



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b , с таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия: $\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{12} \cdot 7^{10} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$

но $(abc)^2$ - квадрат натурального числа $\Rightarrow (abc)^2 : 2^{52}$

Тогда если $(abc)^2 : 2^{52} \cdot 7^{64} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$

Также, когда $abc < 2^{26} \cdot 7^{32}$:
 $a = 2^8 \cdot 3^1$
 $b = 2^6 \cdot 3^1$
 $c = 2^{12} \cdot 3^7$

Данее заметим, что $abc : 7^{37}$ и $ac : 7^{37}$

Тогда $abc : (2^{26} \cdot 7^{32})$

Также $a = 2^8 \cdot 3^1$

~~$b = 2^6 \cdot 3^1$~~

~~$c = 2^{12} \cdot 3^7$~~

$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc : 2^{12} \cdot 7^{10}$

$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$

И $abc = 7^{32} \cdot 2^{26}$

Ответ: $abc = 7^{32} \cdot 2^{26}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть мы сократим дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ на m . Пусть $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) = k$.
Тогда $k \geq m$, т.к. сокращать можно только на общий делитель
и дробь можно сократить на k .

Найдем максимальное значение $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2)$.
По алгоритму Евклида: $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) = \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2 - (a+b)(a-5b))$
 $= \text{НОД}(a+b, -8ab) \leq 8$, т.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow (a, b) = 1$

Тогда пусть например $a \mid b$ самом деле, если $a \nmid b$: p , где p -простое, то либо a либо b делится на p , (поскольку это делит $a+b$)
Тогда $a \mid p$, $a \nmid b \Rightarrow a \mid b/p \Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) \leq 8$.

Так $a=1, b=1$ дает нас $a+b=2$ $\frac{1+7}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$

Ответ при $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

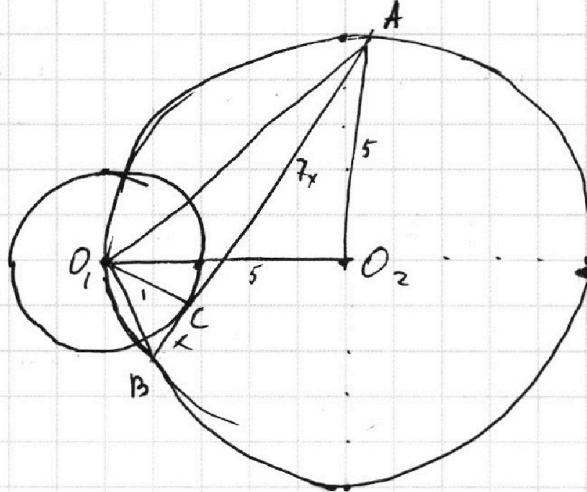
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из условия: $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$ Имеем $BC = x \Rightarrow AC = 7x$

$O_1C \perp AB$, тк O_1 -радиус окр-тии в пресеч. В точку падает
хорда $\angle RAB$.

Из теоремы Пифагора: $O_1B = \sqrt{O_1C^2 + CB^2} = \sqrt{1+x^2}$

$\cos O_1BC = \frac{BC}{O_1B} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos O_1BA$. $\angle O_1BA = \frac{1}{2} \angle O_1O_2A$.

(тк Опир на 1 дугу O_1A ,
а O_2 центр R)

$$\cos(O_1O_2A) = \cos(2O_1BA) = \cos^2 O_1BA - \sin^2 O_1BA$$

$$\cos^2 O_1BA = \frac{1}{1+x^2}, \sin^2 O_1BA = 1 - \cos^2 O_1BA = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \cos(O_1O_2A) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$O_1A^2 = (\text{из} + \text{косинусов для } O_1O_2A) = 25 \Rightarrow O_1O_2^2 + O_2A^2 - 2O_1O_2O_2A \cos O_1O_2A$$

$$= 50 - 50 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = (49x^2 + 1) \text{ тк } O_1A^2 = 49x^2 + 1 \text{ из } O_1CA \text{ по Пифагору}$$

$$\text{тк. } O_1A^2 = O_1C^2 + CA^2 = 1 + 49x^2$$

$$t = x^2, t \geq 0$$

$$50 - 50 \frac{t-1}{t+1} = 49t+1$$

$$50t + 50 - 50t + 50 = 49t^2 + 50t + 1$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$49(t-1)(t+\frac{99}{49}) = 0$$

