (касат с др. стороны)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

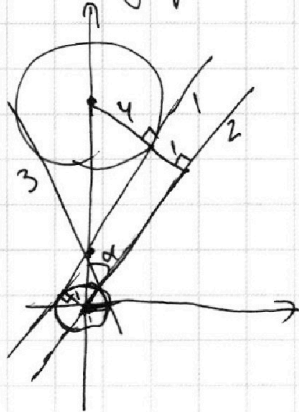
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



II Внутренний



Прямая: 1 :  $y = 8b - ax$

2:  $y = -ax$

(1 || 2)

$$a = -\frac{y}{x} = -\operatorname{ctg} \alpha =$$

~~0~~  $= -\frac{\sqrt{12^2 - 5^2}}{5} =$

$$= -\frac{\sqrt{(2+5)(12-5)}}{5} = -\frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}$$

Симметрично подходит прямая 3.

где  $a = \frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}$

Ответ:  $\left\{ \pm \frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}, \pm \sqrt{15} \right\}$

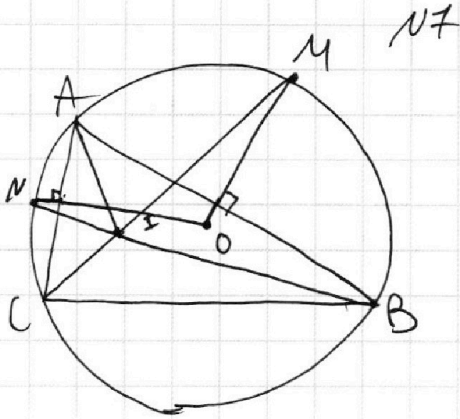
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~ИЗООС.~~

$CM, BN$  - биссектрисы  
углов  
 $\angle ACB, \angle ABC \rightarrow$

$\Rightarrow I = CM \cap BN$  -

- центр вписанной окр-ти.  
O - центр опис. окр-ти

$ON \perp CA$  (т.к.  $\angle AOM = \angle MOB$ ;  
 $AO = OB$ )  
 $MO \perp AB$

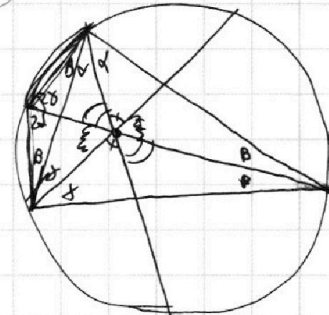
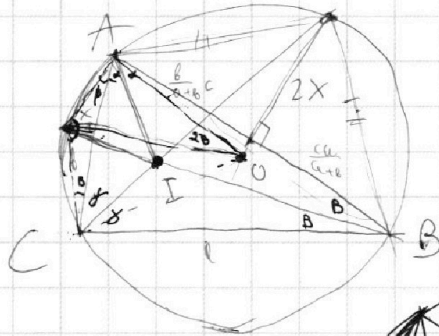
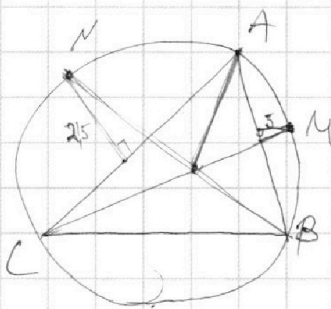
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

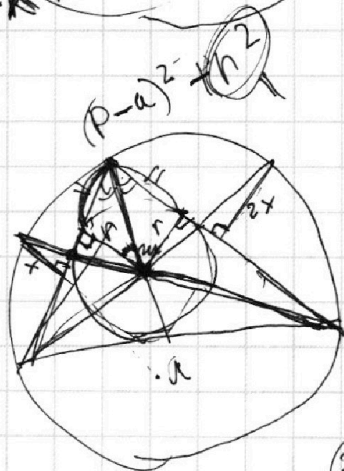
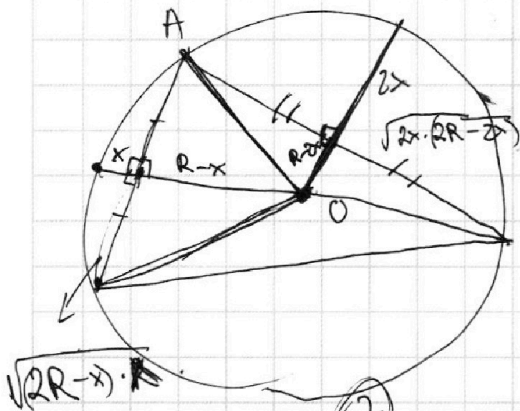
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



