



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac : 2^{17} \cdot 2^{15} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39} \\ \Leftrightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68} \end{array} \right.$$

Тогда $a \cdot b \cdot c$ должно делится на 7^{34} .

Иначе ~~\Rightarrow~~ $a^2 b^2 c^2 \nmid 7^{68}$.

Также $a \cdot b \cdot c$ должно делится на 2^{28} .

Иначе, если разложение на простые множители ≤ 77 , то

Степень 2 в разложении на простые числа

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \leq 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow 54 < 55 \quad \text{!}$$

Таким образом, $a \cdot b \cdot c : 2^{28} \cdot 7^{34}$ т.к. \Rightarrow

$$\begin{aligned} \text{НОД}(2, 7) &= 1 \\ \Rightarrow a \cdot b \cdot c &\geq 2^{28} \cdot 7^{34} \end{aligned}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Leftrightarrow a \text{ и } b \text{ взаимопросты.}$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

(~~У нас нет общей делительной~~)
~~делительной~~)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - gab}$$

Заметим, что $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$.

Иначе, если существует $p \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a+b : p \\ a \cdot b : p \end{cases}$

$\Rightarrow a \cdot b : p$ значит $\begin{cases} a : p \\ b : p \\ ab : p \end{cases}$ т.к. $\text{НОД}(a, b) = 1$

Н.у.о $\begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}$ то тогда $a+b : p$ т.к. $\frac{a+b}{(a+b)^2 - gab}$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - gab} \text{ можно сократить на } m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - gab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ gab : m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ g : m \end{cases}$$

Наибольший делитель g это g . $\Rightarrow m = g$

Ответ: g .

Пример $a = 4 \quad b = 5 \quad \frac{4}{5} - \text{несокр.}$

$$\frac{4+5}{16+25-7 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{-59} = -\frac{1}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - g_x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - g_x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

т.к.

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } D < 0, 3 > 0 \\ x = \frac{3}{2} - 4 \cdot 3 < 0 \end{array} \right)$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - g_x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$\Leftrightarrow (1 - g_x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{g} \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = 0 \end{array} \right] \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = (1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 \Leftrightarrow \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \quad \stackrel{0}{\Leftrightarrow} \rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \text{ определен} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 3 \cdot x(x+1) \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 81x^2 = 12x^2 + 12 + 4 \\ x \geq 0 \\ x \in [-1; 0] \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} *x=0 \\ x=0 \end{array} \right. - \text{не бывает такого} \Rightarrow x = \frac{1}{g} - \text{единственный корень ур-я}$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{g} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

Уравнения прямых.

$$OP: y = -2x$$

$$PQ: y = 26$$

$$QR: y = 0$$

$$QR: y = -2x + 32$$

$$\therefore (x_0, y_0) \in OPQR \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \\ y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \\ x \geq -\frac{y}{2} \\ x \leq \frac{32-y}{2} \end{cases}$$

$$x, y \in \text{параметрическое} \quad \begin{matrix} 16 \\ 16 - \frac{y}{2} \end{matrix}$$

$\Rightarrow x, y$ — решения системы
ур-л.

x_0, y_0 симм. коэф. прям.

$$y_0 = x_0 + 2k_0, 2y_0 = k_0, k_0 > 0$$

$$3((x_2 - x_1) + (k_2 - k_1)) = 14$$

$$(k_2 - k_1) \in [0; 16] \quad 2 \pmod{3}$$

$$(x_2 - x_1) + (k_2 - k_1) = 28 \quad 2 \pmod{3}$$

$$(k_2 - k_1) = 1 \pmod{3} \quad 4 \pmod{6}$$

$$1 \quad 4 \quad 7 \quad 10 \quad 13 \quad 16 \quad 19$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

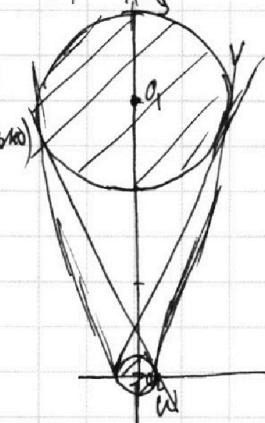
$$(x^2 + y^2 = 1) \quad (x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0,$$