$$t = \frac{99}{49} \text{ неуд усл. тк } t \geq 0$$

$$\text{От} \\ \Rightarrow t = x^2 = 1$$

$$x = 1 (x = -1 \text{ неуд усл}) \quad BA = BC + AC = 8x = 8$$

Однако, $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x + 3 &= \alpha \\ 2x^2 + 2x + 1 &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= \alpha \\ 2x^2 + 2x + 1 &= \beta \end{aligned}$$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \alpha - \beta$$

$$\sqrt{\alpha} - \alpha = \sqrt{\beta} - \beta$$

$$f(x) = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}), x \geq 0$$

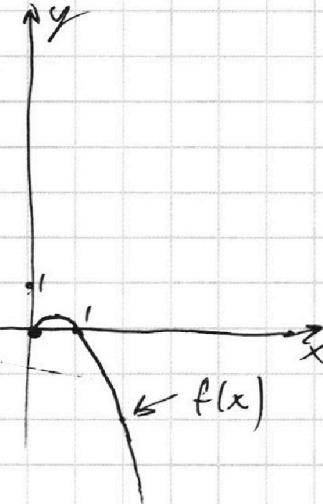
$$f(\alpha) = f(\beta)$$

Получаем, что надо

$$\begin{cases} f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \\ \alpha, \beta \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{надо } f(\alpha) = f(\beta)$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases}$$



$$\alpha = \beta \text{ при } 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2 = 7x \Rightarrow x = \frac{2}{7} \quad (\text{проверка в LР убедилась, что при } x = \frac{2}{7}, \alpha, \beta \geq 0)$$

$$\alpha = 1 - \beta \text{ при}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = -2x^2 - 2x$$

$$4x^2 - 3x + 3 = 0 \quad (D < 0, \text{нет корней})$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7} = x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

$$\text{Из } 10 \cdot 13 + 9 \cdot 12 \text{ и } \Rightarrow \text{тогда } 13(10 \cdot 13 + 9 \cdot 12) = \\ = 13(130 + 108) = 13(238) = 3094$$

Ответ: 3094.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

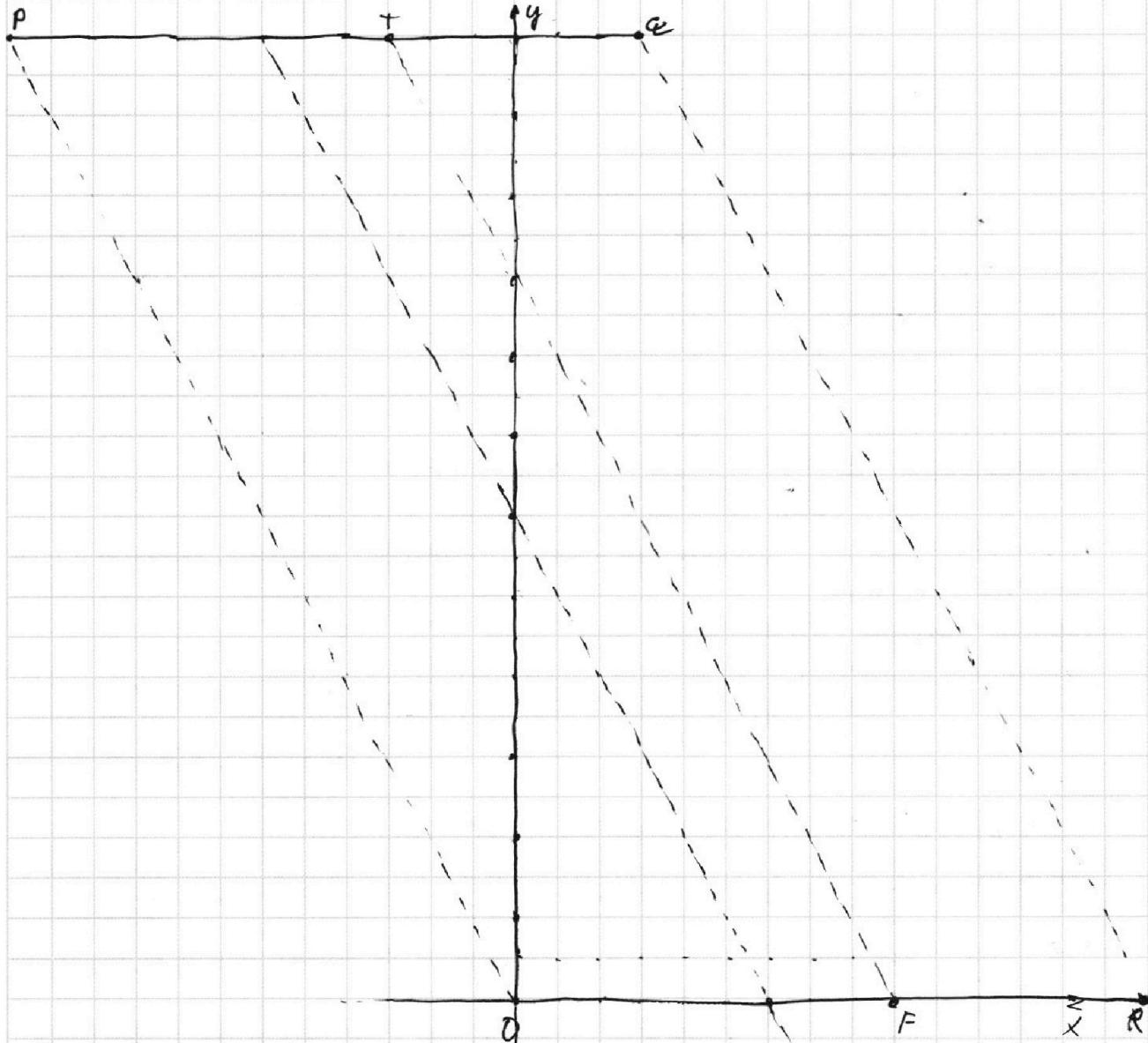
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задано носки x_1, y_1 . Найдем 2 ит таких точек x_2, y_2 , что выполнено
составление: $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$. График задает прямую:

$y_2 = 12 + y_1 + 2x_1 - 2x_2$, касаясь при $x_2 = 2$. Заменим, что вдруги
пар-графика для всех точек вдруги или на границах пар-графа
РТFO для каждой точки x_1, y_1 соотв-ен 13 точек x_2, y_2 , (но одна
точка (x_2, y_2) не соотв-ен та точка x_1, y_1 , а другая) \Rightarrow мы имеем пять
пар-графов точек x_1, y_1 вдруги или на границах РТFO. Иде
 $10 \cdot 25 = 250$, где каждая соотв 13 точек \Rightarrow всего пар
 $250 \cdot 13 = 3250$. Все пар-графы РТFO либо точки x_2 либо y_2
будут между числами (безвечно из рисунка) \Rightarrow ответ 3250

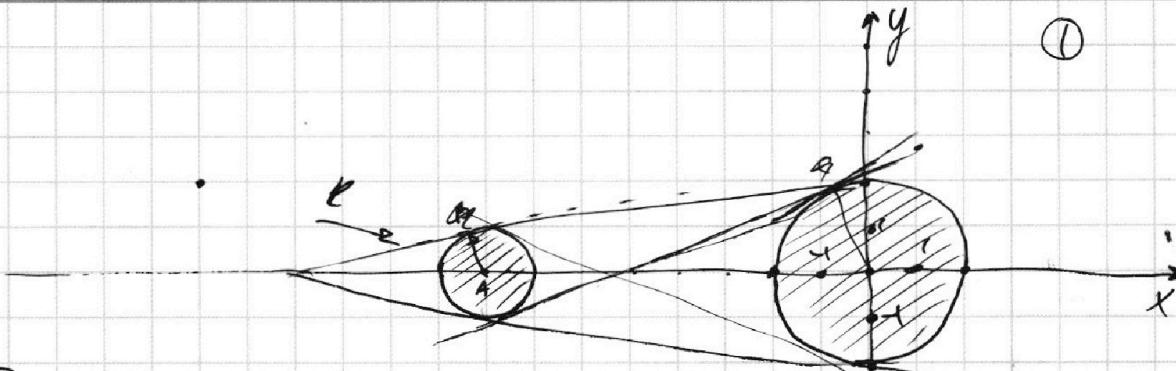
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

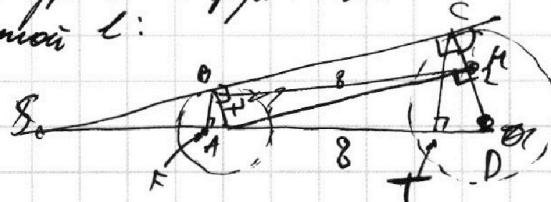
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



II Уравнение задает систему решений для двух прямых с радиусами 2 и 1, расстояние между которыми

Тогда так как a -модуль и b -модуль, то $ax - y + 10b = 0$ задает прямую прямую, параллельную заданной. Заметим что прямая касаласься 2 окр-тий дает 2 решения систем пересек окр-тий с 2 решениями, но соприкосн. ни с 1 окр-ю. Остальные соприкосн. с 1 окр-ю 1 решение \Rightarrow нас интересует только касательные к 2 окр-тий (или извесно, их 4, 2 внутр, 2 внешн.). Находим ур-я их прямых.