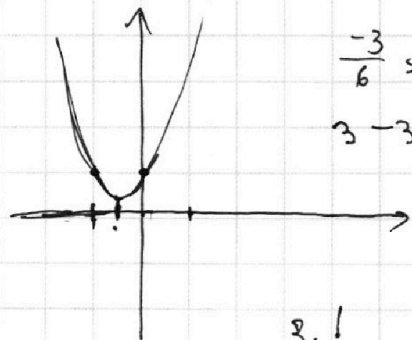
$$180 - 2\beta = 2,5 \\ = 2\alpha + 2\gamma$$

$$B = 180 - 90 - \alpha - \gamma$$

$$\begin{cases} AO = 2x \cdot (2R - 2x) + (R - 2x)^2 = \\ AO = x(2R - x) + (R - x)^2 \end{cases}$$



$$S_1 = \\ n = S_1$$



$$3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\frac{6}{6} = -1$$

$$-\frac{3}{4} + 1 =$$

$$3 + 6 + 2 =$$

$$= +\frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b \Leftrightarrow \text{---} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

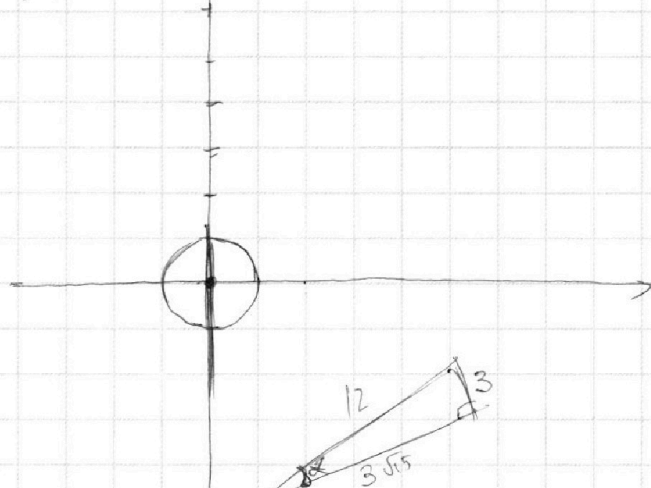
$$a = -y + 8b$$

$$\therefore y = -ax$$

$$a = -\frac{y}{x}$$

$$a = -\text{ctg } \alpha$$

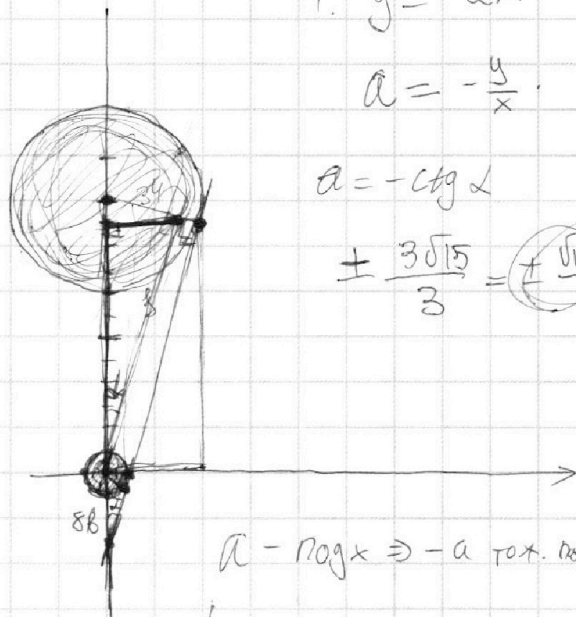
$$\pm \frac{3\sqrt{15}}{3} = \pm \sqrt{15}$$



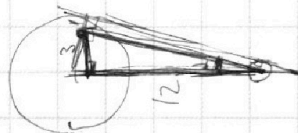
$$3^2 + 4^2 - 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$



$$a = -\text{ctg } \alpha \Rightarrow -a \text{ т.ч. } \text{ctg } \alpha$$



$$12^2 - 5^2 =$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{(a+b)^m}{(a+b)^2 - 7ab}$$

$a+b$  и  $ab$  бз. пр.