$A(x_0, y_0)$ ∈ Задрахованій окр-ти

Области (графики вмогательно)

$\Rightarrow x_0, y_0$ є відповідь

розв'язки неравності.



$$ax + y - 8b = 0 \quad \text{ур-л}$$

$$y = 8b - ax \quad \text{прямой}$$

(x_0, y_0) Прямий

(x_0, y_0) ∈ Задрахованій області $\Rightarrow O(x_0, y_0)$ - розв'язок

$$O_1 O_2 = 12$$

$$r_1 = 4 \quad r_w = 1$$

$\{O(x_0, y_0)\}$ - мн-бо

точек, які є
розв'язком нер-в.

В цьому випадку 2 зглибкти

\Rightarrow прямий касається обидвох окружностей.

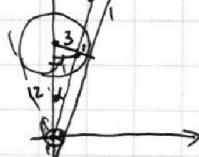
(якщо пересікає напів-то окр-т то рівній більшому)
(що т.к. на отриманій обидві окружності)

Если касається тільки однієї - одне розв'язок.

Існує лише прямий - буде касат. 2x

Окр-тей.

I Внішнє



$$\text{Прямий } 1: \quad y = 8b - ax \quad (1/2)$$

$$2: \quad y = -ax$$

$$a = -\frac{y}{x} = -ctg \angle = -\frac{\sqrt{3^2 - 3^2}}{3} =$$

$$-\frac{3\sqrt{15}}{3} = -\sqrt{15}$$

(касат в гр. сподж.)
Аналогично погоджує $a = \sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

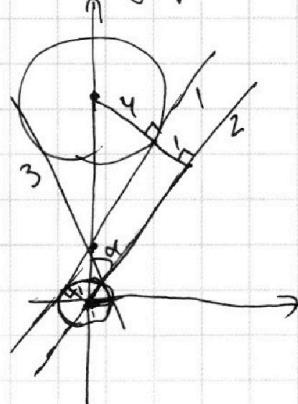
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

II Внутреннее



Причал: 1 : $y = 8b - ax$

2: $y = -ax$

(1 || 2)

$$a = -\frac{y}{x} = -ctg \alpha =$$

~~$\frac{\sqrt{12^2 - 5^2}}{5}$~~ =

$$= -\frac{\sqrt{(2+5)(12-5)}}{5} = -\frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}$$

аналогично получается причал 3.

также $a = \frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}$

Orbit: $\left\{ \pm \frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}, \pm \sqrt{15} \right\}$



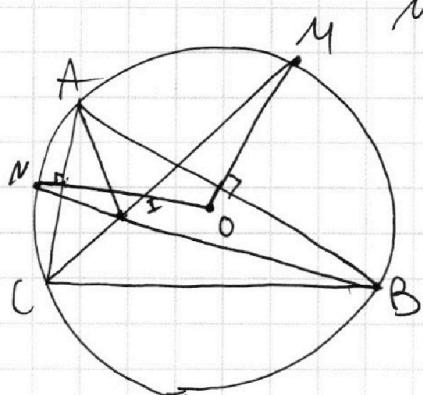
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7

2006

с M, B N - биссектрисы
углов

$\angle ACB, \angle ABC \rightarrow$

$\Rightarrow I = CM \times BN -$

— центр вписанной окр-ти.
O — центр опис. окр-ти

$ON \perp CA$ (т.к. $\angle AOM = \angle MOB$;
 $AO = OB$)