Две прямой l :



К-кая перпендикулярна AD на CD .

$ABCD$ -квадрат-это $AB \perp BC$, $DC \perp BC$ и BC радиус перпендикуляр касат прям в точку касания. $ABAD$ -квад-ти и $AB \parallel CD$ и $AB \perp AD$ и $AB \perp BC$ $\Rightarrow AB \parallel CD$, $AB \perp CD$, $BC \perp CD \Rightarrow$

Тогда $AM = CM = 1$ $HD = CD - CH = 1$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \sqrt{63} = BC$$

$S = BC \cap AD$ из подобия треуг-ков доказ с один верт S

$AM \parallel BC \Rightarrow \angle MAC = 90^\circ$
 $\angle BCA = 90^\circ$
 $\angle ABC = 90^\circ$
 ABC -прям-квад.

$$SA \sim SC \Rightarrow \frac{SA}{AM} > \frac{SD}{CD} = \frac{SA + AD}{CD} \Rightarrow SA = 8, SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = \sqrt{63}$$

BF -биссектриса $\angle SBA$, CT -биссектриса $\angle SCD$, $BF = \frac{SB \cdot AB}{SA} = \frac{\sqrt{63}}{8}$

$$FA = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{1 - \frac{63}{64}} = \frac{1}{8} \Rightarrow FD = \frac{B}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

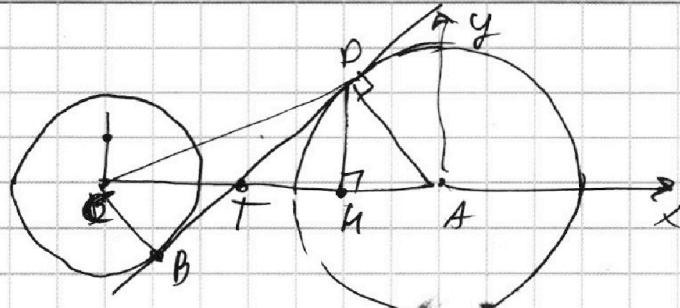
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



этапы решения: $\triangle CBT \sim \triangle ADT$ по 2^н ($\angle ADT = \angle CTB$ $\angle T$ одинаков ($T = C \wedge B = O$)) 90°

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{CT}{TA} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow CT = \frac{8}{3}, TA = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \\ CT + TA = 8 \end{array} \right.$$

$$TD = \sqrt{TA^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{16^2}{9} - 4} = \frac{16}{3} \quad T = \left(-\frac{16}{3}, 0 \right)$$

$$= \sqrt{\frac{256-36}{9}} = \sqrt{\frac{220}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{55}$$

$$\frac{DH = TD \cdot AD}{TA} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{55}}{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{55}}{4} \quad HA = \sqrt{DA^2 - HO^2} = \sqrt{4 - \frac{55}{16}}$$

$$\therefore D = \left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{55}}{4} \right) \quad -\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

ур-е прямой - через T и D:

$$\frac{(ux+3)3}{55} = \frac{4y-\sqrt{55}}{\sqrt{55}} \quad \frac{(4x+3)x}{\sqrt{55}} = 4y-\sqrt{55}$$

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x+\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}+\frac{16}{3}} = \frac{y-\frac{\sqrt{55}}{4}}{\frac{\sqrt{55}}{4}-0}$$

$$\begin{aligned} & 12x\sqrt{55} + 9\sqrt{55} + y\sqrt{55} = 4y\sqrt{55} \\ & 12x + 64 = 4y\sqrt{55} \\ & \frac{3x}{\sqrt{55}} + \frac{16}{\sqrt{55}} = y \\ & 12x + 64 = y \\ & \text{(ур-е 1-й прямой)} \\ & -\left(\frac{3x}{\sqrt{55}} + \frac{16}{\sqrt{55}}\right) = y \\ & \text{Однако: } x = \pm \frac{12}{\sqrt{55}}, y = \pm \frac{72}{\sqrt{55}} \end{aligned}$$