$a=4$   $b=5$  и т.д.  $m=9$

$(4+5)$

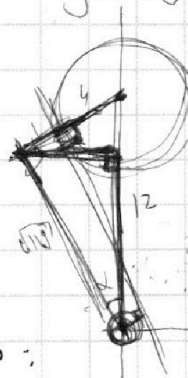
Пример  $\frac{140}{99}$  - гоним:

$$\begin{array}{r} +16 \\ \hline 25 \\ \hline 41 \\ \hline +140 \\ \hline 181 \end{array}$$

$$\frac{140}{99}$$

$$\frac{140}{99}$$

$$\begin{array}{r} 12^2 - 5^2 = \\ = (12-5)(12+5) \\ = 7 \cdot 17 \\ \text{ctg } \alpha = ? = \\ \cdot 10 \\ \hline 144 \\ \hline 25 \\ \hline 119 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6}] \cup [\frac{6 + 2\sqrt{3}}{6}; +\infty)$$
$$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 = 12$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$$

на прямой

$$\cancel{3x^2} - 6x + 2 - \cancel{3x^2} - 3x - 1 = (1 - 9x) \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x) \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 9x) (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \Leftrightarrow (*) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \cancel{3x^2} + 3x + 1 = 1 + \cancel{3x^2} - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \\ 1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

1 2 3 4 5 6 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c$

*Черновик*

$$ab: 2^{15} \neq 11$$

$$bc: 2^{17} \neq 18$$

$$ac: 2^{23} \neq 39$$

$$50 + 18$$

$$15 + 17 + 23 = 15 + 40 = 55$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{55} \neq 68$$

$$abc: 2^{28} \neq 34$$

N2

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$a, b$  - кер.

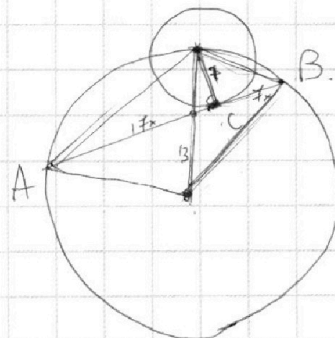
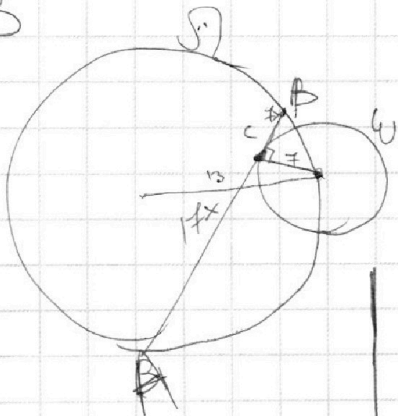
$a+b - c$      $ab$  - кер.

$a - c$      $b$  - кер.

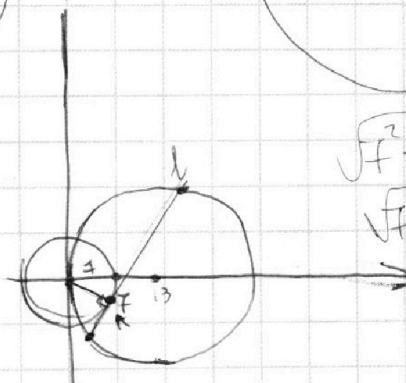
$a+b$  кер.

$(a+b) - 9ab$  - кер.

N3



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$\sqrt{7^2 + 7^2 x^2} = 7^2 \sqrt{1+x^2}$$

$$\sqrt{7^2 + 17^2 x^2} = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

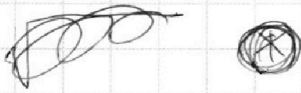
ур-е  $\omega$   $x^2 + y^2 = 7^2$

$\gamma$   $(x-13)^2 + y^2 = 13^2$

$A(x_0, y_0)$

$y = ax + b$

$b = \frac{y_0 - ax_0}{1}$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 3x^2 - 3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1} \geq 0 \\ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3x \leq 0 \\ 2x^2 + 12x + 4 = 81x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 781^2$$

$$= 4 \cdot 4 (9 + 69) = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -81 \\ 12 \\ +69 \\ \hline 781^2 \\ 39 \end{array}$$