$MO \perp AB$



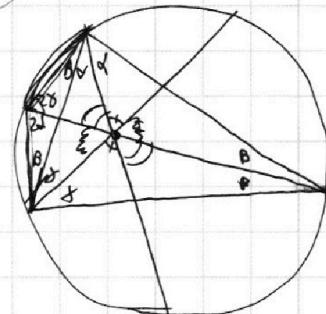
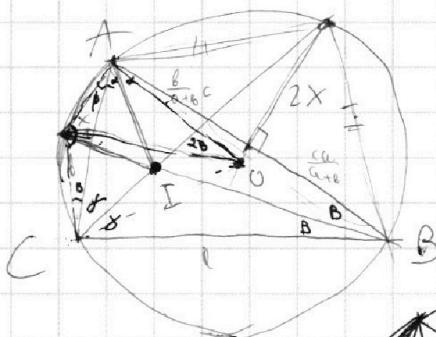
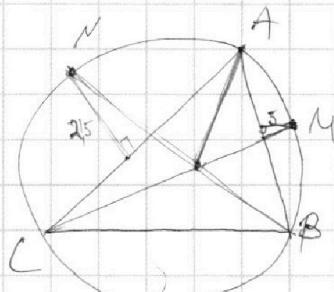
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

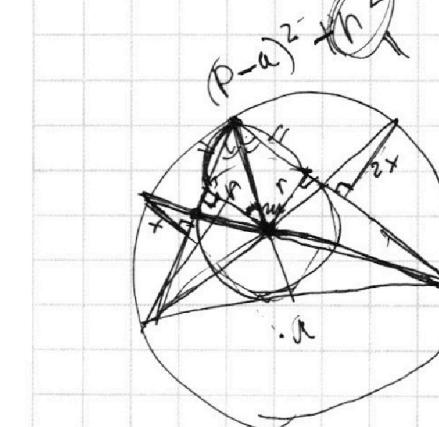
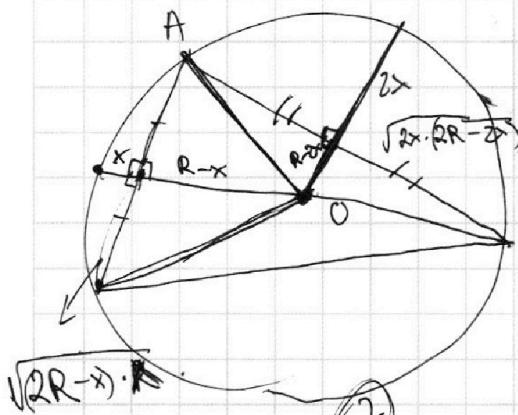
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180 - 2B = 2,5 \\ = 2x + 2x$$

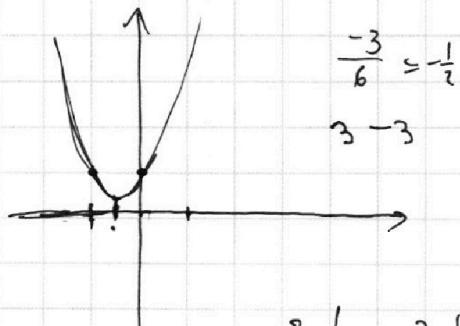


$$B = 180 - 90 - 2 - x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AO = 2x \cdot (2R - 2x) + (R - 2x)^2 = \\ = 4xR - 4x^2 + R^2 - 4xR + 4x^2 \\ AO = 2x(2R - x) + (R - x) \end{array} \right.$$

$$S_1 =$$

$$n = S_1$$



$$3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\frac{6}{6} = -1 \quad -\frac{3}{u} + 1 =$$

$$3 + 6 + 2 = \quad = + \frac{1}{4} \\ =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b \Rightarrow \text{task ①} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