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

ур-е другой прямой касан-ной

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

(2)

$$\text{Тогда } B = \left(-\frac{8}{3}; \frac{\sqrt{63}}{8} \right)$$

$$CT = \frac{SC \cdot CD}{SD} = \frac{4\sqrt{63}}{16} = \frac{\sqrt{63}}{4} \quad TD = \sqrt{CP^2 - CP^2} = \sqrt{4 - \frac{63}{16}} = \\ = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{63}}{4} \right)$$

$$\text{Ур-е прямой: } \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{x + \frac{65}{8}}{-\frac{65}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{y - \frac{\sqrt{63}}{8}}{\frac{\sqrt{63}}{8} - \frac{\sqrt{63}}{4}} \Rightarrow \frac{8x + 65}{-63} = \frac{8y - \sqrt{63}}{-\sqrt{63}}$$

$$8\sqrt{63}x + 65\sqrt{63} = 8 \cdot 61y + 61 \cdot \sqrt{63}$$

$$\frac{8x + 65}{\sqrt{63}} + \frac{\sqrt{63}}{8} = y \quad 8\sqrt{63}x + 4\sqrt{63} = 8 \cdot 61y$$

$$2\sqrt{63}x + \sqrt{63} = 2 \cdot 122y$$

$$y = \frac{2\sqrt{63}}{122}x + \frac{\sqrt{63}}{122}$$

Тогда при $x = 2\sqrt{63}$ найдем $y = \frac{2\sqrt{63}}{122} \cdot 2\sqrt{63} + \frac{\sqrt{63}}{122} = \frac{6\sqrt{63}}{122}$

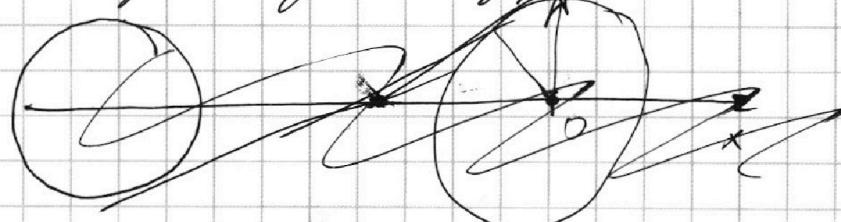
В силу симметрии окружности OX : В силу симметрии окружности OY :

прямая $-\left(\frac{x}{\sqrt{63}} + 16\sqrt{63}\right)$ касалась

прямая $y = -\frac{2\sqrt{63}}{122}x - \frac{\sqrt{63}}{122}$ тоже касалась

тогда при $y = -2\sqrt{63}$ найдем $x = -\frac{122}{2\sqrt{63}}$

Рассмотрим случай вида касания:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

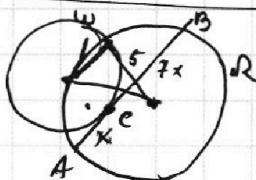
$$(a+b) \quad (a+b, a^2 - 6ab + b^2)$$

$$(a+b, a^2 - 6ab + b^2 - (a+b)^2)$$

$$(a+b, 8ab) \quad 8$$

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{12} \cdot 7$
 $(abc)^2 = k \cdot 2^{51} \cdot 7^{54}$
 $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{27}$

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{12} \cdot 7$
 $3^4 \times 7 = 51$
 $3^4 + 12 + 10 = 54$



$$\begin{aligned} a+b &= 10 \\ b+c &= 17 \\ a+c &= 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 32 - 17 &= \\ 22 - 7 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+c &= 20 \Rightarrow a = 8 \\ a+b &= 14 \\ b+c &= 18 \end{aligned} \quad \boxed{\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 6 \\ c = 12 \end{array}}$$

$$a+b+c = 18 + 14 + 20 = \frac{9+7+10}{2} = 26$$

$$\sin^2 d = 1 - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\cos 90^\circ = 0 =$$

$$17, 20$$

$$\cos 2d = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times 130 \\ \hline 108 \\ 238 \\ \hline 1368 \\ \times 13 \\ \hline 1296 \\ 714 \\ \hline 1368 \end{array}$$

$$\cos(\pi) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 a - \sin^2 a =$$

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(1-x^2)}{x^2+1}$$

$$\sin^2 d = 1 - \cos^2 d = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2(x^2 - 2,5x + 1,5) = 2((x - 1,25)^2 +$$

$$\begin{array}{r} \times 1,25 \\ \times 1,25 \\ \hline 1,625 \\ 250 \\ \hline 126 \\ \hline 15,725 \end{array}$$

$$t = 2x^2$$

$$+ \cancel{2x^2 - 2}$$

$$-5x, 2x$$

$$t = 2x^2 - ?$$

$$-x$$

$$t = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\frac{(4x+3)^3}{\sqrt{55}} = 4y - \sqrt{55}$$

$$t^2 - \sqrt{t+7x-2} = 2 - 7x \quad \frac{65+63}{48} = 128 + 18$$

$$64$$

$$t^2 - \sqrt{t-6} = 6$$

$$\frac{12x+9+55}{4\sqrt{55}} = y$$

$$t^2 - 6 = \sqrt{t-6}$$

$$65 \quad \frac{128}{\sqrt{638}}$$

$$\frac{12x}{4\sqrt{55}} + \frac{16}{\sqrt{55}} = 8$$

$$(x+1)^2 = \sqrt{t^2 - 6}$$

$$16 \quad \frac{16}{64}$$

$$(x+1)^2 = t^2 - 6 = \frac{2x^2 - 5x + 3 + 2 - 7x}{2x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 2x - 1}$$

$$64$$

$$128$$

$$(x+1)^2 = 2x^2 - 12x + 5$$

$$\frac{6 + \sqrt{36 - 10}}{2}$$

$$(-16; 0); \left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{63}}{4}\right)$$

$$\frac{16}{64} - 9 = 55$$

$$\frac{x+16}{-16 + \frac{1}{4}} = \frac{y}{-\frac{\sqrt{63}}{4}}$$

$$\frac{x\sqrt{63}}{4} + 4\sqrt{63} =$$

$$\frac{x+16}{-63} = \frac{y}{-\sqrt{63}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{63}} + 16\sqrt{63} = y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

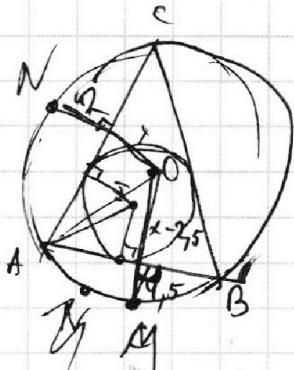
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2+x=4,5$$

$$x=4,5-2$$

$$a+b=14$$

$$(x+4,5)^2 - x^2 = 14^2$$

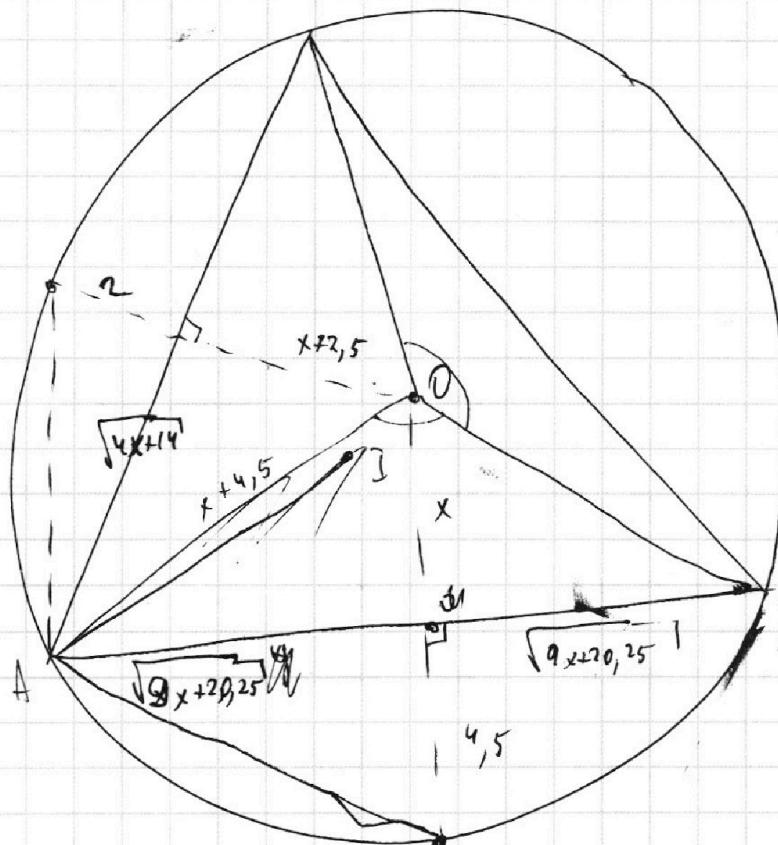
$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 4,5 \\ \hline 22,5 \\ \times 4 \\ \hline 180 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\sqrt{22,5}$$

$$x=2,5$$

$$x^2 + 9x + 20,25 - x^2 - 5x - 6,25$$

$$\begin{array}{c} 2,5 \\ 4x+14 \end{array}$$



$$\frac{(x+4,5)\sqrt{4x+14}}{2} = \frac{1}{2}(x+4,5) \cdot \frac{\sqrt{4x+14}}{x+4,5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