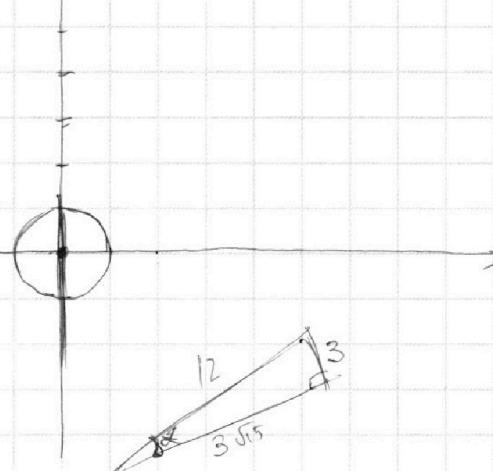
$$a = -\frac{y}{x}$$

$$y = -ax$$

$$a = -\frac{y}{x}$$

$$a = -\operatorname{ctg} \alpha$$

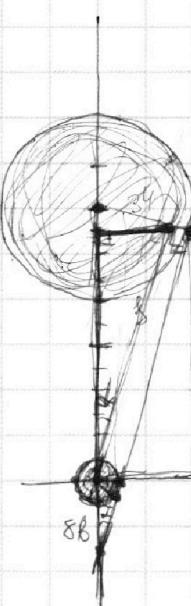
$$\pm \frac{3\sqrt{15}}{3} = \pm \frac{\sqrt{15}}{1}$$



$$3^2 \cdot 4^2 - 3^2 = 3 \cdot 5$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$



$$a = -\operatorname{tg} x \Rightarrow -a \text{ is } \operatorname{tg} \alpha$$

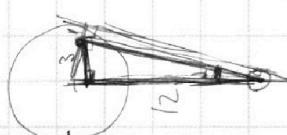
$$12^2 - 5^2 =$$

$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - ab}$$

~~m~~

~~a+b~~

$$a+b \neq ab \text{ by np.}$$



$$y = ax = 12 \cdot 5 / (2+5) = 12 \cdot \frac{5}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = ?$$

$$\frac{144}{25} = \frac{144}{119}$$

$$a=4, b=5 \text{ hence } m=9$$

~~(4+5)~~

Пример из 9-го гимназии:

$$\begin{array}{r} +16 \\ 25 \\ \hline 41 \\ \hline 140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ -41 \\ \hline 99 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$
$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{6-2\sqrt{3}}{6}) \cup (\frac{6+2\sqrt{3}}{6}; \infty)$$
$$x = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 = 12$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$$

и Сопр.

$$\cancel{3x^2 - 6x + 2} - \cancel{3x^2} - 3x - 1 = (1 - 9x) \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x) \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 3x^2 + 3x + 1 = 1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \end{cases}$$
$$1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

м
м
м

3 4 5 6 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$50 + 18$$

$$15 + 17 + 23 = 15 + 40 - 55$$

$$abc : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$$

N2

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

a, b - кв.

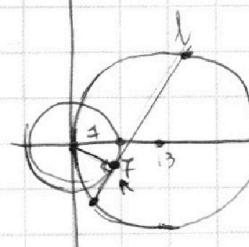
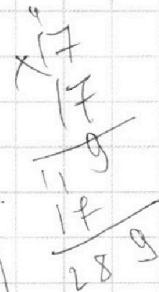
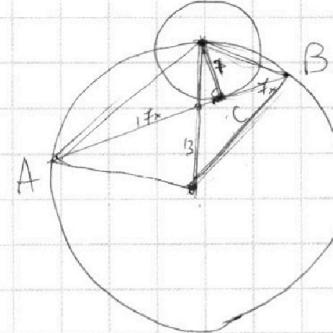
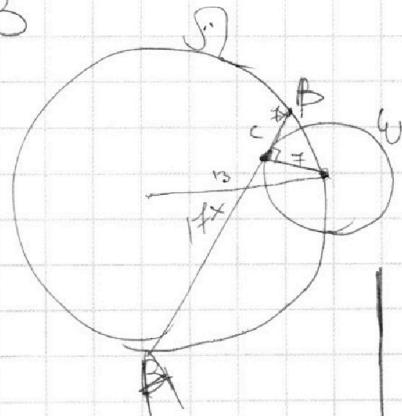
$a+b - \tau$ $ab - \text{кв.}$

$a - \tau$ $b - \text{нек}$

$a+b$ кв

$(a+b) - gab - \text{нек.}$

N3



$$\sqrt{f^2 + 7^2} = 7\sqrt{14x^2}$$

$$\sqrt{f^2 + 17^2} = \sqrt{7^2 + 17^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