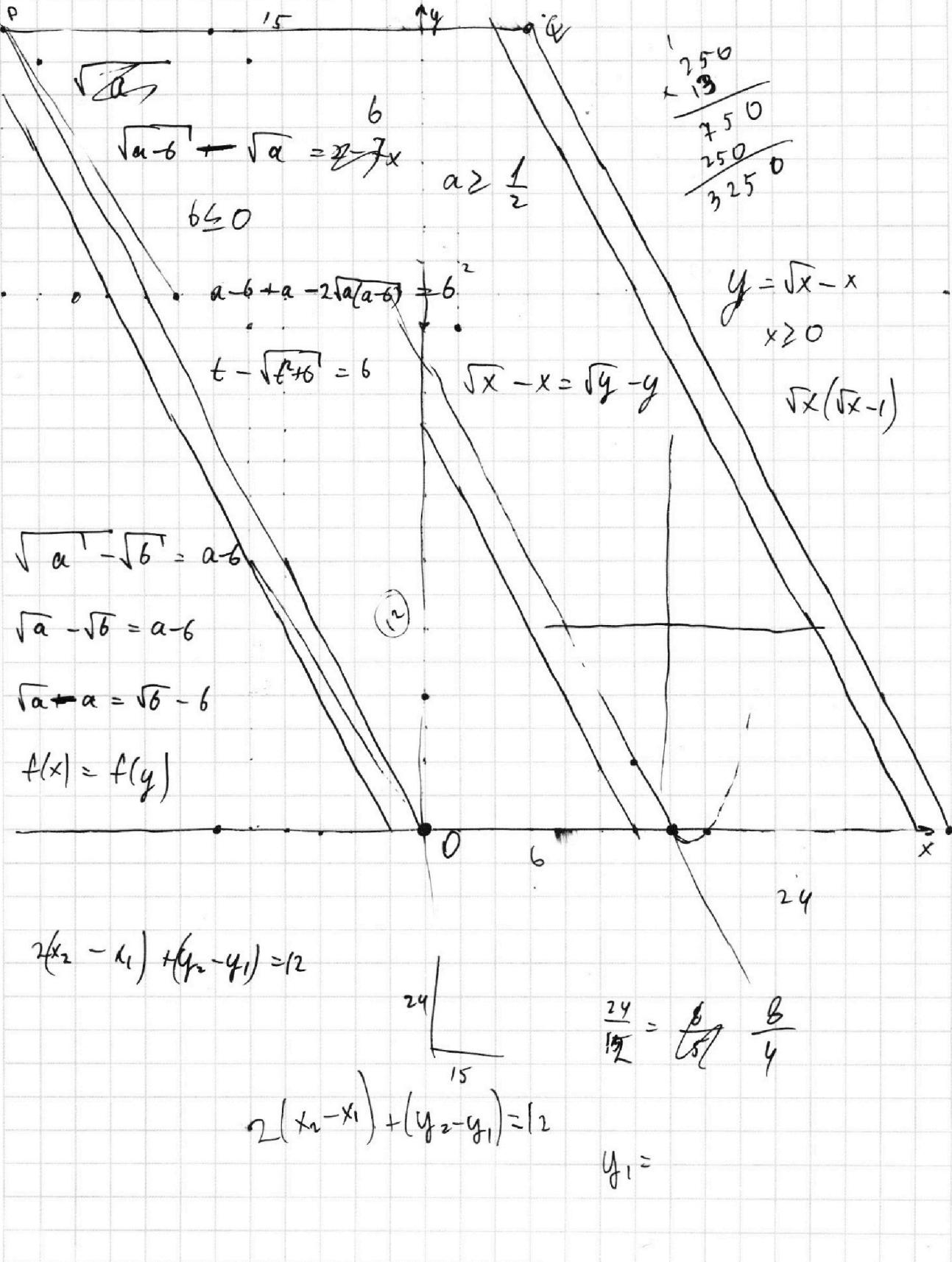
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