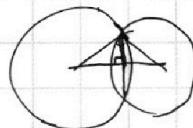
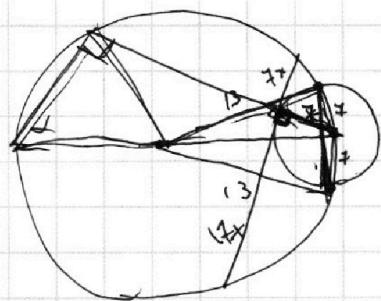
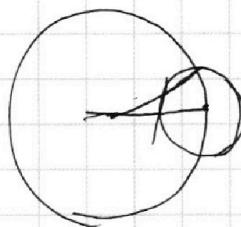
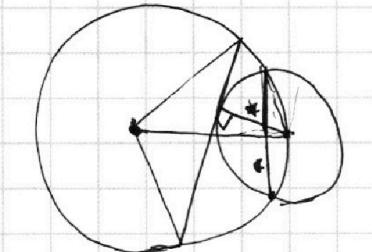
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + 13^2 = 13^2 + 7^2 + 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{x^2 + 7^2}$$

$$7^2 = 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{x^2 + 7^2}$$

$$\Rightarrow 7^4 = 2 \cdot 13^2 \cdot (x^2 + 7^2)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{7^2(7^2 - 2 \cdot 13^2)}{2}$$



$$\sqrt{x^2 + 7^2} + \sqrt{x^2 + 13^2} = 13$$

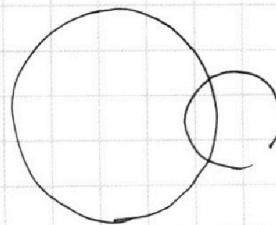
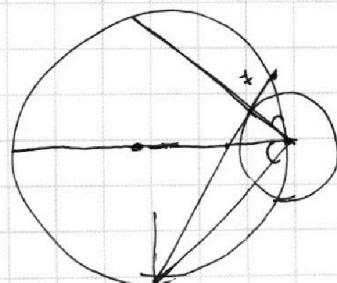
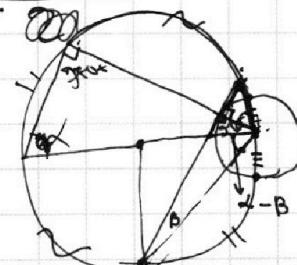
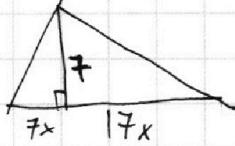
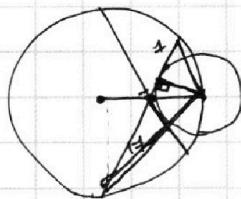
$$\frac{x^2}{52}$$

~~$$x^2 + 49 = 13^2 + 2 \cdot 13 \sqrt{x^2 + 13^2} \cdot x^2$$~~

$$13^2 - \frac{7^2}{4} = (13 \cdot 4)^2 - x^2 = (52 + x)(52 - x) = 59 \cdot 45 = 5 \cdot 59 \cdot 9$$

$$3\sqrt{5 \cdot 59}$$

$$3\sqrt{5 \cdot 59} \cdot 7 : 13 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = e^x \quad x^2 + y^2 = 7^2$$

$$25 \quad (x - 13)^2 + y^2 = 13^2$$

$$A(x_0, y_0)$$

$$y = a x_0 + b$$

$$b = \frac{y_0 - a x_0}{\textcircled{1}}$$

~~1~~

~~2~~

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x^2 - 3x - 1 \geq 0 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 \geq 0 \\ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = g_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3x \leq 0 \\ 12x^2 + 12x + 4 = 81x^2 \\ 2\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{138} = \frac{-12 \pm \sqrt{81}}{138}$$

$$= 4 \cdot 4(9 + 69) = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -81 \\ \hline 12 \\ +69 \\ \hline 81 \end{array}$$