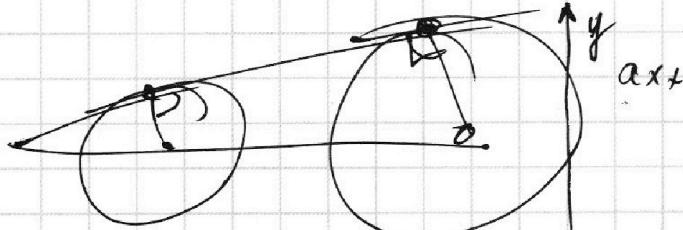
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



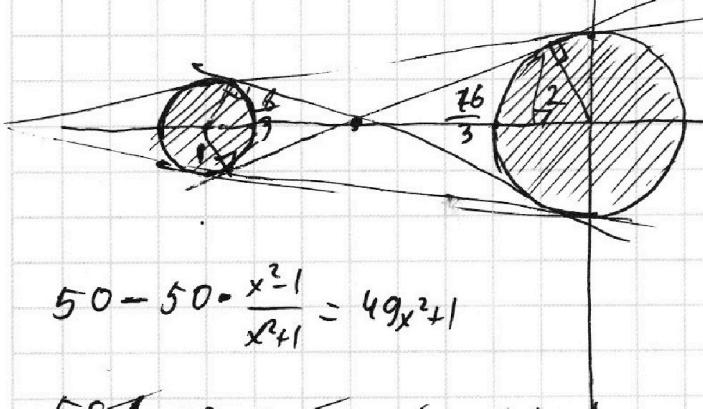
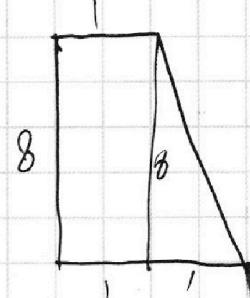
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha x + 106 = y.$$



$$50 - 50 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 49x^2 + 1$$

$$50t + 50 - 50t + 50 = (49t + 1)(t + 1) = 49t^2 + 50t + 1$$

$$99 = 49t^2 + 50t$$

$$49t^2 + 50t - 99 =$$

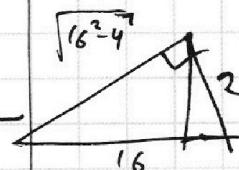
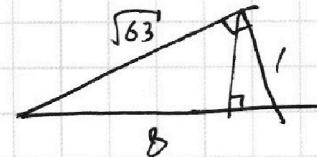
$$= (t-1) \left(t + \frac{99}{49} \right) \frac{1}{8} x + t = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$\frac{1}{8} x + t = \sqrt{x^2 - 4}$$

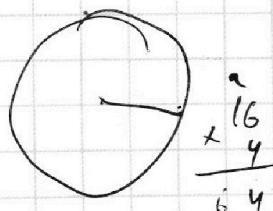
$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \end{array}$$

$$\frac{16}{256} - 36 =$$

$$\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{4}x + 6^2 = x^2 - 4$$



$$16^2 - 4 =$$



$$\frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\frac{16^2 - 4}{16}$$

$$\frac{110}{2} - 64 = 55$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

~~$$t^2 = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$~~

$$\frac{-6}{2a} = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} + 1 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right) \quad t \geq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{t^2 + 2 - 7x} - t = 2 - 7x, \quad t \geq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - t = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - t = 2 - 7x$$

$$\sqrt{t^2 + 6} - t = 6.$$

$$\sqrt{t^2 + 6} = 6 + t$$

$$t^2 + 6 = 6^2 + t^2 + 26t$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 2 - 7x$$

$$0 \geq 2 - 7x$$

~~$$\sqrt{a+6} - \sqrt{a} = 6$$~~

~~$$\sqrt{a+6} = \sqrt{6} + \sqrt{a} \quad \sqrt{6^2 + a} \leq \sqrt{a+6}$$~~

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+6} = 6$$

$$\sqrt{a} = 6 + \sqrt{a+6}$$

$$\begin{aligned} & 7+8, 49+1-6 \cdot 7 \\ & \cancel{d^2} \cdot \cancel{6} \\ & 16 \quad 50-42=8 \end{aligned}$$

$$t = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$t^2 - \sqrt{t^2 + 7x - 2} = 2 - 7x$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+6} = 6$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{a+6} + 6 \Rightarrow 6 = 0$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-6} = 6$$

$$\sqrt{a} = (\sqrt{a-6} + 6)$$

$$a = a-6 + 6^2 + 26\sqrt{a-6}$$

$$6 = 6^2 + 26\sqrt{a-6}$$

$$l = 6 + 2\sqrt{a-6}$$

$$\sqrt{a} = 6 + \sqrt{a-6}$$